

Si despreciamos la diferencia entre estados de energía sucesivos, transformamos las sumas discretas en integrales y lo expresaremos en términos de densidad de estados. La densidad de estados para partículas sin interacción es:

$$\rho(\varepsilon) = AV \sqrt{\varepsilon}$$

y de manera explícita:

$$\rho(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}$$

para partículas con espín s el factor de degeneración es $(2s+1)$ y entonces

$$A = (2s + 1) \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2}$$

y la expresión para el número de partículas es:

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} f_F(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon = AV \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

ε_0 es el estado de energía más pequeño. En el caso de fermiones libres sin interacción, se hace $= 0$ y tendremos entonces:

$$N = AV \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

Si el número de partículas $n=N/V$ es fijo, el potencial químico es función de n y T . Tendremos entonces:

$$n = \frac{N}{V} = (2s + 1) \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} d\varepsilon$$

y entonces:

$$\mu = -k_B T \ln \left[\frac{V}{N} (2s + 1) \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \right]$$

La energía es entonces,

$$E = \int_0^{\infty} f_F(\varepsilon) \varepsilon \rho(\varepsilon) d\varepsilon$$

es decir,

$$E = \int_0^{\infty} \frac{AV \epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon$$

y el gran potencial Ψ :

$$\Psi = k_B T \int_0^{\infty} \ln [1 - f_F(\epsilon)] \rho(\epsilon) d\epsilon$$

o sea,

$$\Psi = -AV k_B T \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}] d\epsilon$$

haciendo la integral,

$$\Psi = -\frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{AV \epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon$$

y finalmente,

$$\Psi = -\frac{2}{3} E$$

Las otras funciones termodinámicas se pueden obtener a partir de la expresión de Ψ .
Por ejemplo

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

que es la ecuación de estado del gas de fermiones.
En el caso clásico la energía cinética es:

$$E = \frac{3}{2} N k_B T$$

y encontramos la ecuación de estado de los gases ideales. Pero hay que tener en cuenta que esto vale para temperaturas "altas". A bajas temperaturas o a densidades grandes se tendrá otra expresión.

TEMPERATURAS BAJAS

1. Temperatura cero.

Tendremos :

$$N = \int_0^{\mu_0} \rho(\epsilon) d\epsilon = AV \int_0^{\mu_0} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

donde μ_0

es el potencial químico a temperatura cero, llamado nivel de Fermi o energía de Fermi del gas. De esta manera:

$$N = \frac{2}{3} AV \mu_0^{3/2}$$

y a partir de las ecuaciones anteriores:

$$\mu_0 = \left[\frac{3}{4\pi(2s+1)} \right]^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{(2s+1)} \right)^{2/3} n^{2/3}$$

o también:

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

donde k_F es el llamado vector de Fermi.

A temperatura cero todos los niveles de energía inferiores a μ_0 están ocupados y todos los de energía superior están vacíos.

Se define la temperatura de Fermi por:

$$\mu_0 = k_B T_F$$

2. Comportamiento cerca de $T = 0$.

Las expresiones quedan:

$$N = \frac{2}{3} AV \mu^{3/2} + \frac{(\pi k_B T)^2}{12} AV \mu^{-1/2}$$

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12\mu_0^2} \right)$$

$$\mu = k_B T_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{T^2}{T_F^2} \right)$$

o sea,

y para la energía:

$$E = E_0 \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \frac{T^2}{T_F^2} \right)$$

vemos pues que el gas de fermiones se comporta como un gas degenerado, es decir, como un gas de temperatura cero cuando la temperatura es muy inferior a su temperatura de Fermi.