$$\sum_i P(x_i) = 1$$

momentos de orden n:

$$\overline{x^m} = \sum_i x_i^m \, P(x_i)$$

el primer momento de x es su valor promedio:

$$\overline{x} = \sum_i x_i \, P(x_i)$$

desviación media cuadrática o varianza:

$$\overline{\Delta x^2} = \sum_i (x_i - \overline{x_i})^2 \; P(x_i)$$

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

pues:

$$\begin{aligned} \overline{(x-\overline{x})^2} &= \overline{x^2 - 2x\overline{x} + \overline{x}^2} \\ &= \overline{x^2} - \overline{2x\overline{x}} + \overline{\overline{x}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(x-\overline{x})^2} &= \overline{x^2} - 2\overline{x}\,\overline{x} + \overline{x}^2 \\ &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 \end{aligned}$$

Variables aleatorias continuas $$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mathcal{P}(x)\, dx$$

P(x) es la densidad de probabilidad de x

normalización: $$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{P}(x)\, dx = 1$$

momentos de orden n:

$$\overline{x^m} = \int_{x_1}^{x_2} x^m\, \mathcal{P}(x)\, dx$$

valor promedio de la desviación media cuadrática:

$$\overline{x} = \int_{x_1}^{x_2} x\mathcal{P}(x)\, dx$$

$$\overline{\Delta x^2} = \int_{x_1}^{x_2} (x - \overline{x})^2\, \mathcal{P}(x)\, dx$$

La distribución de Poisson es una aproximación de la binomial cuando N es muy grande pero P+ es pequeña

$$\overline{n} = NP_+ \ll N$$

En estas condiciones la distribución binomial admite la forma (Poisson):

$$P(n) = \frac{a^n \, e^{-a}}{n!}$$

Partimos de la binomial:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \, P_+^n \, P_-^{N-n}$$

tomemos la expresión:

$$F(n) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Stirling :

$$\begin{aligned} \ln F(n) &= N \ln N - N - (N-n) \ln(N-n) + (N-n) \\ &= N \ln N - n - (N-n) \ln(N-n) \end{aligned}$$

$\frac{n}{N} \ll 1$, $\ln F(n) \simeq n \ln N$, **d'où :**

$$F(n) \simeq N^n$$

con: P_+^n

$$a = NP_+$$

$$F(n)\ P_+^n = a^n$$

transformemos P_-^{N-n} $n \ll N$:

$$\ln\ P_-^{N-n} = (N-n)\ln\ P_- \simeq N\ln\ P_-$$

y como: $P_+ \ll 1$:

$$\ln\ P_-^{N-n} \simeq N\ln\left(1-P_+\right) \simeq -NP_+$$

se obtiene:

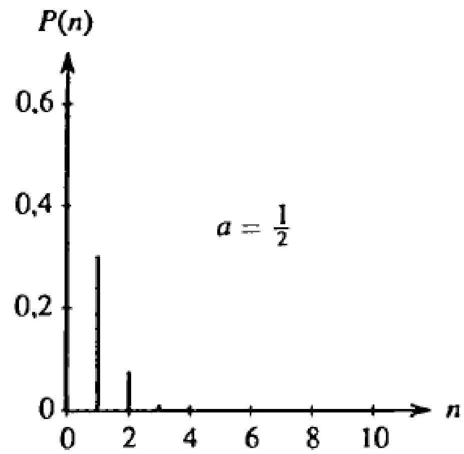
$$P_-^{N-n} \simeq e^{-a}$$

La distribución binomial es en esta aproximación:

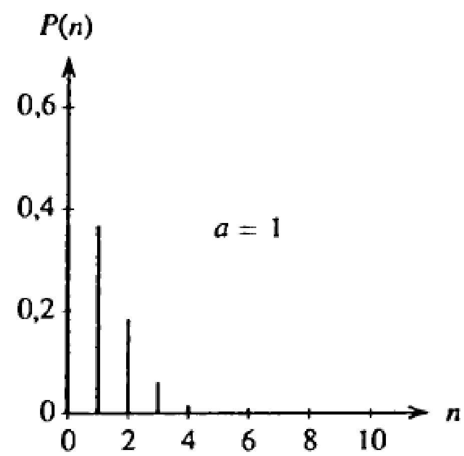
$$P(n) \simeq \frac{a^n\ e^{-a}}{n!}$$

que está normalizada:

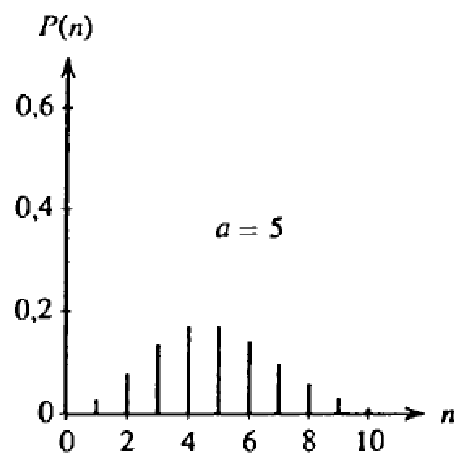
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\ e^{-a}}{n!} = e^a\ a^{-a} = 1$$



P(n)
0,6
0,4
0,2
0
a = 1/2
n
0
2
4
6
8
10



P(n)
0,6
0,4
0,2
0
a = 1
n
0
2
4
6
8
10



P(n)
0,6
0,4
0,2
0
a = 5
n
0
2
4
6
8
10

el valor promedio y desviación media cuadrática:

$$\overline{n} = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na^n \, e^{-a}}{n!} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \, e^{-a}$$

$$\overline{n} = a$$

$$\Delta^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2$$

$$\begin{aligned}
\overline{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \, a^n \, e^{-a}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na^n \, e^{-a}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1) \, a^n \, e^{-a}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \, e^{-a}}{(n-1)!} \\
&= a^2 + a
\end{aligned}$$

$$\Delta = \sqrt{a}$$

Aplicación clásica de la distribución binomial que ofrece una primera aproximación a los fenómenos de difusión. El caminante tiene la posibilidad de un paso adelante con probabilidad P+ y un paso atrás con probabilidad P- = 1 - P+, los pasos tienen la misma longitud.

prob. de n pasos: $P(n) = C_N^n \, P_+^n \, P_-^{N-n}$

---

n eventos (+) y N - n eventos (-). El caminante se encuentra en una abcisa x:

$$x = n\ell - (N-n)\ell = (2n - N)\ell$$

sea $k = 2n - N$,

$$n = \frac{k+N}{2}$$

entonces:

$$P(k) = \frac{N!}{\left(\frac{N+k}{2}\right)! \, \left(\frac{N-k}{2}\right)!} \, P_+^{\frac{N+k}{2}} \, P_-^{\frac{N-k}{2}}$$

y el valor medio de k:

$$\overline{k} = N\,(P_+ - P_-)$$

dispersión media cuadrática

$$\overline{\Delta k^2} = 4NP_+P_-$$

si $P_+ = P_- = \frac{1}{2}$, el valor medio cuadrático de k (que también es su valor más probable) es cero.

Si N es grande, se puede reemplazar la expresión por la gaussiana:

$$P(k) = [2\pi N P_+ P_-]^{-\frac{1}{2}} \ \exp\left[-\frac{(k-\overline{k})^2}{8NP_+P_-}\right]$$

ó **si** $P_+ = P_- = \frac{1}{2}$ **:**

$$P(k) = \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{\frac{1}{2}} \ \exp\left[-\frac{k^2}{2N}\right]$$

si ahora utilizamos la abcisa x = k *l*

y la tratamos de manera contínua:

$$\mathcal{P}(x)\ dx = P(k)\ \frac{dx}{2\ell}$$

remplaçant k por $\frac{x}{\ell}$

$$\mathcal{P}(x)\ dx = (2\pi N \ell^2)^{-\frac{1}{2}} \ \exp\left(-\frac{x^2}{2N\ell^2}\right)\ dx$$

desviación media cuadrática: $\overline{\Delta x^2} = N\ell^2.$