ESTADÍSTICA DE BOSE-EINSTEIN

En el caso de un gas de bosones (espín cero ó entero), el número promedio de partículas en un estado α de energía ε_α es;

$$\overline{N}_\alpha^B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\alpha - \mu)} - 1}$$

Como N_α es un entero positivo, μ debe ser inferior o igual a la energía más pequeña, que es el nivel fundamental. Entonces, a T y μ fijos, el número N_α es una función decreciente de la energía.

FUNCIONES TERMODINÁMICAS

El número promedio de partículas del sistema es:

$$\overline{N} = \sum_\alpha \overline{N}_\alpha^B$$

Y la energía correspondiente,

$$\overline{E} = \sum_\alpha \overline{N}_\alpha^B \, \varepsilon_\alpha$$

La entropía del sistema es:

$$S = -k_B \sum_\alpha \left[\overline{N}_\alpha^B \ln \overline{N}_\alpha^B - \left(1 + \overline{N}_\alpha^B\right) \ln \left(1 + \overline{N}_\alpha^B\right)\right]$$

El gran potencial:

$$\boxed{\Psi = -kT \,\mathrm{Log}\, \Xi = \Psi(T, V, \mu)}$$

$$\boxed{\Psi} = -k_B T \sum_\alpha \ln \left(1 + \overline{N}_\alpha^B\right)$$

<u>Límite termodinámico</u>

Si reemplazamos por una función continua,

$$f_B\,(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

Con la condición $\mu \leq \varepsilon_0$

Entonces, el número promedio de partículas queda como:

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} f_B(\varepsilon)\, \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon = AV \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

En el caso de bosones libres, sin energía potencial, $\varepsilon_0 = 0$ y tendremos

$$N = AV \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Con $\mu \leq 0$.

Su el número de partículas por unidad de volumen, $n = N/V$ es fijo, μ está dado por la relación anterior. En el caso del límite clásico, la energía es pues:

$$E = \int_{0}^{\infty} f_B(\varepsilon)\, \varepsilon \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{0}^{\infty} \frac{AV\, \varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Teníamos del conjunto Gran canónico:

Y el gran potencial:

$$\boxed{\Psi = -kT \operatorname{Log} \Xi = \Psi(T, V, \mu)}$$

$$\Psi = -k_B T \int_{0}^{\infty} \ln\left[1 + f_B(\varepsilon)\right] \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Y sustituyendo $f_B(\varepsilon)$:

$$\Psi = AV\, k_B T \int_{0}^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln\left[1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right] d\varepsilon$$

Que se puede expresar finalmente como,

$$\Psi = -\frac{2}{3} \int_{0}^{\infty} \frac{AV\, \varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}\, d\varepsilon$$

y de todo lo anterior obtenemos:

$$\Psi = -\frac{2}{3} E$$

y la presión,

$$P = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial V}\right)$$

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$$

Todas éstas expresiones son válidas si $\mu \leq 0$.

TEMPERATURA DE BOSE

a) $\mu = 0$.

En éste caso la ecuación para N queda,

$$N = AV \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

que se puede escribir como:

$$N = \frac{AV}{\beta^{3/2}}\, I\left(\frac{1}{2}\right)$$

donde

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}\, dx \simeq 2{,}612 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De la ecuación anterior para N podemos definir la llamada Temperatura de Bose:

$$T_B = \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{AV}\, \frac{1}{1{,}306\, \sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$$

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi\, m\, k_B} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{2{,}612\, (2s+1)}\right)^{2/3}$$

La temperatura de Bose representa la temperatura del sistema para el cual el potencial químico es cero. Al pasar el potencial químico de cero a un valor negativo, la cantidad $(\varepsilon - \mu)$ aumenta.
Entonces, la condición $\mu < 0$ equivale a la condición $T > T_B$.

CONDENSACIÓN DE BOSE

Supongamos que en el nivel fundamental

$$\overline{N}_0^B = N_0$$

entonces

$$e^{-\beta\mu} = 1 + \frac{1}{N_0}$$

y entonces $\beta\mu = - 1/N_0$

$$\mu = -\frac{k_B T}{N_0}$$

El valor absoluto de μ es muy pequeño. Y entonces se puede considerar, fuera de la población del nivel fundamental, que $\mu \approx 0$.

Si No partículas se encuentran en el nivel $\varepsilon_o = 0$, el resto (N – No) se encuentran en los otros niveles. Entonces,

$$N - N_0 = AV \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

o

$$N - N_0 = AV \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

y entonces,

$$\frac{N}{T_B^{3/2}} = \frac{N - N_0}{T^{3/2}}$$

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\right]$$

Entonces, si el número de partículas del sistema es constante y si se baja la temperatura a partir de T_B:

1) para $T > T_B$ las partículas se distribuyen en función de la energía y el potencial químico del sistema es negativo
2) cuando T llega al valor T_B el potencial químico se hace casi cero y el nivel fundamental de energía se comienza a comportar distinto
3) cuando $T < T_B$ el número de partículas en el nivel fundamental No se vuelve del orden macroscópico. No crece de un valor casi cero en $T = T_B$ a un valor N, número total de partículas del sistema en el límite $T = 0$.

El paso por la temperatura de Bose cambia cualitativamente el estado del sistema, se dice que es una *transición de fase.*

Funciones termodinámicas del gas de Bose degenerado.

La energía es:

$$E = AV \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}\, d\varepsilon$$

$$E = \frac{AV}{\beta^{5/2}}\, I\left(\frac{3}{2}\right)$$

y

evaluando I(3/2):

$$E = 0,77\; N k_B T \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$

y el gran potencial,

$$\Psi = -k_B T \ln\left(1 + N_0\right) - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{AV\, \varepsilon^{3/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}\, d\varepsilon$$

$$\Psi = -k_B T \ln\left(1 + N_0\right) - \frac{2}{3}\, E$$

y aproximando, $\Psi = -\, 2E/3$

Entropía, Ψ

y en relación con la energía libre: $F = \Psi + \mu N = \Psi$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V}$$

$$S = \frac{5}{3}\frac{E}{T}$$

y la presión:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{N,T}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{E}{V}$$

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{E}{V}$$

que es la ecuación de estado del gas de Bose.