

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

Espacio de eventos, $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$, lo suponemos numerables y finito.

Ejemplo: moneda (cara o cruz).

Supongamos N realizaciones de una experiencia tal que el evento e_m se produzca N_m veces, la probabilidad del evento e_m es:

$$P_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_m}{N}$$

Por construcción $0 \leq P_m \leq 1$ y se satisface

$$\sum_{m=1}^M P_m = 1$$

Variable aleatoria discreta

Consideremos una variable X que toma el valor $X^{(m)}$ si se realiza el evento e_m : X es una variable aleatoria. Su distribución está ligada a las probabilidades $\{P_m\}$ por medio de:

$$P(x) = \text{Proba}\{X = x\} = \sum_{X^{(m)}=x} P_m = \sum_{m=1}^M P_m \delta_{x, X^{(m)}}$$

Ejemplo: máquina de monedas

Variable aleatoria continua

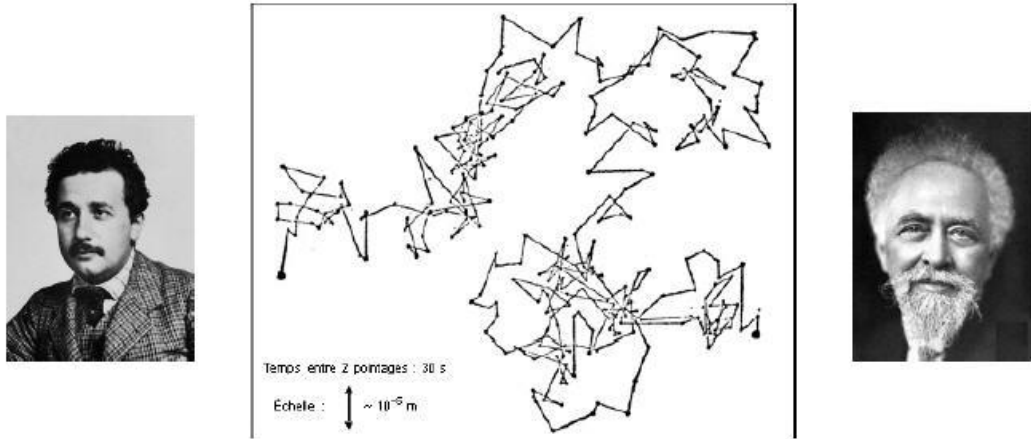
Si el espacio de eventos no es numerable y la variable aleatoria puede variar en un cierto dominio $\mathbb{R}$, se dice que es una variable aleatoria continua.

La densidad de probabilidad $\omega(x)$ mide la probabilidad que la variable aleatoria X tome el valor x

$$\omega(x)dx = \text{Proba}\{X \in [x, x+dx]\}$$

$$\text{Normalización: } \int \omega(x)dx = 1$$

Ejemplo: movimiento browniano



Ley de distribución conjunta.

Consideremos n variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$, se llama ley de distribución conjunta:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \text{Proba}\{X_1 \in [x_1, x_1 + dx_1] \& \dots \& X_n \in [x_n, x_n + dx_n]\}$$

La distribución de solo la variable X_1 , es la ley marginal:

$$\omega_1(x_1) dx_1 = dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \omega(x_1, \dots, x_n)$$

= Proba $\{X_1 \in [x_1, x_1 + dx_1]$ sabiendo que las restantes $n-1$ variables pueden tomar cualquier valor}

Valor promedio

El promedio estadístico sobre un conjunto de N realizaciones:

$$\overline{X^{(N)}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(m_i)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M N_m X^{(m)}$$

Promedio probabilístico (o esperanza matemática)

$$\langle X \rangle = \sum_{v=1}^V P(x_v) x_v$$

En general el promedio de una función de la variable aleatoria:

$$\langle f(X) \rangle = \sum_{v=1}^V P(x_v) f(x_v)$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

El orden de magnitud de las fluctuaciones de la variable aleatoria alrededor de su promedio está caracterizado por

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Ejemplo: ley exponencial

Independencia y correlaciones

Consideremos dos eventos A y B. Si son estadísticamente independientes (no correlacionados) la probabilidad de que ocurran los dos eventos es:

$$P(A \& B) = P(A) P(B) \text{ (definición de independencia estadística)}$$

Si los dos eventos están correlacionados

$$P(A \& B) \neq P(A) P(B)$$

Variables independientes y correlacionadas

Consideremos dos variables aleatorias X_A y X_B

1. Las variables son independientes

$$\langle X_A X_B \rangle = \sum_{x,y} xy \text{Proba}\{X_A = x \& X_B = y\} = \langle X_A \rangle \langle X_B \rangle$$

2. Las posiciones están correlacionadas

$$\langle X_A X_B \rangle > \langle X_A \rangle \langle X_B \rangle$$

3. Las posiciones están anti-correlacionadas

$$\langle X_A X_B \rangle < \langle X_A \rangle \langle X_B \rangle$$

Si se consideran N variables aleatorias, se define la matriz de covarianza:

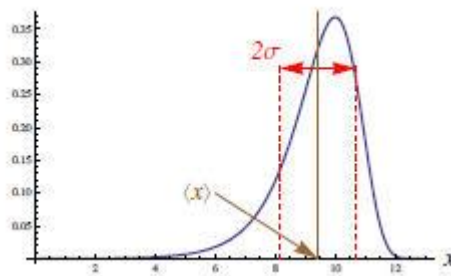
$$C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle = \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle$$

De tal forma que

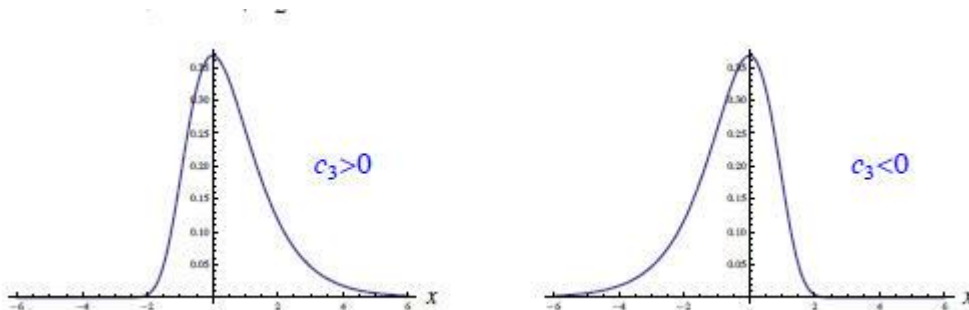
$$C_{ij} = \begin{cases} = 0, & X_i \text{ y } X_j \text{ no correlacionadas} \\ > 0, & X_i \text{ y } X_j \text{ correlacionadas} \\ < 0, & \text{anti-correlacionadas} \end{cases}$$

Momentos y cumulantes

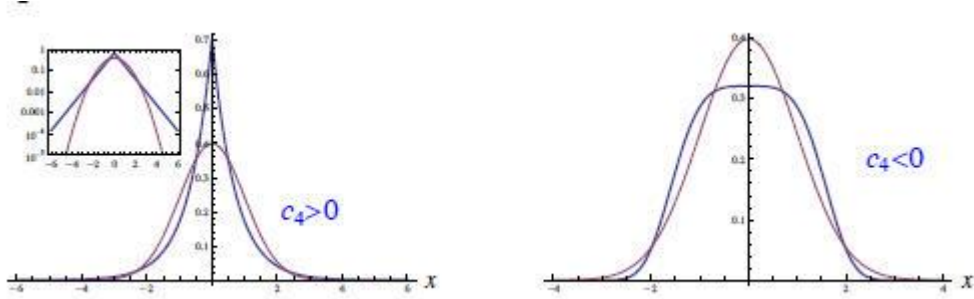
1. Valor promedio
2. Varianza



3. Skewness



4. Kurtosis



Funciones generadoras

$$g(p) \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{-pX} \rangle = \int dx w(x) e^{-px}$$

que es la transformada de Laplace de la distribución

La función generadora permite obtener directamente los momentos $\mu_n = \langle X^n \rangle$

$$g(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)^n}{n!} \mu_n \quad \Rightarrow \quad \mu_n = (-1)^n g^{(n)}(0).$$

Ejemplo: ley binomial

Ejemplo: ley de Poisson

Ejemplo: distribución Gaussiana

Teorema del límite central

Sea $S = \sum X_n$ la suma de N variables aleatorias idénticas e independientes cuyos dos primeros momentos son finitos, $\langle X \rangle < \infty$ y $\langle X^2 \rangle < \infty$

En el límite $N \rightarrow \infty$, la distribución de S tiende a una ley gaussiana, centrada en $\langle S \rangle = N \langle X \rangle$ y con $\sigma_S = \sqrt{N} \sigma_X$

MAXWELL-BOLTZMANN DISTRIBUTION

La deducción original de Maxwell en 1860 se basó en las colisiones moleculares de la teoría cinética de los gases y argumentó que éstas colisiones conducen al equilibrio. Boltzmann en 1872 también la derivó y argumentó que los gases deben tender en el tiempo hacia ésta distribución (Teorema H).

Distribution function [[edit](#)]

Assuming the system of interest contains a large number of particles, the fraction of the particles within an infinitesimal element of three-dimensional velocity space, d^3v , centered on a velocity vector of magnitude v , is $f(v)d^3v$, in which

$$f(v) d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m|v|^2}{2kT}} d^3v,$$

where m is the particle mass and kT is the product of [Boltzmann's constant](#) and [thermodynamic temperature](#).

One can write the element of velocity space as $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, for velocities in a standard Cartesian coordinate system, or as $d^3v = v^2 dv d\Omega$ in a standard spherical coordinate system, where $d\Omega$ is an element of solid angle.

Here $f(v)$ is given as a probability distribution function, properly normalized so that $\int f(v) d^3v$ over all velocities equals one. In plasma physics, the probability distribution is often multiplied by the particle density, so that the integral of the resulting distribution function equals the density.

Undergraduate students are likely to work with the Maxwellian distribution function for particles moving in only one direction. If this direction is x , then one has

$$f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x,$$

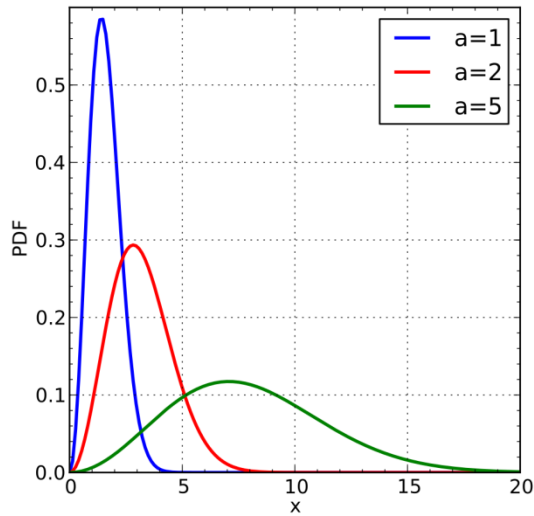
which can be obtained by integrating the three-dimensional form given above over v_y and v_z .

Recognizing the symmetry of $f(v)$, one can integrate over solid angle and write a probability distribution of speeds as the function^[6]

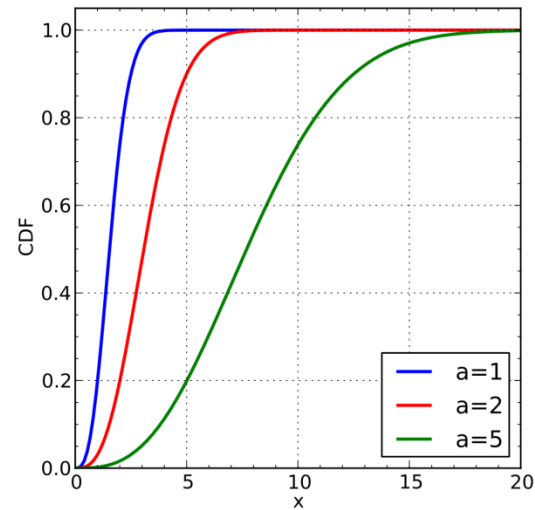
$$f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv,$$

This [probability density function](#) gives the probability, per unit speed, of finding the particle with a speed near v . This

This [probability density function](#) gives the probability, per unit speed, of finding the particle with a speed near v . This equation is simply the Maxwell–Boltzmann distribution (given in the infobox) with distribution parameter $a = \sqrt{kT/m}$. The Maxwell–Boltzmann distribution is equivalent to the [chi distribution](#) with three degrees of freedom and [scale parameter](#) $a = \sqrt{kT/m}$.



Probability density function



Cumulative distribution function

Parameters	$a > 0$
Support	$x \in (0; \infty)$
PDF	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{-x^2/(2a^2)}}{a^3}$
CDF	$\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x e^{-x^2/(2a^2)}}{a}$ where erf is the error function
Mean	$\mu = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
Mode	$\sqrt{2}a$
Variance	$\sigma^2 = \frac{a^2(3\pi - 8)}{\pi}$
Skewness	$\gamma_1 = \frac{2\sqrt{2}(16 - 5\pi)}{(3\pi - 8)^{3/2}}$
Ex. kurtosis	$\gamma_2 = 4 \frac{(-96 + 40\pi - 3\pi^2)}{(3\pi - 8)^2}$
Entropy	$\ln(a\sqrt{2\pi}) + \gamma - \frac{1}{2}$