EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN DATOS EXPERIMENTALES

Javier Miranda Martín del Campo

ÍNDICE

1. Introducción y conceptos básicos

Cuando se da a conocer el resultado de la medición de una cierta cantidad física, es indispensable dar una indicación cuantitativa de la calidad del resultado, para que pueda tenerse una idea de su confiabilidad. Sin esto, es imposible hacer comparaciones de dichos resultados, ya sea entre ellos mismos, o con valores de referencia. Por ello debe existir un procedimiento comprensible y aceptado generalmente que lleve a una evaluación y expresión apropiada de la incertidumbre.
Así como se ha establecido y difundido el uso del *Sistema Internacional de Unidades* (*SI*), se requiere instaurar un método "universal" para la evaluación y expresión de la incertidumbre en las mediciones, en los campos de la ciencia, la ingeniería, el comercio, la tecnología y las reglamentaciones en general.
El método ideal para la evaluación de las incertidumbres debe tener las siguientes propiedades:

- *universal*: se podrá aplicar a todo tipo de mediciones y todo tipo de datos usados en las mediciones;
- *consistente internamente*: debe ser derivable directamente de las componentes que contribuyen a ella, y ser independiente de cómo se agrupan esas componentes;
- *transferible*: la incertidumbre evaluada para un resultado debe poderse usar directamente en la evaluación de la incertidumbre de otra medición en que se utilice dicho resultado.

Más aún, en aplicaciones comerciales e industriales es necesario dar intervalos de confianza para ciertas magnitudes mensurables, en los cuales se engloba una fracción grande de la distribución de valores obtenidos en el proceso de medición de dicha magnitud. El método de evaluación de la incertidumbre debería ofrecer, entonces, la capacidad de calcular esos intervalos de confianza.

Antes de presentar el procedimiento para la evaluación de las incertidumbres, es conveniente recordar algunas definiciones.

- La **incertidumbre de una medición** es un parámetro asociado con el resultado de esa medición, que caracteriza la dispersión de los valores que se podrían atribuir razonablemente al mensurando.
- La **incertidumbre estándar** es la incertidumbre del resultado de una medición expresado como una desviación estándar.
- La **evaluación tipo A** es el método de evaluación de la incertidumbre por medio del análisis estadístico de una serie de observaciones.
- La **evaluación tipo B** es el método de evaluación de la incertidumbre por medios distintos al análisis estadístico de una serie de observaciones.
- La **incertidumbre estándar combinada** es la incertidumbre estándar del resultado de una medición cuando el resultado se obtiene de los valores de otras cantidades, y es igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, los cuales son las varianzas o covarianzas de estas otras cantidades ponderadas de acuerdo a cómo el resultado de la medición varía con cambios en estas cantidades.

- La **incertidumbre expandida** es una cantidad que define un intervalo alrededor del resultado de una medición, y que se espera abarque una fracción grande de la distribución de valores que se podrían atribuir razonablemente al mensurando.
- El **factor de cobertura** es un factor numérico utilizado como un multiplicador de la incertidumbre estándar combinada para obtener la incertidumbre expandida.
- El **error (de medición)** es el resultado de una medición menos el valor real del mensurando. No debe confundirse **error** con **incertidumbre**.

Estos conceptos se describirán a continuación, y se explicarán los procedimientos necesarios para calcularlos.

2. Evaluación de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos el mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N cantidades $X_1, X_2, ..., X_N$ a través de una relación funcional f:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \ . \qquad (1)$$

Un ejemplo de este tipo de relaciones es la potencia P disipada por un resistor a la temperatura t, cuando tiene un valor R_0 a la temperatura t_0 y un coeficiente lineal térmico de resistencia α, que está dada por la ecuación:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = \frac{V^2}{R_0\left[1 + \alpha(t - t_0)\right]} \ . \qquad (2)$$

Las *cantidades de entrada* $X_1, X_2, ..., X_N$, sobre las que depende la *cantidad de salida* Y, pueden ser también mensurandos por sí mismos, y depender a su vez de otras cantidades, y que incluyan factores de corrección por efectos sistemáticos, y que lleven a relaciones funcionales en extremo complicadas que nunca se escribirán. Más aún, f se puede determinar experimentalmente u obtenerse a partir de un cálculo numérico.

Las cantidades $X_1, X_2, ..., X_N$ se pueden dividir en dos tipos:

- Cantidades cuyos valores e incertidumbres se determinan directamente en la medición actual. Se pueden obtener de una sola observación, mediciones repetidas, o juicios basados en la experiencia;
- Cantidades cuyos valores e incertidumbres se introducen en la medición a través de fuentes externas, como cantidades asociadas a patrones de medición calibrados, materiales de referencia certificados, o datos de referencia obtenidos de manuales.

Una estimación del mensurando Y, denotada por y, se calcula con la ecuación (1) utilizando estimaciones de entrada $x_1, x_2, ..., x_N$. Así pues, la estimación explícita es:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ . \qquad (3)$$

En algunos casos, la estimación puede evaluarse con la ecuación:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k}) \ , \qquad (4)$$

lo cual no es sino una media aritmética de *n* determinaciones independientes Y_k de *Y*, donde $X_{i,k}$ es la observación *k* de X_i, y cada determinación tiene la misma incertidumbre. Esta forma de promediar, y no $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$, con $\overline{X}_i = \left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}\right)\big/ n$, es preferible cuando la función *f* no es lineal. En el caso lineal, ambas son equivalentes.
La desviación estándar estimada, asociada con la estimación de la cantidad *y*, llamada la *incertidumbre estándar combinada* y denotada por $u_c(y)$, se calcula de la desviación estándar estimada que se asocia a cada estimación x_i, denominada *incertidumbre estándar* y designada con $u(x_i.)$ Esta última cantidad se puede calcular con una distribución de valores posibles de la cantidad X_i, la cual a su vez se obtiene de una serie de observaciones o de una distribución conocida *a priori*. La evaluación tipo A de la incertidumbre se basa en el primer caso (una distribución de frecuencias), mientras que la evaluación tipo B de la incertidumbre resulta de una distribución establecida *a priori*. Ambas reflejan nuestro conocimiento del proceso de medición.

2.1 Evaluación tipo A de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado μ_q de una cantidad *q*, y para la cual se han hecho *n* mediciones independientes q_k es la media aritmética o promedio $\overline{q}$:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \ . \qquad (5)$$

Las observaciones individuales q_k difieren en valor debido a variaciones aleatorias. La varianza experimental de las observaciones, que es un estimador de la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de *q* es:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (q_k - \overline{q})^2 \ . \qquad (6)$$

Esta cantidad, junto con su raíz cuadrada positiva $s(q_k)$ (conocida como la **desviación estándar experimental**), caracterizan la variabilidad de los valores observados q_k, es decir, su dispersión alrededor de la media $\overline{q}$.
Por otro lado, la mejor estimación de la varianza de la media, $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$, es

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \ . \qquad (7)$$

La varianza experimental de la media, junto con su raíz cuadrada positiva, $s(\overline{q})$, denominada la **desviación estándar experimental de la media**, cuantifican qué tan bien $\overline{q}$ estima el valor esperado de q, y se puede utilizar como una medida de la incertidumbre de $\overline{q}$. En otras palabras, la evaluación tipo A de la incertidumbre estándar de un conjunto de mediciones x_k, tal como se definió previamente, se logra con la ecuación:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \quad . \tag{8}$$

2.2 Ejemplo de evaluación tipo A de la incertidumbre

Como ejemplo de aplicación del procedimiento descrito en la sección anterior, se utilizará un conjunto de datos, consistente en las masas de 98 filtros de policarbonato, medidas con una electrobalanza. La tabla 1 presenta los datos.

Tabla 1. Masas de filtros de policarbonato (en mg.)

4.37	4.42	4.44	4.40	4.44	4.39
4.40	4.46	4.43	4.42	4.45	4.41
4.42	4.40	4.36	4.47	4.41	4.40
4.45	4.43	4.39	4.41	4.42	4.45
4.36	4.43	4.37	4.39	4.40	4.41
4.36	4.43	4.50	4.47	4.48	4.42
4.44	4.47	4.38	4.40	4.47	4.39
4.37	4.44	4.47	4.34	4.47	4.33
4.40	4.52	4.44	4.43	4.43	4.41
4.44	4.44	4.46	4.38	4.47	4.40
4.41	4.40	4.48	4.36	4.44	4.39
4.46	4.40	4.47	4.43	4.38	4.41
4.48	4.43	4.41	4.46	4.36	4.44
4.44	4.48	4.43	4.45	4.43	4.31
4.47	4.41	4.44	4.44	4.46	4.35
4.45	4.40	4.44	4.36	4.50	4.38
4.41	4.41				

Por otro lado, la figura 1 muestra el histograma con los datos presentados en la tabla 1. Al efectuar los cálculos recomendados en la sección anterior, se obtienen los resultados de la tabla 2.

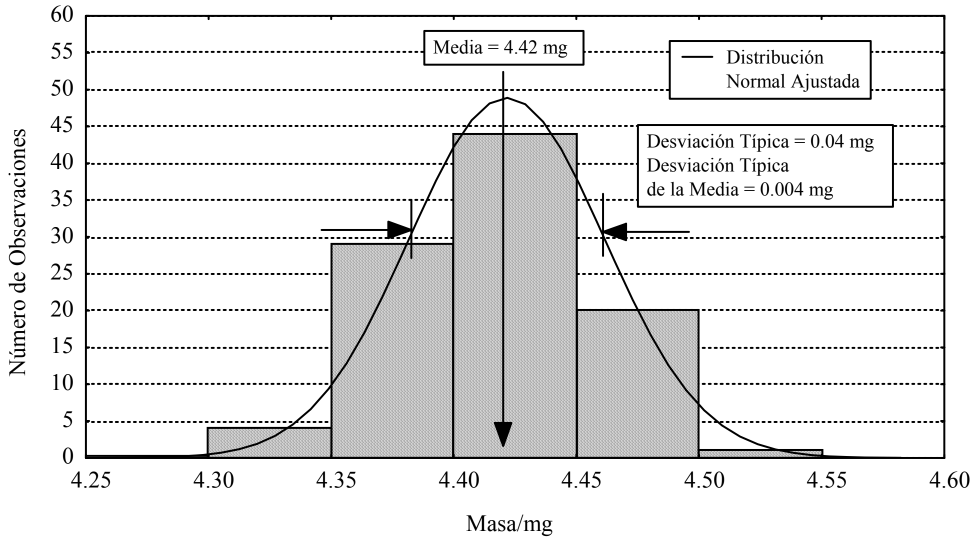

Figura 1. Histograma para las masas de los filtros de policarbonato.

Tabla 2. Evaluación tipo A de la incertidumbre en la medición de la masa de filtros de policarbonato.

CANTIDAD	ECUACIÓN	RESULTADO
Media	(5)	4.42 mg
Varianza	(6)	0.0016 mg^2
Desviación estándar	Raíz cuadrada de (6)	0.04 mg
Varianza experimental de la media	(7)	1.6×10^{-5} mg^2
Desviación estándar de la media	Raíz cuadrada de (7)	0.004 mg
Incertidumbre estándar	(8)	0.004 mg

Además, cuando se informa acerca de evaluaciones tipo A de la incertidumbre, debe darse el número de **grados de libertad**, n_i, que es igual a n - 1 cuando $x_i = \overline{X}_i$ y $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ se calculan usando n observaciones independientes.
La discusión sobre la evaluación tipo A de la incertidumbre no es de ningún modo exhaustiva ; existen otras situaciones, a veces muy complejas, que deben tratarse con métodos estadísticos específicos.

2.3 Evaluación tipo B de la incertidumbre

Cuando se tiene una estimación x_i de una cantidad X_i que no se ha obtenido de observaciones repetidas, la varianza estimada $u^2(x_i)$ o la incertidumbre estándar $u(x_i)$ se evalúan por un juicio científico basado en toda la información disponible acerca de la variabilidad de X_i. Entre ésta se pueden incluir:

- datos de mediciones anteriores ;
- experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de materiales de referencia, patrones o instrumentos ;
- especificaciones del fabricante ;
- datos provistos en calibraciones u otros certificados ;

- incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales .

Por conveniencia, cuando $u^2(x_i)$ y $u(x_i)$ se calculan con estos procedimientos se conocen en ocasiones como la **varianza tipo B** y la **incertidumbre estándar B**.
El uso apropiado de la incertidumbre tipo B está basado sobre todo en la experiencia y el conocimiento general, y puede ser tan confiable como la incertidumbre tipo A.
Existen varias formas en que se presenta la incertidumbre tipo B cuando el dato se toma de tablas, manuales o especificaciones del fabricante. Por ejemplo, se puede establecer que la incertidumbre dada es un cierto múltiplo de la desviación estándar. En este caso, la incertidumbre estándar es la desviación estándar dividida entre el multiplicador, y la varianza estimada es el cuadrado del número resultante. Otra manera de especificar la incertidumbre es dar un intervalo que tiene un nivel de confianza de 90, 95 ó 99 por ciento. Si no se dice explícitamente, se supone que se utilizó una distribución normal para dar la incertidumbre, y se puede recuperar la incertidumbre estándar al dividir el valor dado entre el factor apropiado dentro de la distribución normal. Estos factores son 1.64, 1.96 y 2.58, respectivamente, para los niveles de confianza citados antes.
En el caso en que se afirma que hay una probabilidad del 50% de que la cantidad de entrada X_i esté en el intervalo comprendido entre a_- y a_+, se puede suponer que la mejor estimación de X_i es el punto medio de dicho intervalo; más aún, si el ancho medio del intervalo, denotado por $a = (a_+ - a_-)/2$, la incertidumbre tipo B se toma como $u(X_i)$=1.48a, ya que en una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, el intervalo $\mu\pm\sigma/1.48$ cubre el 50% de la distribución. Por otro lado, si hay una probabilidad de que a partir de tres valores medidos, dos caigan en el intervalo mencionado, la incertidumbre debe calcularse como $u(X_i)$=1.48a, pues en este caso una desviación estándar cubre alrededor del 68.3% de la distribución.
En otras ocasiones sólo se sabe que hay una probabilidad igual a uno de que el valor caiga en el intervalo dado, y es cero fuera de él. Así, se tiene una distribución rectangular o uniforme, y el valor esperado de X_i es el punto medio de la distribución, y tiene una varianza asociada

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)/12 \ . \tag{9}$$

También puede darse el caso de distribuciones asimétricas con respecto al valor esperado x_i. Por ejemplo, en la situación que el límite inferior se pueda expresar como $a_- = x_i - b_-$ y el límite superior como $a_+ = x_i + b_+$. La distribución no es uniforme, y además puede no haber suficiente información sobre ella. Así pues, la aproximación más simple será :

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \ , \tag{10}$$

la cual no es sino la varianza de una distribución rectangular con ancho total $b_- + b_+$.
En los casos anteriores se presenta una distribución que es discontinua en los límites, situación que no concuerda con la física. Es más razonable esperar que los valores cercanos al centro de la distribución sean más probables que los cercanos a los límites. Así pues,

sería más útil una distribución trapezoidal simétrica, con lados de igual pendiente, y una base con anchura a_+ - a_- = $2a$, y un lado superior con anchura $2a\beta$, donde $0 \le \beta \le 1$. Cuando $\beta \rightarrow 1$, la distribución trapezoidal se parece a la rectangular, mientras que para b=0, la distribución es triangular. Para la distribución trapezoidal, el valor esperado es $x_i = (a_+ + a_-)/2$, con varianza

$$u^2(x_i) = a^2(1+\beta^2)/6 \ . \tag{11}$$

Finalmente, es importante hacer notar que las componentes de la incertidumbre no deben tomarse en cuenta más de una vez. Si dicha componente se obtiene de una evaluación tipo B, se debe incluir como independiente sólo si el efecto no contribuye a la variabilidad de las observaciones, es decir, no se introduce como una incertidumbre tipo A.

3. Evaluación de la incertidumbre estándar combinada

Existen diversos procedimientos para calcular la incertidumbre estándar combinada, dependiendo de si las cantidades de entrada son independientes o no, es decir, si existe alguna correlación entre ellas.

3.1 Cantidades de entrada no correlacionadas

Cuando no existe correlación entre las cantidades que aparecen en una medición, se debe utilizar un procedimiento para obtener la incertidumbre estándar combinada basado en las incertidumbres estándares de las cantidades originales y alguna relación funcional entre ellas, de la cual se obtiene la nueva cantidad.
La incertidumbre estándar de y, donde y es la estimación del mensurando Y, y por tanto el resultado de una medición, se obtiene al combinar apropiadamente las incertidumbres estándares de las estimaciones de entrada $x_1, x_2,...,x_N$ La incertidumbre estándar combinada se denota por $u_c(y.)$
Para calcular esta cantidad, se utiliza la siguiente ecuación:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \ , \tag{12}$$

en la cual f es la función presentada en la ecuación (1.) Cada una de las $u(x_i)$ puede ser una incertidumbre estándar evaluada según el procedimiento tipo A o el tipo B. A esta ecuación se le conoce como la **ley de propagación de la incertidumbre**.
Las derivadas parciales que aparecen en la ec. (12) están evaluadas en X_i = x_i, y frecuentemente se les llama **coeficientes de sensibilidad**, y describen cómo cambia la estimación de salida y con cambios en las estimaciones de entrada $x_1, x_2,...,x_N$. Así, es posible escribir:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \ , \tag{13}$$

en donde

$$c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \ , \tag{14}$$

$$u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \ . \tag{15}$$

Para ilustrar lo anterior, puede usarse el ejemplo dado por la ec. (2.) Se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
c_1 &\equiv \partial P / \partial V = 2V / R_0[1+\alpha(t-t_0)] = 2P/V \\
c_2 &\equiv \partial P / \partial R_0 = -V^2 / R_0^2[1+\alpha(t-t_0)] = -P/R_0 \\
c_3 &\equiv \partial P / \partial \alpha = -V^2(t-t_0) / R_0[1+\alpha(t-t_0)] = -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)] \\
c_4 &\equiv \partial P / \partial t = -V^2\alpha / R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P\alpha / [1+\alpha(t-t_0)]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
u^2(P) &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t) \\
&= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\
&= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)
\end{aligned}$$

En ocasiones, los coeficientes de sensibilidad se encuentran experimentalmente, en vez de calcularse, pues se mide el cambio en Y al efectuar un cambio en X_i.

3.2 Cantidades de entrada correlacionadas

En el caso en que las cantidades de entrada sí se encuentren correlacionadas, el procedimiento para evaluar la incertidumbre estándar combinada es diferente. Así, la ley de propagación de la incertidumbre estándar se convierte en:

$$\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)
\end{aligned} \tag{16}$$

donde x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j, respectivamente, y $u(x_i, x_j) = u(x_j,x_i)$ es la covarianza estimada asociada con las variables ya mencionadas. El grado en que x_i y x_j se correlacionan se caracteriza por el coeficiente de correlación estimado:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad . \tag{17}$$

Cuando las variables son independientes, el coeficiente de correlación es igual a cero, mientras que para valores cercanos a ± 1, la dependencia entre ambas variables es lineal, decreciente o con pendiente negativa con el valor -1, y creciente o pendiente positiva si el coeficiente de correlación es +1.
En este sentido, como el coeficiente de correlación es más fácilmente comprensible que la covarianza, el último término de la ec. (16) se puede escribir en la forma

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \quad . \tag{18}$$

La estimación de la covarianza s entre dos variables p y q se calcula con la ecuación

$$s(\overline{p}, \overline{q}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(p_k - \overline{p})(q_k - \overline{q}) \quad , \tag{19}$$

en donde p_k y q_k son las observaciones individuales de dichas cantidades, mientras que $\overline{p}$ y $\overline{q}$ son las estimaciones de las medias. Ésta es una evaluación tipo A de la covarianza.

Para concluir esta sección, debe mencionarse que existe la recomendación oficial de utilizar la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ como el parámetro adecuado para expresar cuantitativamente la incertidumbre del resultado de una medición.

3.3 Ejemplo de cálculo de incertidumbre estándar combinada

En las mediciones de las masas de los filtros de policarbonato, el fabricante especifica que la incertidumbre del instrumento en la medición de la masa es de 0.01 mg (incertidumbre tipo B.) Por tanto, para obtener la incertidumbre estándar combinada de la masa promedio de los filtros, cuya incertidumbre tipo A (0.004 mg) se evaluó en la tabla 2, debe escribirse:

$$u_c(m) = \sqrt{u_A^2(m) + u_B^2(m)} = \sqrt{(0.004\,\mathrm{mg})^2 + (0.01\,\mathrm{mg})^2} = 0.011\,\mathrm{mg}$$

4. Determinación de la incertidumbre expandida

A pesar de lo dicho en el final de la sección anterior, frecuentemente es necesario dar una incertidumbre que defina un intervalo alrededor del resultado de la medición del que se espera comprenda una fracción grande de la distribución de valores que podrían atribuirse razonablemente al mensurando. A esta cantidad se le conoce como **incertidumbre expandida**, y se denota con U. Ésta se obtiene al multiplicar la incertidumbre combinada $u_c(y)$ por un **factor de cobertura** k :

$$U = ku_c(y) \ . \tag{20}$$

El resultado de la medición se expresa convenientemente, entonces, como $Y = y \pm U$ en lo que se interpreta como un valor y atribuible al mensurando Y, comprendido en el intervalo $y - U$ a $y + U$.
U se interpreta como la definición de un intervalo alrededor del resultado de la medición que comprende una fracción grande p de la distribución de probabilidad caracterizada por ese resultado y su incertidumbre estándar combinada. p es la cobertura de probabilidad o nivel de confianza del intervalo. Cuando sea posible, este nivel de confianza debe especificarse. Debe observarse que al multiplicar la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por una constante no proporciona mayor información, sino que la presenta de una manera distinta. Además, el nivel de confianza p es incierto.
La selección del factor de cobertura k dependerá del nivel de confianza requerido, y su valor estará, por lo común, entre 2 y 3. Sólo la experiencia determina cuál es el valor que debe asignarse a k. Sin embargo, cuando la distribución de probabilidad que caracteriza tanto a y como a $u_c(y)$ es aproximadamente normal y el número de grados de libertad efectivos de $u_c(y)$ es de un tamaño significativo, puede asignarse a k el valor de 2, con un intervalo que produce un nivel de confianza de 95%, y el valor $k = 3$ produce un intervalo con un nivel de confianza de 99%.

5. Informe de la incertidumbre

La necesidad de dar a conocer los resultados de una medición, o una serie de ellas, exige que se informe sobre la incertidumbre que sea clara y específica. Así, en un informe de este tipo, se debe :

1. describir claramente los métodos usados para calcular el resultado de la medición y su incertidumbre a partir de las observaciones experimentales y datos de entrada ;
2. enumerar todas las componentes de la incertidumbre y documentar por completo cómo se evaluó cada una de ellas ;
3. presentar el análisis de los datos en una forma que cada una de las etapas importantes se pueda seguir con facilidad y el cálculo del resultado presentado se pueda repetir independientemente, si es necesario ;
4. proporcionar todas las correcciones y constantes usadas en el análisis y sus fuentes.

Es posible apegarse a la siguiente guía, para presentar los resultados de una manera adecuada :

a) dar una descripción completa de cómo se define el mensurando Y ;
b) dar la estimación y del mensurando Y y su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$; las unidades de ambas deben escribirse **siempre** ;
c) incluir la incertidumbre estándar combinada relativa, $u_c(y)/ \ |y|$, $|y|\neq 0$, cuando sea apropiado ;
d) dar el valor de cada estimación de entrada x_i y su incertidumbre estándar $u(x_i)$ junto con la descripción de cómo se obtuvieron ;
e) dar las covarianzas estimadas o coeficientes de correlación estimados asociados con todas las estimaciones de entrada que estén correlacionadas, y los métodos usados para calcularlos ;
f) dar los grados de libertad para la incertidumbre estándar de cada estimación de entrada y cómo se obtuvo ;
g) dar la relación funcional $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ y, cuando se juzgue necesario, las derivadas parciales o coeficientes de sensibilidad. Sin embargo, los coeficientes de sensibilidad determinados experimentalmente se deben presentar.

Para presentar por escrito los resultados, es recomendable seguir alguno de los siguientes formatos. En el ejemplo dado, la cantidad medida es una masa m, patrón, nominalmente de 100 g.

1) m = 100.021 47 g con (una incertidumbre estándar combinada) u_c = 0.35 mg.

2) m = 100.021 47(35) g, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c referido a los correspondientes últimos dígitos del resultado dado.

3) m = 100.021 47(0.000 35) g, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c expresado en las unidades del resultado dado.

4) m = (100.021 47 ± 0.000 35) g donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c y no un intervalo de confianza.

En todos los casos, la expresión entre paréntesis podría omitirse.
Debe tenerse en cuenta que la forma 4) debe evitarse en lo posible, pues existe el riesgo de confundir con una nivel de confianza y, a su vez, con una incertidumbre expandida.
Cuando se informe sobre el resultado de una medición, y se utilice la incertidumbre expandida, debe hacerse de la siguiente manera:

- dar una descripción completa de cómo se define el mensurando Y ;
- escribir el resultado de la medición como $Y = y \pm U$, y dar las unidades de y y de U ;
- incluir la incertidumbre expandida relativa ;
- dar el valor de k usado para obtener U , o también el de $u_c(y)$;
- dar el nivel de confianza aproximado asociado con el intervalo $y \pm U$ y explicar cómo se estableció.

Los valores numéricos de la estimación y y su incertidumbre estándar $u_c(y)$ o la incertidumbre expandida U no se deben escribir con un número excesivo de dígitos. Usualmente es suficiente dar estos valores con un máximo de dos cifras significativas, aunque en algunos casos puede ser necesario retener cifras adicionales para evitar errores por redondeo en cálculos subsecuentes. Es recomendable (y razonable) redondear o utilizar cifras significativas de acuerdo a la incertidumbre que se obtuvo. Así, si el resultado de una medición es y = 10.057 62 m, con incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ = 27 mm, se debe redondear a y = 10.058 m. Los coeficientes de correlación se deben escribir con tres cifras significativas si sus valores absolutos son próximos a la unidad.

6. Evaluación de la incertidumbre en regresión lineal

Frecuentemente es necesario hacer ajustes de modelos lineales a los resultados de mediciones, cuando una de las variables medidas depende de otra de ellas. En estas situaciones, la información que debe obtenerse son los parámetros que caracterizan a la función que debe relacionar ambas variables. Sin duda, el caso más simple es una relación lineal, en la que deben determinarse como parámetros la pendiente y la ordenada al origen de una recta.

El método más simple para el ajuste de una recta a un conjunto de parejas de datos experimentales se refiere a la *regresión lineal*, también conocido como el de *mínimos cuadrados lineales*. En este método, se hace una minimización de la suma cuadrática de las distancias verticales entre los datos experimentales y la recta por ajustar, considerando como variables a la pendiente m y la ordenada al origen b [3, 4]. Esto da como resultado un sistema de ecuaciones para dichas variables, a partir del cual se obtiene la solución:

$$m = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{21}$$

y

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \; . \tag{22}$$

En estas ecuaciones, N es el número de parejas de datos experimentales, con (x_i, y_i) las coordenadas del punto i. Estos parámetros, por haberse obtenido a partir de resultados experimentales, deben tener además una incertidumbre asociada. Ésta se puede evaluar a partir de las desviaciones entre los puntos experimentales y las predicciones de la recta caracterizada por los parámetros de las ecuaciones (21) y (22.) Así, se utilizaría un equivalente de la desviación estándar, S_y:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - b)^2}{N-2}} \ . \qquad (23)$$

Una vez calculada esta desviación estándar, se determinan las incertidumbres en la pendiente, S_m, y en la ordenada al origen, S_b, con las expresiones:

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}} \qquad (24)$$

y

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}} \ . \qquad (25)$$

Debe aclararse, además, que estas expresiones son válidas únicamente en el caso de que las incertidumbres de cada uno de los puntos experimentales sean iguales. No obstante, en el caso de una recta, la consideración de las incertidumbres distintas tanto en x como en y no presenta gran diferencia (puede consultarse la ref. [4] para una discusión al respecto.)

Como ejemplo de este procedimiento, se presentan los datos de un experimento en el cual se ha medido la resistencia eléctrica de una bobina de cobre como función de su temperatura. La tabla 3 muestra los datos, mientras que la tabla 4 contiene los resultados después de aplicar las ecs. (21)-(25). La figura 2 es una gráfica de los datos junto con la recta ajustada, con $N = 10$.

Tabla 3. Resistencia como función de la temperatura de una bobina de cobre.

R (Ω)	**T (°C)**
147.2 (1.7)	21 (0.5)
149.2 (1.7)	25 (0.5)
151.8 (1.7)	30 (0.5)
154.9 (1.8)	35 (0.5)
157.7 (1.8)	40 (0.5)
160.4 (1.8)	45 (0.5)
162.8 (1.8)	50 (0.5)
165.7 (1.9)	55 (0.5)
168.6 (1.9)	61 (0.5)
180.3 (1.9)	83 (0.5)

Tabla 4. Resultados en el cálculo con regresión lineal.

CANTIDAD	**ECUACIÓN**	**VALOR**
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	---	445 °C
$\sum_{i=1}^{N} x_i^2$	---	22951 (°C)^2
$\sum_{i=1}^{N} y_i$	---	1598.6 (Ω)
$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$	---	72825.7 (°C Ω)
m	(21)	0.5361 Ω/°C
b	(22)	136.00 Ω
S_y	(23)	0.22 Ω
S_m	(24)	0.004 Ω/°C
S_b	(25)	0.19 Ω

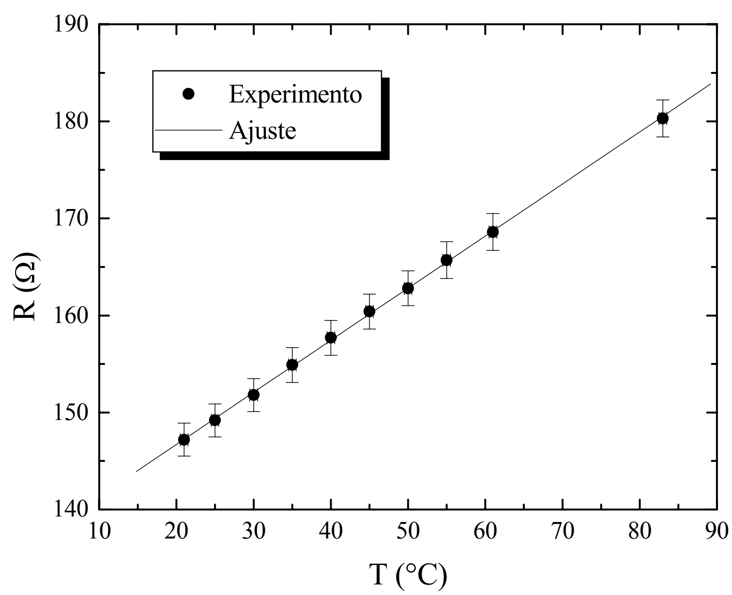

Figura 2. Resistencia de una bobina de cobre como función de su temperatura.

7. Cifras significativas

Como se ha dicho anteriormente, en la presentación de los resultados experimentales, es frecuente la necesidad de realizar operaciones con los números obtenidos. Pensando en las tecnologías actuales de cómputo y aún calculadoras de bolsillo, estas operaciones permiten efectuar cálculos que dan resultados con un gran número de cifras decimales. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que, normalmente, los instrumentos de medición no permiten tener resultados con la misma resolución que da una calculadora. Por tanto, es absurdo creer que el informe final de una medición puede incluir todas las cifras ofrecidas por el instrumento de cálculo. La situación se ve todavía más limitada por la existencia de la incertidumbre, como se explicó más arriba (final de la sección 4.) En resumen, no todas las cifras obtenidas en cálculos que involucran resultados de mediciones tienen sentido, es decir, *son significativas*. Es conveniente, por ello, seguir estas indicaciones para la presentación de los resultados:

- Sólo en situaciones específicas es conveniente escribir la incertidumbre con más de una cifra significativa;
- La última cifra significativa de un resultado escrito debe ser congruente con la incertidumbre (es decir, debe estar en la misma posición decimal);
- La incertidumbre relativa puede ser una guía para la selección del número de cifras significativas en el valor numérico de la cantidad, de acuerdo a la siguiente tabla:

Tabla 5. Correspondencia aproximada entre el número de cifras significativas e incertidumbres relativas.

	INCERTIDUMBRE RELATIVA	
NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS	**Intervalo**	**Aproximada**
1	10% a 100%	50%
2	1% a 10%	5%
3	0.1% a 1%	0.5%

La escritura correcta del número de cifras significativas es un factor que contribuye en gran medida a la calidad de presentación de un informe conteniendo resultados experimentales, por lo cual en ningún caso debe pasarse por alto.

Apéndice A. El Sistema Internacional de Unidades (SI)

Un trabajo de laboratorio correcto requiere de un manejo adecuado de las unidades de medición en las que se expresarán los resultados de la medición. Por ello, es necesario conocer apropiadamente un sistema de unidades que sea universalmente aceptado.
El Sistema Internacional de Unidades se estableció en 1960 por la 11ª Conferencia General sobre Pesos y Medidas (CGPM.) Abreviado universalmente como el SI, es el sistema métrico moderno de medición utilizado alrededor del mundo.
Las unidades del SI están divididas actualmente en dos categorías:

- Unidades básicas,
- Unidades derivadas,

Entre ellas forman lo que se conoce como un "sistema de unidades coherente." El SI también incluye prefijos para formar múltiplos y submúltiplos de las unidades del mismo SI.
La Tabla A1 presenta las siete cantidades básicas, supuestamente independientes entre sí, sobre las que se fundamenta el SI, al igual que los nombres y símbolos de sus respectivas unidades, llamadas las "Unidades básicas del SI." Las definiciones de dichas unidades básicas se presentan en la Tabla A2.

Tabla A1. Unidades básicas del SI

	UNIDAD BÁSICA DEL SI	
CANTIDAD BÁSICA	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	S
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mole	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Tabla A2. Definiciones de las unidades básicas del SI

UNIDAD	DEFINICIÓN
Metro	El metro es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en vacío durante un intervalo de tiempo igual a 1/299 792 458 de segundo.
Kilogramo	El kilogramo es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo.
Segundo	El segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición de dos niveles hiperfinos del estado base del átomo ^{133}Cs.
Ampere	El ampere es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita, con sección transversal circular ignorable, y situados 1 m aparte en el vacío, produciría entre esos conductores una fuerza igual a 2×10^{7} newton por cada metro de longitud.
Kelvin	El kelvin es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Mole	1. El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas unidades elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de ^{12}C. 2. Cuando se usa el mol, las entidades elementales se deben especificar, y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas, o grupos específicos de dichas partículas.
Candela	La candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática con frecuencia de 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de (1/683) watt por cada steradián.

Las unidades derivadas se expresan algebraicamente en términos de las unidades básicas o de otras unidades derivadas. Los símbolos para unidades derivadas se obtienen por medio de operaciones matemáticas de multiplicación y división. Por ejemplo, la unidad derivada para la cantidad derivada “masa molar” (masa dividida entre cantidad de sustancia) es el kilogramo sobre mol (con símbolo kg/mol.) Otros ejemplos se dan en las tablas A3 y A4.

Tabla A4. Ejemplos de unidades derivadas expresadas en términos de las unidades básicas del SI.

	UNIDAD DERIVADA DEL SI	
CANTIDAD DERIVADA	**Nombre**	**Símbolo**
Área	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Rapidez, velocidad	Metro sobre segundo	m/s
Aceleración	Metro sobre segundo al cuadrado	m/s^2
Número de onda	Inverso de metro	1/m
Densidad de masa (densidad)	Kilogramo sobre metro cúbico	kg/m^3
Volumen específico	Metro cúbico sobre kilogramo	m^3/kg
Densidad de corriente	Ampere sobre metro cuadrado	A/m^2
Intensidad de campo magnético	Ampere sobre metro	A/m
Concentración de cantidad de sustancia (concentración)	Mol sobre metro cúbico	mol/m^3
luminosidad	Candela sobre metro cuadrado	cd/m^2

Tabla A3. Unidades derivadas del SI con nombre y símbolos especiales.

	UNIDAD DERIVADA DEL SI			
CANTIDAD DERIVADA	**Nombre especial**	**Símbolo especial**	**Expresión en términos de otras unidades del SI**	**Expresión en términos de las unidades básicas del SI**
Ángulo plano	Radián	Rad		$m \cdot m^{-1} = 1$
Ángulo sólido	Steradián	sr		$m^2 \cdot m^{-2} = 1$
Frecuencia	Hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	Newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Presión, tensión	Pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Joule	J	N·m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potencia, flujo radiante	Watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Carga eléctrica	Coulomb	C		s·A
Potencial eléctrico, diferencia de potencial	Volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Capacitancia	Faraday	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Resistencia eléctrica	Ohm	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Conductancia eléctrica	Siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Flujo magnético	Weber	Wb	V·s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Densidad de flujo magnético	Tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	Henry	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Temperatura Celsius	Grado Celsius	°C		K
Flujo luminoso	Lumen	lm	cd·sr	cd·sr
Iluminancia	Lux	lx	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$

La tabla A5 presenta los prefijos usados en el SI para múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades del SI. Permiten la omisión de valores numéricos muy grandes o muy pequeños. Un prefijo se añade directamente al nombre de la unidad, y el símbolo del prefijo se anexa directamente al símbolo de una unidad. Por ejemplo, un kilómetro, símbolo 1 km, es igual a mil metros, símbolo 1000 m ó 10^3 m. Cuando se añaden los prefijos a las unidades del SI, las unidades así formadas se llaman múltiplos o submúltiplos de las unidades del SI, para distinguirlas del sistema coherente de unidades del SI.

Tabla A5. Prefijos del SI.

FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	Yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	Zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	Atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	Femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	Pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	Micro	µ
10^{3}	kilo	k[a]	10^{-3}	Mili	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	Centi	c
10^{1}	deca	da	10^{-1}	Deci	d

[a] Es importante recalcar que el prefijo de kilo es k minúscula, no mayúscula.

Existen además otras unidades fuera del SI que son aceptables en cuanto a su uso, pues son esenciales y empleadas muy ampliamente. La tabla A6 presenta dichas unidades.

Tabla A6. Unidades aceptadas para su uso en el SI.

NOMBRE	SÍMBOLO	VALOR EN UNIDADES DEL SI
Minuto[a]	min	1 min = 60 s
Hora[a]	h	1 h = 60 min = 3600 s
Día[a]	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Grado[b]	°	$1° = (\pi/180)$ rad
Minuto[b]	'	$1' = (1/60)° = (\pi/10\ 800)$ rad
Segundo[b]	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\ 000)$ rad
Litro	L[c]	$1\ L = 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$
Tonelada métrica	T	$1\ t = 10^3$ kg
Electronvolt	eV	$1\ eV = 1.602\ 177\ 33 \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica unificada	u	$1\ u = 1.660\ 540\ 2 \times 10^{-27}$ kg

[a] Tiempo
[b] Ángulo plano
[c] Se adoptó este símbolo alternativo para evitar confusiones con la *l* minúscula.

Descripciones más amplias sobre el uso y la escritura del SI se pueden encontrar en la obra de Taylor [5].

Apéndice B. Vocabulario

Cantidad (mensurable): atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que se puede distinguir cualitativamente y determinar cuantitativamente
Unidad (de medición): cantidad particular, definida y adoptada por convención, con la cual otras cantidades de la misma clase se comparan con el fin de expresar sus magnitudes relativas a esa cantidad.
Sistema de unidades (de medición): conjunto de unidades básicas, junto con unidades derivadas, definidas de acuerdo con reglas dadas, para un sistema de cantidades dado.
Valor de una cantidad: magnitud de una cantidad particular, expresada generalmente como una unidad de medición multiplicada por un número.
Valor real (de una cantidad): valor consistente con la definición de una cantidad particular dada.
Valor convencionalmente real: valor atribuido a una cantidad particular y aceptado, a veces por convención, que tiene una incertidumbre apropiada para un propósito dado.
Valor numérico (de una cantidad): cociente del valor de una cantidad y la unidad usada en su expresión.
Medición: conjunto de operaciones que tienen el objeto de determinar el valor de una cantidad.
Mensurando: cantidad particular sujeta a medición.
Resultado de una medición: Valor atribuido a un mensurando, obtenido por la medición.
Indicación (de un instrumento de medición): valor de una cantidad ofrecido por un instrumento de medición.
Exactitud de una medición: Cercanía del acuerdo entre el resultado de una medición y el valor real del mensurando.
Repetibilidad (de resultados de mediciones): Cercanía del acuerdo entre los resultados de mediciones sucesivas del mismo mensurando bajo las mismas condiciones de medición.
Reproducibilidad: Cercanía del acuerdo entre los resultados de mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo distintas condiciones de medición.
Error (de medición): Resultado de una medición menos el valor real del mensurando.
Desviación: Valor menos su valor de referencia.
Error relativo: Error de medición dividido entre el valor real del mensurando.
Error aleatorio: resultado de una medición menos la media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo condiciones de repetibilidad.
Error sistemático: media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo condiciones de repetibilidad menos el valor real del mensurando.

Apéndice C. La presentación del informe de laboratorio

El informe de laboratorio es la parte final del trabajo experimental[1]. De nada sirve la realización de un experimento de calidad si los resultados no se dan a conocer de una manera adecuada. Desafortunadamente, no ha sido raro observar trabajos en los cuales los datos son de importancia en algún área, pero cuya presentación es tan pobre que obscurece la comprensión de lo que el autor quiso decir, o bien no ha sido capaz de transmitir a los lectores la trascendencia de sus resultados. Por otra parte, con frecuencia se omiten detalles tanto del experimento como del tratamiento e interpretación de los datos, impidiendo a algún otro científico la reproducción del experimento. La habilidad para escribir un informe de laboratorio de alta calidad sólo se adquiere con la práctica y un fuerte sentido autocrítico.

La publicación de informes no está limitada al ámbito científico, a través de artículos en revistas. En casi cualquier organización existe la necesidad de dar a conocer los resultados de las labores realizadas en un cierto período, por ejemplo, o con relación a un proceso. Más aún, la nueva tendencia hacia el desarrollo de sistemas de calidad (siguiendo las normas ISO 9000 e ISO 14000), exige la presentación de informes, tanto de la organización interesada como del organismo evaluador. El trámite de patentes debe estar fundamentado en un informe sumamente detallado sobre las características y el desempeño del objeto o método. No es de extrañar, pues, que la estructura de cada tipo de informe sea distinta, dependiendo del objetivo al cual está enfocado.

Cuando va a escribirse un documento de este tipo es indispensable tener en cuenta la clase de lectores que tendrá acceso a él. No puede utilizarse el mismo lenguaje en un artículo de divulgación que en uno de una revista científica especializada, y lo mismo puede decirse de un informe para un sistema de calidad o la obtención de una patente. Posiblemente, la redacción de un informe como un artículo científico es una de las maneras más didácticas para alcanzar una disciplina en este aspecto. La experiencia ha probado, por otro lado, que cuando los estudiantes prestan la debida atención a la escritura de sus informes en laboratorios de enseñanza, encuentran sencilla la presentación de informes dentro de su práctica profesional o en la redacción de sus tesis. Por tanto, en este capítulo nos abocaremos a la descripción de un informe de laboratorio en esta forma, considerando que los experimentos y resultados conseguidos en un laboratorio de enseñanza rara vez son originales.

Información previa

Para comenzar a escribir el informe es necesario contar con cierta información obtenida anteriormente. En general, se compone de los siguientes elementos:

1. Referencias bibliográficas en las cuales se fundamenta el trabajo. Mientras que en un artículo de investigación no debieran repetirse los resultados obtenidos por otros investigadores, en el informe de un laboratorio de enseñanza es más práctico contar con libros donde se describan los principios teóricos y los dispositivos utilizados. Si es necesario, han de tenerse tablas o libros donde se dan los valores convencionalmente

[1] Es común referirse a un informe de laboratorio como un “reporte.” Sin embargo, la norma oficial mexicana NOM Z-13 establece claramente que el término adecuado es “informe.”

reales de la(s) cantidad(es) medidas en el experimento. Es posible, además, recurrir a otros medios, como son enciclopedias computarizadas o la Internet.

2. La bitácora de laboratorio, donde se han registrado todos los datos y se ha efectuado el tratamiento. Hay que tener presente que, actualmente, muchos de los resultados ya se encuentran en medios distintos al papel, y sería poco práctico (y antiecológico) imprimirlos. Esto es especialmente aplicable a los resultados del tratamiento de los datos originales, dado que ya es común el uso de hojas de cálculo y programas de graficación en el análisis de experimentos. Además, numerosos instrumentos de medición están ya incorporados a computadoras.

Una vez que se tiene toda esta información, es posible proceder a la escritura misma del informe.

Redacción del informe

Los informes deberán estar escritos en un lenguaje sencillo y directo, utilizando frases cortas, pues esto facilita su comprensión. Es recomendable utilizar el modo impersonal ("se midió el tiempo que tarda un móvil en recorrer cierta distancia"), en vez de la primera persona, Esto, no obstante, no es preciso tomarlo como una regla rígida, pues en ocasiones un lenguaje más familiar es conveniente. Ha de cuidarse, además, de no mezclar los tiempos en las conjugaciones verbales (presente con pretérito, por ejemplo).

La utilización adecuada del castellano es un punto que no puede soslayarse. El desarrollo de la tecnología, en general por culturas cuyo idioma no es el castellano, ha influido enormemente a la lengua. Si bien es cierto que los idiomas sufren transformaciones continuamente, también lo es que no pueden alterarse hasta el grado de decir o escribir expresiones sin sentido por ignorar el significado de los vocablos tanto en castellano como en inglés. Así pues, no es extraño en la actualidad oír hablar en el área de computación acerca de "librerías" de programas, intentando traducir del inglés *libraries*. Esta palabra en realidad significa "bibliotecas." Otras traducciones llegan a ser grotescas[2]. Por esto, la Norma Oficial Mexicana **NOM Z-13**, del año 1977 [1], señala algunos términos técnicos mal empleados y establece la manera correcta de escribirlos. La tabla 1 presenta los más importantes.

[2]En una ocasión, uno de los autores sostuvo una discusión con algún científico por la traducción directa del vocablo inglés *deposition* (depósito en castellano), al escribirlo como "deposición." Se recomienda al lector, al menos por diversión, consultar este último concepto en un diccionario.

Tabla C1. Barbarismos y términos correctos establecidos por la norma NOM Z-13

Barbarismo	*Término correcto*	*Barbarismo*	*Término correcto*
Switch	Interruptor	Wattaje	Potencia, consumo, disipación
Baipaseado	Puenteado	Amperaje	Corriente
Reporte	Informe	Voltaje	Tensión, diferencia de potencial
Flambeo	Pandeo	Ciclaje	Frecuencia
Flange	Brida	Cubicaje	Volumen
Checar	Verificar, inspeccionar	Kilometraje	Distancia en km
Dial	Cuadrante, escala	Clutch	Embrague
Foco	Lámpara	Claxon	Bocina
Llanta	Neumático	Bulbo	Válvula electrónica
Cran	Manivela	Pija	Tornillo autorroscante

El manejo adecuado del vocabulario metrológico es fundamental. No es conveniente, como se explicó en capítulos anteriores, confundir términos como "exactitud" y "precisión," "error" e "incertidumbre," etc. Además, debe tenerse cuidado al usar términos que coloquialmente tienen un significado, mientras que en la metrología tienen otro o no existen.

Debe hacerse una revisión de la ortografía. Es imperdonable que un estudiante universitario (y no se diga de un profesional en una área técnica o científica) no sea capaz de conocer las reglas ortográficas básicas del idioma en que normalmente se expresa. El consabido pretexto “es que nunca aprendí cómo escribir los acentos” es inaceptable en un estudiante que, en principio, sí fue capaz de aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir, y terminar un bachillerato. Además, debe haber un conocimiento del uso de los signos de puntuación.

Partes del informe

El informe, para poseer una secuencia lógica, debe mantener una estructura que lleve al lector paso a paso, con el fin de conocer la naturaleza del trabajo y la calidad de los resultados alcanzados. Para ello, es recomendable incluir en el informe las siguientes partes:

- Título
- Autor(es)
- Resumen
- Introducción
- Desarrollo experimental
- Resultados
- Discusión
- Conclusiones
- Bibliografía

A continuación se describirán las características que cada una de estas secciones debe tener.

Título
El título del informe debe corresponder con el tema del experimento realizado, y ser lo suficientemente descriptivo como para que el lector pueda entender cuál es dicho tema. Un título adecuado puede atraer la atención de los lectores hacia el experimento. En lo que se refiere a su longitud, puede contener tantas palabras como sea necesario, aunque existen revistas científicas que limitan el número de caracteres en el título. En los informes presentados por los estudiantes, sin embargo, es más conveniente conservarlo en un máximo de cerca de diez palabras.

Autores
Desde luego, es fundamental incluir el nombre de las personas que participaron en la ejecución del experimento o que contribuyeron al análisis e interpretación de los resultados. Además, se incluye la *adscripción* de los autores (la institución donde trabajan y su domicilio).

En lo referente a los autores, debe tenerse en cuenta que sólo han de incluirse como coautores, sin omitir uno solo, a quienes colaboraron realmente. Desafortunadamente, no es raro encontrar en las listas de autores de un artículo científico personas que, sólo por ostentar un cargo o administrar un laboratorio, se creen acreedores a una coautoría. Éste es un aspecto de ética profesional que pocas veces se menciona en los cursos de las ciencias experimentales.

Resumen
Ésta es una sección que no debe olvidarse. El resumen es un párrafo de alrededor de diez renglones, en el cual se menciona cuál es el objetivo del trabajo, qué método experimental se utilizó, y si los resultados obtenidos fueron buenos o no, sin llegar a presentar tablas o gráficas. Normalmente, en el resumen no se escriben ecuaciones.

La escritura apropiada del resumen es importante, porque con él un lector puede decidir si la lectura del resto del informe le será útil o no. De hecho, existen revistas internacionales (como el *Chemical Abstracts,* el *Physics Abstracts* o el *Physics Briefs*), donde sólo se dan a conocer los resúmenes de los artículos científicos que se han publicado durante cierto período, clasificándolos por temas. Un resumen mal presentado puede hacer que el artículo jamás sea consultado.

Introducción
En esta sección se presentará específicamente el objetivo que se persigue al realizar el trabajo[3]. Para complementar esto frecuentemente se hace una justificación del experimento, refiriéndose a trabajos efectuados previamente, ya sea por el mismo autor o por otros. En la investigación este punto es fundamental, pues es aquí donde se establece la originalidad de los resultados. Tratándose de laboratorios de enseñanza, la originalidad no es

---

[3]Es necesario recalcar que en un artículo científico no existe una sección que lleve por título "Objetivo," por lo cual es conveniente adquirir la costumbre de no hacerlo en los informes universitarios.

indispensable, si bien es conveniente presentar algún resumen histórico sobre el problema de que se trata en el informe.

En la introducción también se escribirá la teoría necesaria para describir los resultados o realizar predicciones. La teoría que se incluya debe ser suficiente para entender el resto del informe y no contener información que no se utilizará más adelante.

No es aconsejable escribir las ecuaciones dentro de los párrafos, pues esto las hace confusas, sino en renglones separados, si bien en algunos casos puede hacerse por claridad en la explicación. Cada vez que se escriba una ecuación es preciso dar el significado de cada uno de los símbolos que aparecen por primera vez en el escrito. Es conveniente añadir a las figuras un "pie," que las describa apropiadamente. Las figuras deben aparecer cerca del párrafo en el que se hace referencia a ellas por primera ocasión. Un detalle útil en la presentación de la teoría es la numeración de las ecuaciones y las figuras, puesto que así se facilita el referirse a ellas más adelante dentro del mismo informe.

Desarrollo experimental

El desarrollo experimental consiste esencialmente de tres partes: la descripción del dispositivo experimental, la explicación clara y detallada del método que se siguió para efectuar las mediciones, y las ecuaciones relacionadas con el tratamiento de los datos experimentales.

En la descripción del dispositivo es conveniente usar un diagrama, desde el cual puede basarse la explicación de su funcionamiento. Aunque suena trillado, es muy cierto aquello de que "una imagen dice más que mil palabras." Al observar el diagrama, es más fácil tanto para la persona que escribe el informe como para el lector entender el funcionamiento del dispositivo. En esta descripción es necesario decir cuáles son las características de los instrumentos de medición empleados (por ejemplo, "un flexómetro marca *Acme* con una resolución de 1 mm"), estableciendo claramente cuál es la incertidumbre con la que contribuye cada uno de ellos. Es importante también notar que **por ninguna razón** se han de escribir en esta sección “listas de material,” correspondiendo éstas a formatos inadecuados para un artículo científico o informe técnico.

La descripción del dispositivo de ninguna manera implica la forma en que se hicieron las mediciones. Por tanto, es conveniente explicar este procedimiento. Aquí debe decirse cuáles son los mensurandos en el experimento, señalando explícitamente las variables independientes y las dependientes. Ha de mencionarse cómo se cambiaron dichas variables independientes y por qué se hizo así, sin olvidar mencionar cuántas veces se midió cada uno de los mensurandos.

En esta parte, además, es necesario establecer claramente cuáles son las precauciones y medidas de seguridad que se siguieron durante la realización del experimento. Si algún lector está interesado en reproducirlo, sin duda tendrá que adoptar dichas precauciones también.

A continuación se explicará el tratamiento que se dará a los datos obtenidos. Por ejemplo, pueden calcularse medias (con sus respectivas desviaciones típicas), o tal vez será necesario efectuar el ajuste de una curva a los datos. Siempre habrán de escribirse ecuaciones que describan los modelos buscados y relacionen sus parámetros con las variables presentadas en la introducción. Un ejemplo típico es el experimento de la *Ley de Ohm*. En este caso se efectúan mediciones de la diferencia de potencial (V) y de la intensidad de corriente (I) que pasa por una resistencia. Al construir una gráfica de V en función de I, la pendiente m de la recta obtenida con un ajuste hecho con cuadrados mínimos (cuya ecuación sería $V = mI + b$) se interpreta como el valor de la resistencia, R. La ley de Ohm presentada en la introducción ya debiera haber establecido la ecuación $V= RI$. Esta relación entre ambas secciones del informe debe darse **explícitamente**. No hacerlo obscurece por completo el sentido del experimento.

En ocasiones es útil en esta sección explicar cómo se calcularán las incertidumbres en los resultados de las mediciones finales, aunque también es posible hacerlo en un apéndice al final del informe, para mantener la secuencia lógica en su lectura.

Resultados

En esta sección debe pensarse cuidadosamente cuál es la mejor forma de escribir los resultados. Pueden ser tablas, gráficas, o sólo un resultado numérico. En una artículo científico no debe darse la información de manera duplicada (por ejemplo, una tabla con los datos que posteriormente aparecen en una gráfica), aunque en los laboratorios de enseñanza sí es conveniente, pues así el evaluador puede advertir si el estudiante cometió alguna equivocación al graficar sus datos.

Cuando en el experimento se obtuvieron tablas, si éstas son largas, es mejor escribirlas en un apéndice al final del informe, para no distraer la atención del lector. Además, **debe incluirse en cada dato la incertidumbre experimental**, pues hay que recordar que una medición sin dicha incertidumbre no tiene sentido alguno. Lo mismo sucede con las unidades de cada dato obtenido y presentado, las cuales además deben ser las correctas, y congruentes entre ellas. Las tablas, al igual que las ecuaciones y las figuras, tendrán una numeración, y además un título.

En el caso de las gráficas, no puede olvidarse graficar la incertidumbre, y en caso de que sea muy pequeña como para apreciarla en la figura, es necesario mencionar este hecho **explícitamente** en el texto o el pie de la figura. También hay que revisar la presencia de las escalas, el título de los ejes y las unidades. Cuando se hagan ajustes de rectas u otro tipo de curvas, es indispensable escribir **en el texto** la ecuación obtenida, sin omitir la incertidumbre en los parámetros calculados (como pudiera ser pendiente y ordenada al origen en una recta). Las gráficas llevan una numeración secuencial y un título que las describa. En un informe de laboratorio de enseñanza no es apropiado colocar las gráficas hasta el final.

Finalmente, la escritura de un solo resultado (por ejemplo, la aceleración de la gravedad), se escribirá en un renglón separado, sin descuidar la presencia de la incertidumbre y las unidades.

En todas estas situaciones hay que recordar que los resultados se escriben con el número de cifras significativas correcto.

Debe notarse, también, que la sección de resultados del informe no es el sitio adecuado para rellenar con todos los cálculos aritméticos usados para obtener el dato final. Esto debe mantenerse en la bitácora, pues al lector, en general, no le interesarán todos estos números. Su presencia sólo obscurece las cantidades centrales en el informe, y sólo en casos excepcionalmente necesarios se pueden incluir dentro de un apéndice.

Discusión.
Una vez que se han presentado los resultados, debe incluirse la sección correspondiente a la discusión. En ésta, se habrán de comparar los resultados con lo que se esperaba teóricamente, con datos de valores aceptados (convencionalmente reales) tomados de tablas o textos, o de otros procedimientos dentro de la misma práctica. Esta parte es una de las más importantes, pues es aquí donde se interpretan los resultados del experimento. La evaluación de dichos resultados frecuentemente se basa en cálculos de los errores porcentuales, que dan una idea más clara de su magnitud.

En este punto cobra gran importancia la incertidumbre experimental. La comparación de un cálculo teórico o valor convencionalmente real se facilita cuando existe un intervalo dentro del cual puede caer esta magnitud. También se debe mencionar si realmente las mediciones fueron precisas, es decir, si la incertidumbre relativa es pequeña o tan grande que realmente no puede llegarse a ninguna conclusión.

Cuando los resultados no corresponden a lo esperado, la explicación de por qué sucedió así demuestra una comprensión de lo que se efectuó experimentalmente, o bien que pudo haber equivocaciones en el tratamiento de los datos.

De nuevo es oportuno hablar aquí sobre la ética de un experimentador. Cuando los resultados no son buenos, existe indudablemente la "tentación" de modificarlos o manipularlos para que correspondan a las predicciones teóricas o los valores convencionalmente reales. Esto es cierto tanto para los investigadores (porque deben presentar un trabajo que pueda publicarse en una revista científica con arbitraje, o de lo contrario no percibirán estímulos económicos o académicos), como para los estudiantes (pues entonces no obtienen la calificación que desean o bien no dejan al profesor satisfecho con su trabajo). En realidad, el experimentador tiene **por ética** que escribir los resultados que obtuvo. No existe justificación a una actitud contraria.

Conclusiones
Las conclusiones, finalmente, indicarán si el experimento fue bueno o no, es decir, si se cumplieron los objetivos planteados originalmente. Puede decirse si el procedimiento experimental es el más apropiado para alcanzar dichos objetivos, o si existen propuestas para realizarlo mejor. Esta sección no es un "departamento de quejas," donde se dice "el experimento no me salió bien porque el equipo está muy dañado" o cosas similares. Más aún, en el nivel de un estudiante universitario, pueden decirse cosas más profundas que "la práctica fue muy bonita y aprendí mucho."

Para las conclusiones de un informe científico no existen reglas en cuanto a su extensión. Podrían limitarse a una sola frase, o bien a toda una serie de enunciados, dependiendo del tipo de experimento. Sin embargo, quien escribe el informe debe darse cuenta que no es necesario escribir páginas y páginas para que se crea en el valor de su trabajo. Por otro lado, no deben escribirse conclusiones sobre algo que no se hizo en el experimento. Desgraciadamente, no es raro encontrarse como conclusión frases como "la resistencia tuvo una temperatura elevada," cuando lo que se trataba de demostrar era la relación lineal entre diferencia de potencial e intensidad de corriente en dicha resistencia.

Bibliografía
No debe omitirse la bibliografía (generalmente libros, en este nivel). En las Universidades de alto nivel se considera plagio el hecho de no presentar en esta sección alguna de las referencias consultadas. Más aún, muchos de los desarrollos matemáticos presentados en la Introducción pueden verse con mayor detalle en alguna de las referencias, por lo cual resalta la conveniencia de la bibliografía.

Típicamente, el formato para dar la referencia de un libro es: Autor (es), *título del libro* (editorial, ciudad de publicación, año de publicación), páginas consultadas. Es útil enumerar las referencias, para poder citarlas en el texto. Para un artículo, se recomienda escribir la cita así: Autor (es), *título del artículo*, nombre de la revista, **volumen**, (año), páginas.

Aspecto del informe
Es posible que un informe con una excelente realización experimental, un buen análisis y magníficas discusión y conclusiones, quede arruinado por su aspecto. En la actualidad, con el desarrollo de los procesadores de texto y una cada vez mayor posibilidad de acceso a equipos de cómputo por parte tanto de estudiantes como de profesionales, el aspecto de un informe puede tener una alta calidad. La limpieza, orden y claridad con que se presente el informe pueden ser factores que decidan, por ejemplo, si un aspirante a un empleo es merecedor de él o si un manuscrito es aceptable para publicación.

Tomando en cuenta el uso de procesadores de texto, hay algunas recomendaciones con relación al tipo de letra que conviene usar en diferentes casos. La tabla 2 muestra dichas sugerencias.

Tabla C2. Recomendaciones para tipos de letra a usar en un informe de laboratorio.

Texto	*Tipo de letra*	*Ejemplo*
Títulos	Letra sin patín (*sans serif*)	**Título**
Textos largos	Letra con patín	Texto
Unidades	Letra con patín normal	cm
Símbolos de cantidades	Letra cursiva	*A*
Vectores	Letra negrita	**A**
Símbolos para tensores	Letra sin patín, negrita y cursiva	***T***
Matrices	Letra cursiva	*M*
Símbolos de elementos	Letra con patín normal	Cu

Para evitar confusiones con números cuyos valores absolutos son menores que uno, es aconsejable escribir un cero antes del punto decimal (por ejemplo, 0.25 en vez de .25). Igualmente útil es escribir una cruz (×) en lugar de un punto (·) cuando se trate de multiplicaciones (como en la notación científica, 5×10^3).

En las situaciones en las cuales es imposible el acceso a equipo de cómputo, deberá tenerse en cuenta el uso de máquinas de escribir, o un esfuerzo por presentar los informes manuscritos con una letra clara y legible.

Al terminar de escribir cada uno de los informes que se van a presentar, es conveniente hacer la revisión de **todos** los puntos descritos más arriba, si es necesario releyendo este capítulo. Si bien esto implica mayor esfuerzo, el trabajo sin duda a la larga mejorará su calidad, y se creará la costumbre de escribir los informes con un formato coherente y acorde con la formación profesional que se adquirió en la Universidad.

Apéndice D. Ejemplo de un informe

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA ESFERA

Javier Miranda
Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
04510 México, D.F.

Resumen

El presente experimento tiene como finalidad demostrar que el campo eléctrico producido por una esfera cargada es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia al centro de dicha esfera. Para ello se hicieron mediciones de la diferencia de potencial inducida en un conductor aislado, la cual es proporcional a la carga transferida a él por otro pequeño cilindro conductor sobre el cual la esfera indujo una carga. Esta última carga, a su vez, es directamente proporcional al campo eléctrico existente en el punto donde se situó el cilindro. Por ello, al construir gráficas log-log de la diferencia de potencial medida como función de la distancia del cilindro al centro de la esfera, se pudo observar si la variación corresponde a una dependencia con el inverso del cuadrado de dicha distancia. Se encontró que, al medir para varias tensiones en la esfera (3.0 kV, 4.0 kV y 4.5 kV), el promedio de las pendientes de las rectas ajustadas es –2.4 (0.3), excluyendo el valor esperado –2 del intervalo de incertidumbre, teniendo un error del 20%.

1. Introducción

En el espacio puede tenerse una carga q, la cual va a influir en el medio en que se encuentra. Si a la vez se coloca una carga de prueba q_0 (una carga de prueba es una carga positiva tan pequeña como se quiera), aparecerá una fuerza coulombiana entre ambas cargas. Se define entonces el campo eléctrico **E** producido por la carga q como:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_\mathbf{r} \, , \qquad (1)$$

en donde **F** es la fuerza coulombiana entre q y q_0, y $\mathbf{u}_\mathrm{r}$ es el vector unitario de posición de q a q_0.

Como puede verse, **E** es una magnitud vectorial, cuya dirección y sentido son los mismos que los de la fuerza sobre una carga positiva.

Ahora bien, si en vez de tener una carga puntual, se cuenta con una distribución de cargas puntuales, finita, es posible, lo mismo que en el caso de la fuerza, sumar vectorialmente el campo eléctrico debido a cada carga para obtener el campo total en un punto determinado. Esto es:

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_\mathbf{r} \qquad (2)$$

Cuando la distribución se transforma en continua, como sería el caso de un cuerpo cargado, la suma se convierte entonces en una integral:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\mathbf{u_r}\ . \qquad (3)$$

Puede introducirse ahora el concepto de flujo de campo eléctrico. En general, el flujo de campo Φ se define como:

$$\Phi = \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}\,, \qquad (4)$$

en la que **V** es el vector de campo y d**s** es el vector de un elemento diferencial de superficie. Para una superficie cerrada, el flujo de campo viene dado por

$$\Phi = \oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} \qquad (5)$$

y para el caso del campo eléctrico se tiene:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (6)$$

en una superficie cerrada.

Si se considera a continuación una carga puntual q, y se calcula el campo eléctrico en una esfera de radio r y con centro en la carga:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u_r}\ . \qquad (7)$$

El vector d**s** coincide en dirección con **E**, por lo que el ángulo θ entre ellos es 0° y cos θ=1. Por tanto, **E**·d**s** = Eds. De aquí, el flujo eléctrico es:

$$\Phi_E = \oint Eds = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint ds\ . \qquad (8)$$

Pero esta integral es la superficie de la esfera, $4\pi r$. Entonces:

$$\Phi_E = \oint Eds = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi\,r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\ . \qquad (9)$$

Se tiene de este resultado que el flujo depende sólo de la carga. Al extender a una superficie cualquiera, resulta:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint E\cos\theta\, ds = \oint \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\cos\theta\, ds\,\frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\oint\frac{\cos\theta\, ds}{r^2}\ . \qquad (10)$$

Pero cos $\theta\, ds/r^2$ es el ángulo sólido subtendido por el elemento ds. Como el ángulo sólido total alrededor de un punto es 4π, se sigue:

$$\Phi_E = \oint Eds = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}\ . \qquad (11)$$

Este último resultado se conoce como *Ley de Gauss*, y es de gran importancia, puesto que es una de las ecuaciones de Maxwell, trascendentes en el electromagnetismo clásico.

Utilizando este resultado, se puede cuantificar la variación del campo eléctrico alrededor de una esfera cargada, de la siguiente manera:

Se encierra la esfera en otra de mayor radio y concéntrica con la primera, de acuerdo a lo que muestra la figura 1. Es posible utilizar dicha esfera como superficie gaussiana. Resulta entonces:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}\ . \qquad (12)$$

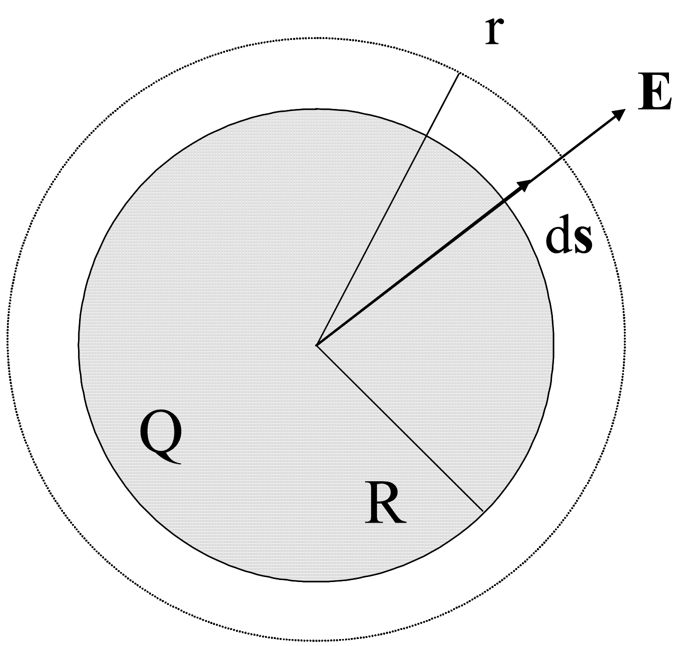

Figura 1. Geometría para el cálculo del campo eléctrico producido por una esfera cargada. *Q* es la carga, *R* es el radio de la esfera, **E** es el campo eléctrico, *r* es el radio de la esfera gaussiana y *d***s** es el elemento diferencial de superficie de la esfera.

El campo en cada punto exterior de la esfera es el mismo, y el ángulo entre **E** y *d***s** es 0°, por lo que **E***d***s** = Eds, y además

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E\oint ds = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{13}$$

La integral es el área de la esfera, $4\pi r^2$. Por tanto:

$$E\oint ds = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{14}$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{15}$$

Esto indica que el campo eléctrico de una esfera cargada equivale al de una carga puntual del mismo valor en el centro de la esfera.

Con el experimento se trata de demostrar que el campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera, tal como lo indica el resultado teórico.

2. Desarrollo experimental

Se hace el montaje del dispositivo de acuerdo a como lo muestra la figura 2. En ella, se tiene una esfera metálica (de diámetro 12.8 (0.1) cm), sostenida por una barra de acrílico, por lo cual se mantiene aislada eléctricamente. La esfera está conectada a una fuente de alta tensión (marca *Cenco*, de 0 a 5 kV, corriente directa). La diferencia de potencial producida por la fuente se mide con un multímetro marca Phillips, conectada a una sonda de alta

tensión, que en total da una incertidumbre de 4%; con la sonda, la resolución es de 50 V. Separadamente, en el interior de una jaula de Faraday (conectada a tierra) se coloca una canastilla metálica, también aislada de la jaula por medio de un soporte de acrílico. Dicha canastilla se conecta a un electrómetro (marca Keithley, modelo 610C), el cual ofrece una incertidumbre de 1% sobre el intervalo total en el cual se está midiendo, por medio de un cable coaxial que atraviesa la jaula de Faraday. La resolución depende del intervalo usado.
Radialmente desde el centro de la esfera se extiende un hilo de seda, horizontal, fijo en el otro extremo a un soporte universal. Junto al hilo se colocan dos cilindros metálicos, de aproximadamente 1 cm de longitud y 1 cm de diámetro, sostenidos por sendas varillas de Teflon. El hilo sirve para situar los cilindros en la dirección radial, y la distancia al borde de la esfera se mide con un flexómetro, cuya resolución es de 0.1 cm. Los cilindros se unen por una de sus caras, poniéndolos a la distancia a la cual se quiere evaluar el campo eléctrico de la esfera. Éste produce una polarización en los cilindros, haciendo que un lado quede cargado positivamente y el otro negativamente al momento de apartarlos; el valor de la carga es proporcional al campo eléctrico. Los cilindros, separadamente, se ponen en contacto con la canastilla, transfiriéndoles parte de la carga y causando una diferencia de potencial medible con el electrómetro. Esta diferencia de potencial es también proporcional a la carga transferida, resultando que, por transitividad, el potencial es proporcional al campo eléctrico de la esfera.

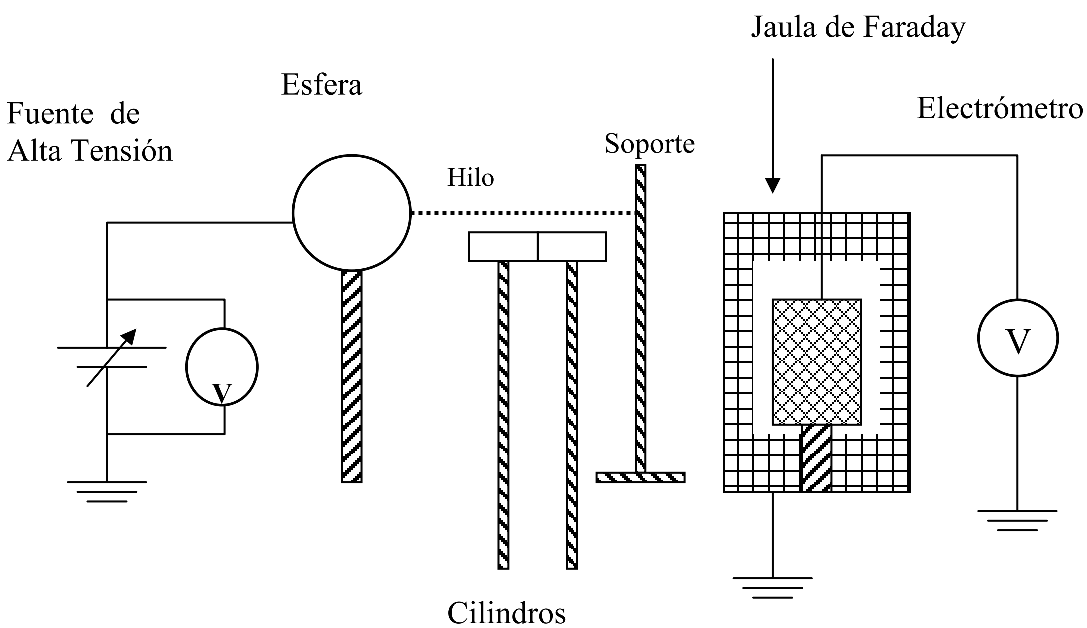

Figura 2. Diagrama del dispositivo experimental.

Al experimentar, se tiene cuidado de separar los cilindros estando aún dentro del campo por medir, pues podría entonces tenerse la polarización debida a otro campo. También se evita el contacto de los cilindros con la jaula exterior, porque pueden perder su carga. Desde luego, debe aterrizarse la canastilla (a través del electrómetro) antes de cargarla con el cilindro de carga con signo opuesto.

Además, hay que cuidar que quien experimenta no tenga carga electrostática que afecte las mediciones.
Después de cada medición, los cilindros metálicos se descargan, poniéndolos en contacto con la Jaula de Faraday, aterrizando también el electrómetro para descargar la canastilla. Más aún, los cilindros de Teflon se flamean con un mechero de alcohol, para eliminar la carga electrostática que pudiera haberse acumulado en ellos durante el proceso, y que puede alterar gravemente las mediciones. Lo mismo se ha hecho con los soportes aislantes de la esfera y la canastilla, pero sólo al principio.
Se hicieron mediciones para distancias entre 10 cm y 50 cm desde el borde de la esfera, en pasos de 5 cm, pues a distancias mayores el campo no es efectivo, y en promedio diez mediciones para cada distancia. Además, se usaron los dos cilindros, pues se espera que la carga sea semejante en valor absoluto, aunque con signo opuesto. Se utilizaron tres tensiones diferentes para la esfera (3000 (120) V, 4000 (160) V y 4500 (180) V). Cabe señalar que, a causa de la gran dificultad para realizar las mediciones, fue necesario emplear tres sesiones de trabajo de tres horas cada una, hasta completar el experimento.
Para cada lote de datos se construyen gráficas con escalas lineales, de la diferencia potencial en la canastilla medida con el electrómetro como función de la distancia al centro de la esfera. Se procede entonces a graficar en escalas logarítmicas, haciendo el ajuste por mínimos cuadrados de estos resultados. Es decir, debe ajustarse la función

$$V_c = br^n, \tag{16}$$

ecuación en que V_c es la diferencia de potencial medida en la canastilla con el electrómetro, b es la ordenada al origen de la recta obtenida en el ajuste log-log, n es la pendiente de la recta y r es la distancia al centro de la esfera. Debe recordarse que la teoría, según la ec. (15), predice un comportamiento proporcional a r^n, donde n = -2.

3. Resultados

La tabla 1 muestra los resultados de los promedios de las diferencias de potencial V_c medidas para cada distancia y cada tensión en la esfera.
La figuras 3 muestra las gráficas lineales de V_c en función de r para cada caso, mientras que la figura 4 presenta las gráficas log-log correspondientes.

Tabla 1. Diferencias de potencial medida en la canastilla para cada distancia al centro de la esfera.

Tensión en la esfera (V)	Distancia al centro de la esfera (cm)	Diferencia de potencial V_c* (V)	
		Positiva	Negativa
3000 (120)	16.4 (0.1)	1.27 (0.05)	1.32 (0.05)
	21.4 (0.1)	0.57 (0.03)	0.56 (0.03)
	26.4 (0.1)	0.42 (0.03)	0.36 (0.03)
	31.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.25 (0.01)
	36.4 (0.1)	0.17 (0.01)	0.17 (0.01)
	41.4 (0.1)	0.15 (0.01)	0.12 (0.01)
	46.4 (0.1)	0.11 (0.1)	0.07 (0.01)
4000 (160)	16.4 (0.1)	1.03 (0.03)	2.60 (0.01)
	26.4 (0.1)	0.98 (0.03)	1.10 (0.01)
	36.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.30 (0.01)
	46.4 (0.1)	0.13 (0.01)	0.20 (0.01)
	56.4 (0.1)	0.05 (0.001)	0.04 (0.001)
4500 (180)	16.4 (0.1)	1.31 (0.04)	0.96 (0.04)
	21.5 (0.1)	0.84 (0.04)	0.66 (0.04)
	26.4 (0.1)	0.58 (0.04)	0.57 (0.04)
	31.4 (0.1)	0.50 (0.04)	0.43 (0.04)
	36.4 (0.1)	0.24 (0.04)	0.32 (0.04)
	41.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.21 (0.01)
	46.4 (0.1)	0.15 (0.01)	0.22 (0.01)
	56.4 (0.1)	0.14 (0.01)	0.14 (0.01)

*Las incertidumbres mostradas en V_c corresponden a la incertidumbre estándar combinada.

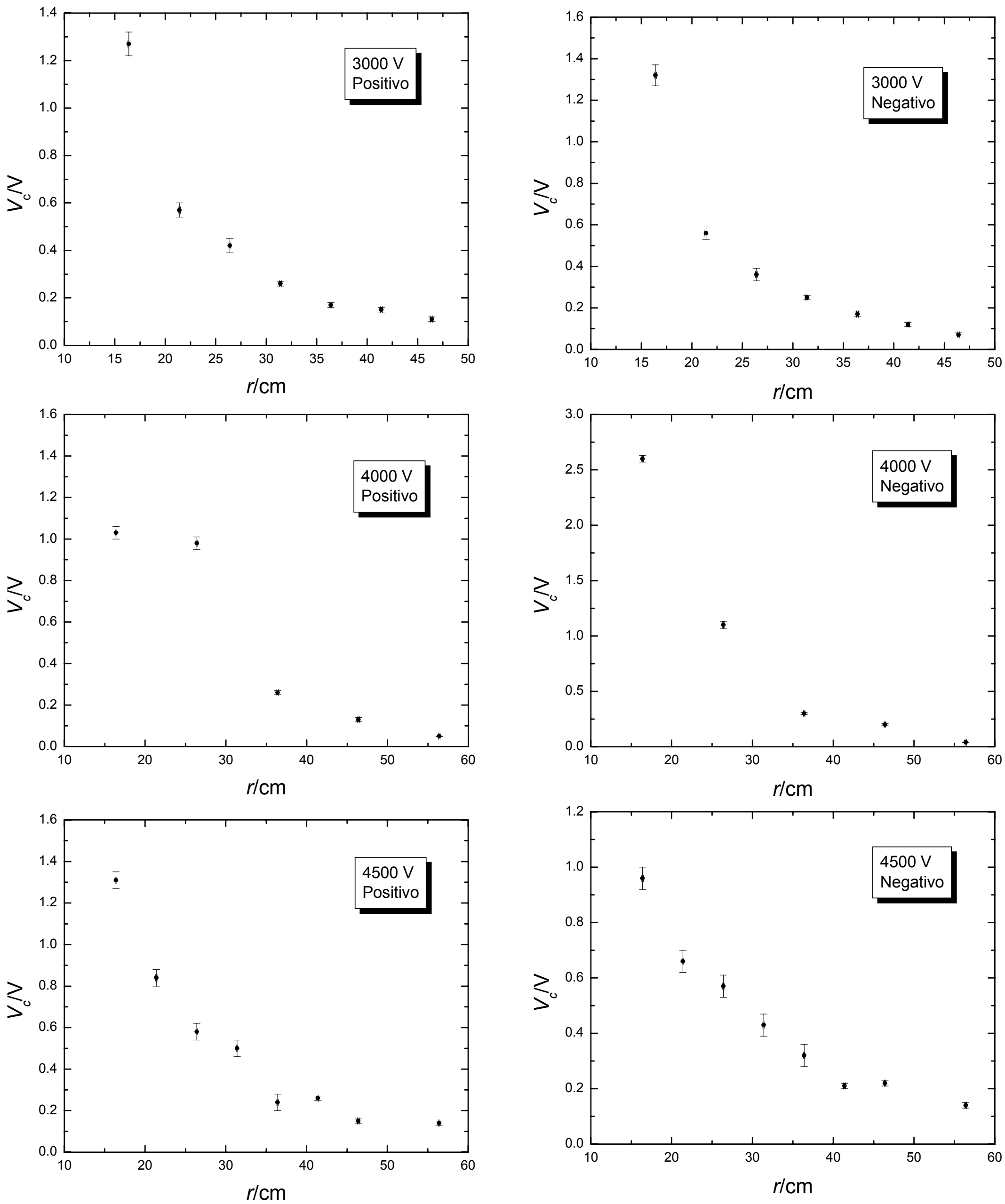

Figura 3. Gráficas de la diferencia de potencial en la canastilla, V_c, como función de la distancia al centro de la esfera.

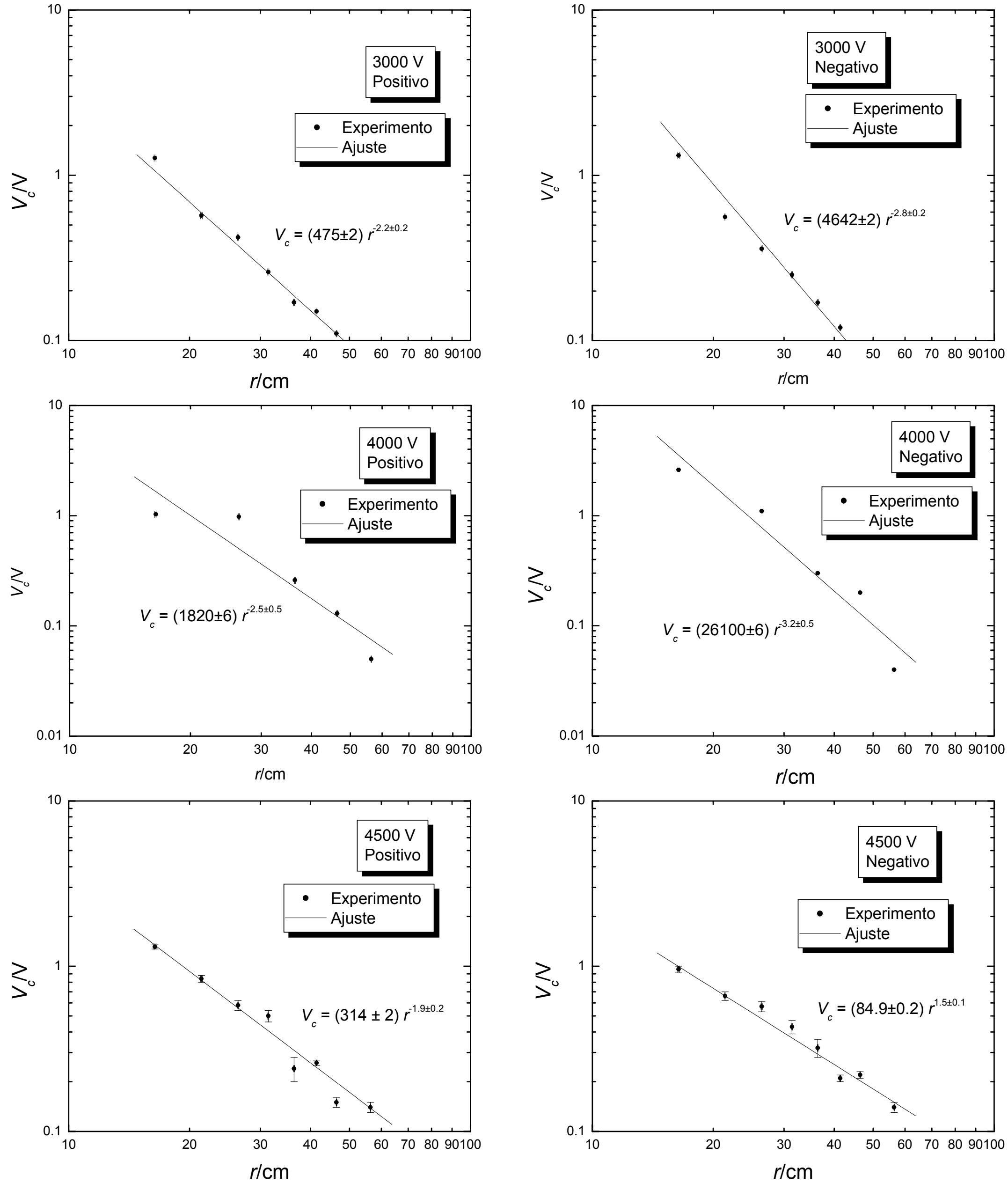

Figura 4. Gráficas de la diferencia de potencial en la canastilla, V_c, como función de la distancia al centro de la esfera, en escala logarítmica. Se muestran también las ecuaciones de las curvas ajustadas.

Por otro lado, la tabla 2 resume los parámetros de las ecuaciones que describen el comportamiento de los datos experimentales de cada uno de los casos estudiados.

Tabla 2. Parámetros de las curvas ajustadas a cada uno de los casos, de acuerdo con la ec. (16). V_c se obtiene en V cuando r se sustituye en cm.

Caso	b	n
3000 V, positivo	475 (2)	-2.2 (0.2)
3000 V, negativo	4640 (2)	-2.8 (0.2)
4000 V, positivo	1820 (6)	-2.5 (0.5)
4000 V, negativo	26100 (6)	-3.2 (0.5)
4500 V, positivo	314 (2)	-1.9 (0.2)
4500 V, negativo	84.9 (0.2)	-1.5 (0.1)

Finalmente, de los datos mostrados en la tabla 2, se evalúa el promedio del exponente n, dando como resultado n = -2.4 (0.3).

4. Discusión

Las gráficas de la figura 3 muestran un comportamiento hiperbólico, de acuerdo a lo esperado.

Se observa, por otra parte, que los exponentes encontrados y mostrados en la tabla 2, son aproximados a –2, tal como lo predice la teoría en la ec. (15). No obstante, el promedio de los exponentes, que resulta n = -2.4 (0.3), da un intervalo que excede ligeramente (en valor absoluto) el valor convencionalmente real, contando con un error del -20%.

La razón principal de esta diferencia es, sin duda, el hecho de que se está utilizando un método muy indirecto, *i. e.*, inducir una carga en los cilindros metálicos, que a su vez se transfiere parcialmente a la canastilla; en el proceso de medición pueden surgir muchos factores que afecten el resultado.

Por ejemplo, a pesar de que los valores absolutos de la carga transferida a la canastilla por los cilindros cargados positiva y negativamente son del mismo orden de magnitud entre sí, se advierte que hay una gran variabilidad al modificar la tensión en la esfera. Esto podría deberse al cambio en las condiciones atmosféricas entre una y otra sesión de trabajo, como puede ser la humedad relativa, la cual produciría una más rápida descarga de los cilindros mientras se efectúan las mediciones. Se sugiere, por tanto, realizar el experimento bajo condiciones más reguladas. Hay que recalcar, además, la dificultad que existe para descargar por completo los bastones de Teflon, aún después de flamearlos. Esto altera la magnitud de las cargas transferidas a la canastilla, aunque, una vez descargadas, permiten obtener resultados coherentes en el promedio.

Este efecto, evidentemente, influye en el parámetro b de cada ajuste, dando resultados totalmente diferentes para cada caso. Esto, sin embargo, no modifica las conclusiones alcanzadas acerca del comportamiento del campo eléctrico de la esfera.

5. Conclusiones

El campo eléctrico de la esfera varía como $r^{-2.4\ (0.3)}$, comportamiento que difiere ligeramente del esperado r^{-2}. Sin embargo, dadas las dificultades que presenta el experimento para efectuar las mediciones, se considera que el resultado es bastante aceptable.

6. Bibliografía

1. R. Resnick y D. Halliday, *Física*, Vol. II, 4ª Ed. (Addison-Wesley Interamericana, México, D.F. 1995).
2. D.C. Baird, *Experimentation*, 3ª Ed. (Prentice Hall, Nueva York, 1999).
3. J. Miranda, *Evaluación de la Incertidumbre en Datos Experimentales* (Instituto de Física, UNAM, México, 2000).

Ejercicios

1. Se mide el tiempo que tarda un carro en recorrer una distancia $d \pm u(d)$, dando como resultado $t \pm u(t)$. Obtenga una expresión analítica para la incertidumbre de la velocidad de dicho carro[4].
2. El período de un péndulo simple está determinado por la ecuación

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

   en donde se midieron la longitud L del péndulo y la aceleración de la gravedad, g. Si los resultados fueron $L \pm u(L)$ y $g \pm u(g)$, encuentre una expresión para la incertidumbre del período, en función de las incertidumbres de L y g.
3. En un experimento es necesario calcular el volumen de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibrador. Se obtiene el resultado (4.55 ± 0.01) cm. ¿Cuál es el volumen de la esfera, *incluyendo su incertidumbre*? Escriba también la ecuación con la cual calcula dicha incertidumbre.
4. En un experimento es necesario calcular el momento de inercia de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibrador. Se obtiene el resultado (4.55 ± 0.01) cm. La masa M resulta igual a (63.5 ± 0.5) g. Si el momento de inercia de una esfera es $I = 2MR^2/5$, donde R es el radio ¿cuál es el valor de I, *incluyendo su incertidumbre*? Escriba también la ecuación con la cual se calcula dicha incertidumbre. ¿Cuánto vale su incertidumbre relativa?
5. Se pide calcular la energía potencial gravitacional E_P de un cuerpo con masa M = (32.0 ± 0.1) g, situado a una altura h de (0.5 ± 0.05) m. Sabiendo que la aceleración de la gravedad es g = (9.78 ± 0.01) m/s², calcule E_P, *incluyendo su incertidumbre*.
6. Una bala de masa $M \pm u(M)$ se mueve con una velocidad $v \pm u(v)$. Obtenga una expresión analítica para la incertidumbre de la energía cinética de la bala.
7. Si se conoce la aceleración de la gravedad $g \pm u(g)$ y se mide la masa de un bloque $M \pm u(M)$, escriba la ecuación necesaria para calcular el peso del bloque.
8. Para medir el volumen de un paralelepípedo se miden sus tres dimensiones, las cuales dan como resultado (5.1 ± 0.1) cm, (3.25 ± 0.05) cm y (10.0 ± 0.1) cm. ¿Cuántas cifras significativas tiene cada una de las mediciones ? Al calcular el volumen, ¿cuántas cifras significativas deben escribirse en el resultado ?
9. En un experimento es necesario calcular el volumen de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibrador. Se obtiene el resultado (4.55 ± 0.01) cm. ¿Cuál es el volumen de la esfera, *incluyendo su incertidumbre* ?
10. Se pide calcular la potencia disipada por una resistencia eléctrica cuando se le aplica una diferencia de potencial V = (8.25 ± 0.01) V, pasando por ella una corriente I = (0.20 ± 0.005) A. Sabiendo que la potencia se calcula mediante la ecuación $P = VI$, calcule su valor, *incluyendo su incertidumbre*.

[4] Aunque estrictamente hablando la incertidumbre debe escribirse entre paréntesis, por simplicidad para estos ejercicios se escribe con el signo ±.

Referencias

[1] International Organization of Standardization, *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology* (Ginebra, Suiza, 1993.)
[2] International Organization of Standardization, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (Ginebra, Suiza, 1993.)
[3] D.C. Baird, *Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design*, 3ª Ed. (Prentice Hall, New York, 1995.)
[4] John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2ª Ed. (University Science Books, Sausalito, CA, EUA, 1997.)
[5] B.N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*, NIST Special Publication 811 (NIST, Gaithersburgh, MD, EUA, 1995.)