Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química
Departamento de Ingeniería Metalúrgica
Introducción a la Ingeniería de Procesos Metalúrgicos y de Materiales

Profesor: Luis Enrique Jardón Pérez

Ejemplo de balance microscópico de momentum (Flujo entre paredes verticales)

Una delgada capa de lubricante se usa para evitar la fricción entre dos paredes verticales, esto debido a que una de las paredes se puede desplazar verticalmente en ambos sentidos o bien en determinado momento permanecer estática. Al ser un sistema vertical el lubricante está expuesto a la fuerza de gravedad.

a) Obtenga un modelo matemático que describa el movimiento del lubricante entre ambas paredes, consideré un punto del sistema donde el flujo está completamente desarrollado.

b) Si el lubricante tiene una densidad de 850 kg/m^3 y una viscosidad cinemática de 2×10^{-4} m^2/s, obtenga el perfil de velocidad del mismo para cuando la segunda placa se mueve a una velocidad de 0.1 m/s, 0 m/s y -0.1 m/s si la distancia entre placas es de 0.5 centímetros.

c) Obtenga una expresión para la velocidad promedio del aceite.

Planteamiento del problema

A partir del enunciado que describe el sistema se puede obtener el siguiente esquema (ver Figura 1), el cual muestra dos placas verticales (una estática y una móvil) que están separadas por una capa de lubricante de espesor L el cual se ve afectado por la fuerza de gravedad.

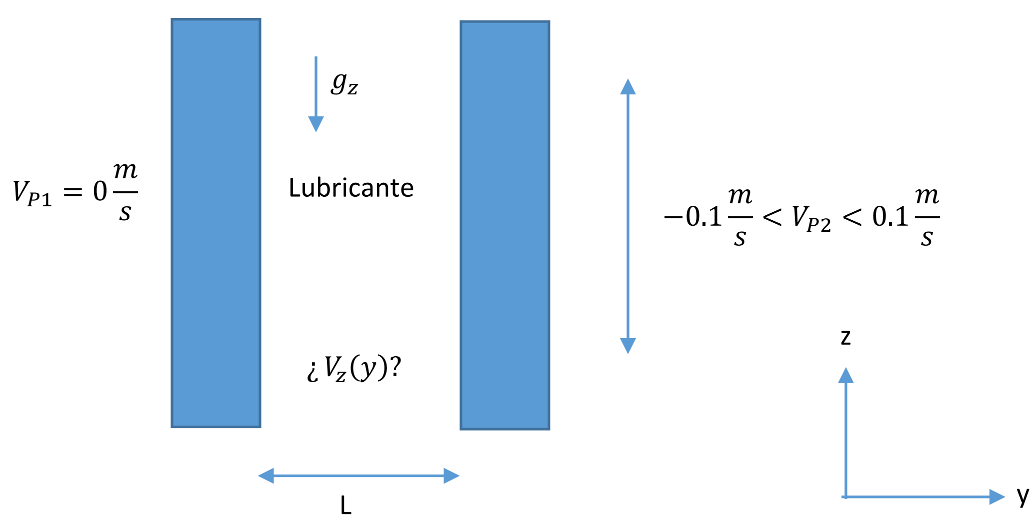

Figura 1.- Esquema del sistema de dos paredes verticales separadas por una capa de lubricante.

Plantear el modelo matemático

Suposiciones:
Dado el planteamiento del problema podemos realizar las siguientes suposiciones:

- Coordenadas cartesianas
- Flujo es 1D (z)
- Flujo laminar completamente desarrollado
- Estado estacionario
- Las placas son infinitamente largas en x
- Fluido es incompresible y newtoniano
- Se considera el efecto de la gravedad
- Se desprecia el efecto de cualquier diferencia de presión

Ecuaciones gobernantes:
Las cuales toman la siguiente forma aplicando las suposiciones consideradas a las ecuaciones generales en coordenadas cartesianas.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas en dirección z, para un fluido incompresible y newtoniano:

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \rho g_z = 0$$

Y dado que solo depende de la posición en y, la ecuación que debe resolverse para describir el movimiento del lubricante en este sistema es la siguiente:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{d y^2} + \rho g_z = 0$$

Condiciones de frontera:
Las cuales se obtienen de la Figura 1:

CF1:

$$En\ y = 0;\ v_z = 0 \frac{m}{s}$$

CF2:

$$En\ y = L;\ v_z = V_{P2}$$

En este caso no se requieren condiciones iniciales y las propiedades del material ya son conocidas.

Solución del modelo planteado:

Partimos de la ecuación diferencial ordinaria obtenida de simplificar las ecuaciones generales con las suposiciones pertinentes:

$$\mu\frac{d^2v_z}{dy^2}+\rho g_z=0$$

La cual se puede integrar separando variables:

$$\int d\left(\frac{dv_z}{dy}\right)=-\frac{\rho g_z}{\mu}\int dy$$

$$\frac{dv_z}{dy}=-\frac{\rho g_z}{\mu}y+c_1$$

Dado que ninguna de las condiciones de frontera se puede aplicar en este punto integramos una vez más:

$$\int dv_z=\int\left(-\frac{\rho g_z}{\mu}y+c_1\right)dy$$

$$v_z=-\frac{\rho g_z}{2\mu}y^2+c_1y+c_2$$

Sustituimos ambas condiciones de frontera en la ecuación obtenida para conocer el valor de ambas constantes de integración. De la CF1:

$$(0)=-\frac{\rho g_z}{2\mu}(0)^2+c_1(o)+c_2$$

$$c_2=0$$

Sustituimos la CF2, llegando a:

$$v_{P2}=-\frac{\rho g_z}{2\mu}L^2+c_1L$$

$$c_1=\frac{v_{P2}}{L}+\frac{\rho g_z}{2\mu}L$$

Una vez obtenidas ambas constantes se reemplazan en la ecuación original:

$$v_z=-\frac{\rho g_z}{2\mu}y^2+\left(\frac{v_{P2}}{L}+\frac{\rho g_z}{2\mu}L\right)y$$

Llegando finalmente a una expresión que nos describe la velocidad del lubricante en dirección z con respecto a la posición en y:

$$v_z=\frac{\rho g_z}{2\mu}y(L-y)+\frac{v_{P2}}{L}y$$

A partir de la expresión obtenida se puede obtener el perfil de velocidad para distintas velocidades de placa (ver Figura 2). Nótese que al encontrarse en contra de la fuerza de gravedad, el lubricante es arrastrado por dicha fuerza de cuerpo hacia abajo, mientras que en ambos extremos tiene la velocidad de las placas (estática o móvil) cumpliendo con las condiciones de frontera previamente seleccionadas.

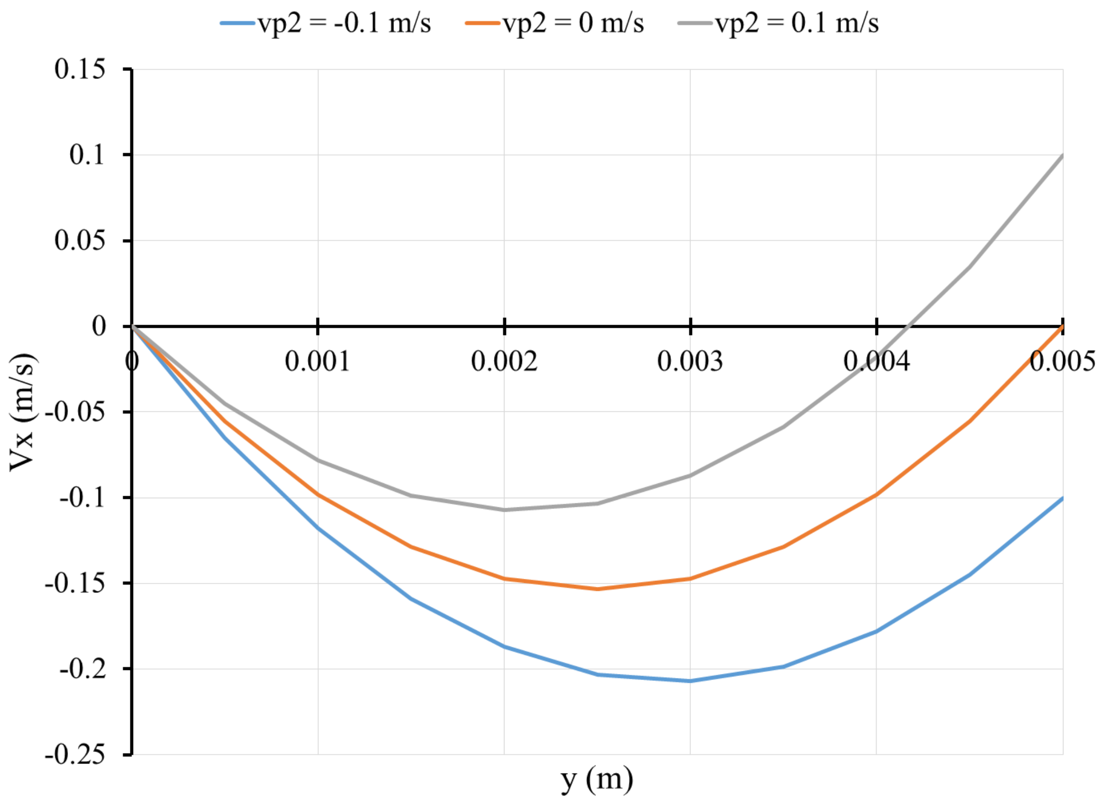

Figura 2.- Perfil de velocidad del sistema con distintas velocidades de la placa móvil.

Para obtener la velocidad promedio recurrimos al teorema del valor medio de la siguiente manera:

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^L v_z(y)\,dy}{\int_0^L dy}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^L \left(\frac{\rho g_z}{2\mu} y(L-y) + \frac{v_{P2}}{L} y\right) dy}{\int_0^L dy}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^L \left(\frac{\rho g_z}{2\mu} yL - \frac{\rho g_z}{2\mu} y^2 + \frac{v_{P2}}{L} y\right) dy}{\int_0^L dy}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\left.\frac{\rho g_z}{4\mu} y^2 L - \frac{\rho g_z}{6\mu} y^3 + \frac{v_{P2}}{2L} y^2\right|_0^L}{\left. y\right|_0^L}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\frac{\rho g_z}{4\mu} L^3 - \frac{\rho g_z}{6\mu} L^3 + \frac{v_{P2}}{2L} L^2 - \frac{\rho g_z}{4\mu} (0)^2 L - \frac{\rho g_z}{6\mu} (0)^3 + \frac{v_{P2}}{2L} (0)^2}{L - 0}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\frac{\rho g_z}{4\mu} L^3 - \frac{\rho g_z}{6\mu} L^3 + \frac{v_{P2}}{2L} L^2}{L}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\rho g_z}{4\mu} L^2 - \frac{\rho g_z}{6\mu} L^2 + \frac{v_{P2}}{2L} L$$

$$\bar{v}_z = \frac{\rho g_z}{12\mu} L^2 + \frac{v_{P2}}{2}$$

En dado caso de que se requiriese conocer el punto donde la velocidad se minimiza basta con igualar la derivada de la función con cero y obtener el valor de y correspondiente:

$$v_{z,min} \rightarrow \frac{dv_z(y)}{dy} = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho g_z}{2\mu} y(L-y) + \frac{v_{P2}}{L} y\right)}{dy} = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho g_z}{2\mu} yL - \frac{\rho g_z}{2\mu} y^2 + \frac{v_{P2}}{L} y\right)}{dy} = 0$$

$$\frac{\rho g_z}{2\mu} L - \frac{\rho g_z}{\mu} y + \frac{v_{P2}}{L} = 0$$

$$y = \frac{L}{2} + \frac{\mu v_{P2}}{L \rho g_z}$$

Siendo este valor de y el punto donde la velocidad se minimiza, el cual puede ser sustituido en la función de la velocidad para obtener una expresión de la velocidad mínima:

$$v_{z,min} = \frac{\rho g_z}{2\mu}\left(\frac{L}{2} + \frac{\mu v_{P2}}{L\rho g_z}\right) L - \frac{\rho g_z}{2\mu}\left(\frac{L}{2} + \frac{\mu v_{P2}}{L\rho g_z}\right)^2 + \frac{v_{P2}}{L}\left(\frac{L}{2} + \frac{\mu v_{P2}}{L\rho g_z}\right)$$

$$v_{z,min} = \frac{\rho g_z L^2}{4\mu} + \frac{v_{P2}}{2} - \frac{\rho g_z L^2}{4\mu} - \frac{v_{P2}}{2} - \frac{\mu {v_{P2}}^2}{2L^2 \rho g_z} + \frac{v_{P2}}{2} + \frac{\mu {v_{P2}}^2}{L^2 \rho g_z}$$

$$v_{z,min} = \frac{v_{P2}}{2} + \frac{\mu {v_{P2}}^2}{2L^2 \rho g_z}$$