DESCRIPCIÓN DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS IDÉNTICAS E INDISTINGIBLES-ESTADÍSTICA DE FERMI-DIRAC

La expresión de la gran función de partición es:

$$\Xi = \sum_{\ell} \exp\beta\ (-E_\ell + \mu N_\ell)$$

Para partículas con espín s, el factor de degeneración es (2s+1). Sea N_α el número posible de partículas en un estado de energía, en el caso de fermiones es 0 ó 1.La contribución de éste estado microscópico a la energía total es $N_\alpha\ \varepsilon_\alpha$. La energía del sistema es entonces:

$$E_\ell = \sum_{\alpha} N_\alpha\ \varepsilon_\alpha$$

y el número total de partículas

$$N_\ell = \sum_{\alpha} N_\alpha$$

La contribución a la gran función de partición de un estado microscópico de energía ε_α es:

$$\eta_\alpha = \exp\ [-\beta N_\alpha\ (\varepsilon_\alpha - \mu)]$$

y la contribución a la Gran función de partición de ésta repartición particular es:

$$\xi_r = \exp\ \left[-\beta \sum_{\alpha} N_\alpha\ (\varepsilon_\alpha - \mu)\right] = \prod_{\alpha} \eta_\alpha$$

en general existe un gran número de reparticiones posibles de las partículas del sistema entre los estados microscópicos α, sea éste número $\mathcal{N}$. La gran función de partición es entonces:

$$\Xi = \sum_{r=1} \xi_r = \sum_{r=1} \exp\ \left[-\beta \sum_{\alpha} N_\alpha\ (\varepsilon_\alpha - \mu)\right]$$

y como las las particiones son independientes, se puede escribir como un producto:

$$\Xi = \left\{\sum_{N_1} \exp\ [-\beta N_1\ (\varepsilon_1 - \mu)]\right\} \times \left\{\sum_{N_2} \exp\ [-\beta N_2\ (\varepsilon_2 - \mu)]\right\} \times \cdots$$

y entonces

$$\Xi = \prod_{\alpha} \xi_\alpha$$

con

$$\xi_\alpha = \sum_{N_\alpha} \exp\left[-\beta N_\alpha\left(\varepsilon_\alpha - \mu\right)\right]$$

En el caso especifico de fermiones N_α solo puede tomar los valores 0 y 1. la función se escribe:

$$\xi_\alpha^F = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_\alpha - \mu)}$$

y el número promedio de partículas en un estado de energía ε_α :

$$\overline{N}_\alpha^F = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \ln \xi_\alpha^F}{\partial \mu}\right)_T$$

es decir:

$$\overline{N}_\alpha^F = \frac{1}{e^{+\beta(\varepsilon_\alpha - \mu)} + 1}$$

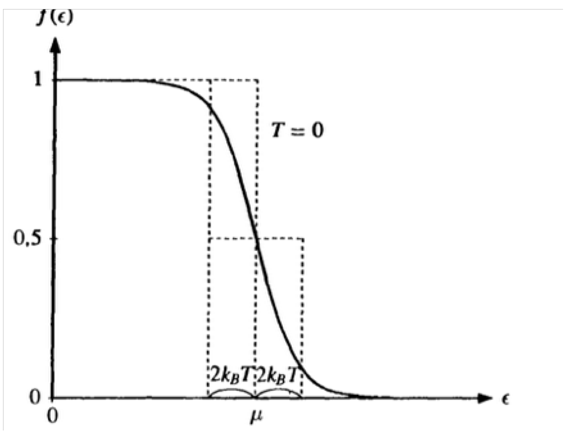
Esta expresión se llama la distribución de Fermi-

CURVA DE FERMI

El número promedio de fermiones en un estado de energía (ecuación anterior) es un número entre 0 y 1, función decreciente de la energía y por tanto los niveles están menos poblados a medida que aumenta la energía.
Podemos estudiar la función continua correspondiente:

$$f_F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

que es una función simétrica con respecto al punto de abscisa μ



Pzra $\varepsilon = \mu$, f_F = 0.5 Si se traza una tangente en el punto de inflexión, la tangente corta la lìnea

$f_F = 0$ en $\varepsilon = \mu + 2k_BT$ y corta la línea $f_F = 1$ en $\varepsilon = \mu - 2k_BT.$

por tanto la función pasa de 0 a 1 en el intervalo de energía del orden de 4kT- Este intervalo disminuye si T disminuye y en el límite T -> 0 se vuelve una función escalón.

FUNCIONES TERMODINÁMICAS

Número promedio de partículas

$$\overline{N} = \sum_\alpha \overline{N}_\alpha^F$$

energía promedio

$$\overline{E} = \sum_\alpha \overline{N}_\alpha^F \varepsilon_\alpha$$

Entropía

$$S = -k_B \sum_\alpha \left[\overline{N}_\alpha^F \ln \overline{N}_\alpha^F + \left(1 - \overline{N}_\alpha^F\right) \ln \left(1 - \overline{N}_\alpha^F\right)\right]$$

Gran potencial (Ψ ó J)

$$J = k_B T \sum_\alpha \ln \left(1 - \overline{N}_\alpha^F\right)$$