Laboratorio de Física:
Herramientas de cálculo diferencial para la expresión de la ley de propagación de la incertidumbre

Elizabeth Hernández Marín, Jesús Hernández Trujillo
Departamento de Física y Química Téorica
Facultad de Química, UNAM

Abril 2023

1. Introducción

En el trabajo experimental, todas la medidas –tanto las directas como las indirectas– tienen necesariamente asociada una incertidumbre. Las medidas directas son resultado de una comparación directa entre un instrumento de medida y la magnitud que se desea medir. Un ejemplo de medida directa es el valor del diámetro de una canica que se obtiene con la ayuda de un calibrador con escala vernier. En las medidas directas, la incertidumbre combinada asociada al mensurando se compone de contribuciones debidas a la repetición de las medidas obtenidas a través de parámetros estadísticos (incertidumbre tipo A) y contribuciones no estadísticas (incertidumbre tipo B) que pueden ser (aunque no están limitadas a) las asociadas a la resolución del instrumento de medida, obtenidas a partir de un certificado de calibración, etc.[a]

Por otro lado, una medida indirecta se obtiene a través de la aplicación de alguna relación funcional entre magnitudes medidas directamente. Por ejemplo, para determinar el volumen, V, de la canica mencionada anteriormente a partir de su diámetro, d, medido directamente, se requiere emplear la relación $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \pi\frac{d^3}{6}$.[b]

El objetivo general de este documento es proporcionar algunos elementos del cálculo diferencial de varias variables involucrados en la definición de la incertidumbre combinada asociada a las *medidas indirectas* que se utiliza en el tratamiento de datos experimentales. Para

[a]Para una lista más exhaustiva se puede consultar el Vocabulario Internacional de Metrología, referencia 1

[b]Notar que a partir de la expresión más común que es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera, se escribió una ecuación en términos del diámetro. Esto es porque el radio de la canica no se midió directamente. Lo que se midió directamente fue el diámetro y se aplica la relación $r = d/2$.

ello, se presentan las definiciones de funciones escalares, derivadas ordinarias y parciales. Adicionalmente, se define la diferencial de una función y, con ella, se hace la deducción de una expresión que se conoce como la 'ley propagación de la incertidumbre', la cual se empleará para la determinación de la incertidumbre asociada a una medida indirecta. Usualmente, esta expresión se proporciona sin dar detalles sobre el procedimiento involucrado en su obtención, salvo en artículos especializados sobre el tema. Adicionalmente, se busca contribuir mediante los ejemplos y ejercicios proporcionados a lo largo del texto a que el alumno incremente su familiaridad con el uso de las herramientas de cálculo diferencial en la solución de problemas específicos, en este caso para el análisis de datos experimentales.

2. Derivadas de campos escalares

En esta sección, se introducen algunas definiciones del cálculo diferencial utilizando la terminología de un texto de matemáticas apropiado para el curso de Cálculo II. Asimismo, se presentan algunas de sus aplicaciones mediante ejemplos con sus procedimientos detallados de solución; varios de ellos tienen interpretación geométrica o se pueden relacionar con sistemas físicos. Se requieren herramientas para el estudio de funciones de varias variables porque en el análisis de datos experimentales se realizan más de una mediciones independientes de magnitudes de entrada llamadas mensurandos y la ley propagación de la incertidumbre se expresa en términos de derivadas de funciones que dependen de estas cantidades.

2.1. Campos escalares

Un campo escalar es una función escalar que depende de N variables:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{1}$$

donde $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in D \subset \Re^N$, y D es el dominio de la función.[c] Además, la gráfica de un campo escalar es el conjunto

$$G = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N, f(x_1, x_2, \ldots, x_N)) \,|\, (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in D\}\,.$$

Nótese que $G \subset \Re^{N+1}$.

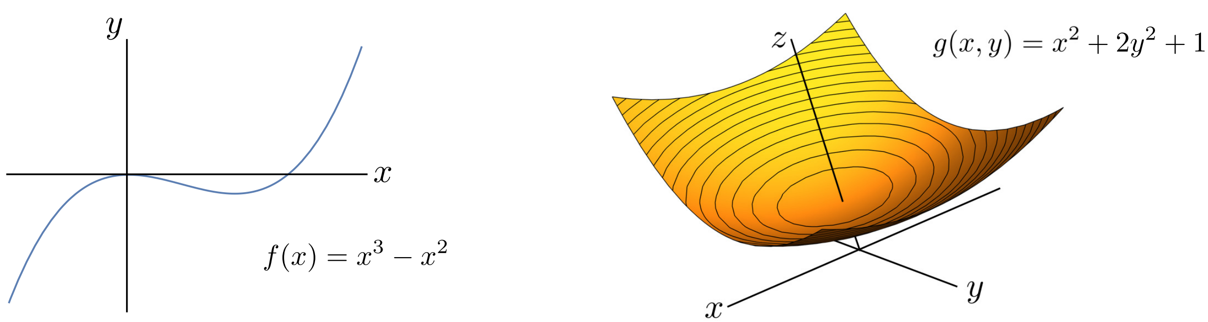
[c] Como complemento, un campo vectorial en M variables es una función vectorial que tiene M componentes y está dada por $\vec{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_M)$, donde cada componente depende de las N variables; por ejemplo, la primera componente es $g_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Un caso particular es el campo eléctrico de una carga puntual en $\Re^3$, $\vec{E}(x, y, z)$, el cual es de naturaleza vectorial. En este documento, no se discutirán más los campos vectoriales.

Ejemplos:

1. La gráfica de una función de una variable, $y = f(x)$, es el conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$ donde $x \in D$. Dado que $D \subset \Re$, la gráfica se encuentra en $\Re^2$ y se trata de una curva. Por ejemplo, sea $y = f(x) = x^3 - x^2$. Los elementos del dominio de la función son números reales y su gráfica es el conjunto $G = \{(x, x^3 - x^2) | x \in \Re\}$. Además, $G \subset \Re^2$.

2. En el caso de una función de dos variables, $z = g(x, y)$, la gráfica consiste en el conjunto de ternas ordenados de la forma $(x, y, f(x, y))$ donde $(x, y) \in D$. Dado que $D \subset \Re^2$, la gráfica se encuentra en $\Re^3$ y se trata de una superficie. Como ilustración, considerar la función escalar $z = g(x, y) = x^2 + 2y^2 + 1$. El dominio es $\Re^2$ y su gráfica es $G = \{(x, y, x^2 + 2y^2 + 1) | (x, y) \in \Re^2\}$. En este caso, $G \subset \Re^3$.

   Las gráficas correspondientes a estos ejemplos se ilustran en la siguiente la figura.



3. La gráfica de $w = f(x, y, z)$ se encuentra en $\Re^4$ y no puede ser trazada en el papel.

4. La función de dos variables $I = f(R, \Delta V) = \frac{\Delta V}{R}$ permite determinar la corriente eléctrica I que pasa por un resistor óhmico de resistencia R cuyas terminales están sometidas a una diferencia de potencial ΔV. En este caso, el dominio de la función consta de los pares ordenados de las variables independientes, $(R, \Delta V) \in \Re^2$, donde $R \neq 0$.

5. $V = g(a, b, h) = abh$, donde $(a, b, h) \in \Re^3$, permite determinar el volumen V de un prisma rectangular de ancho a, largo b, y altura h.

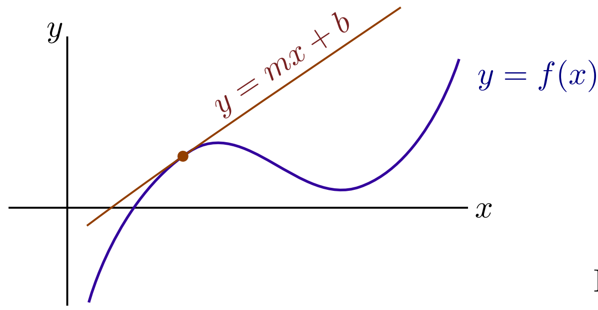
En los ejemplos 4 y 5, dado que a las variables independientes se les asigna significado físico, existen restricciones adicionales a las del dominio de cada función desde el punto vista meramente matemático. Por ejemplo, a, b y c no pueden tener valores negativos.

2.2. Derivadas ordinarias

Sea $y = f(x)$ un campo escalar en una variable. El siguiente límite define a la derivada de la función en $x_0 \in D$:

$$\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right|_{x_0} \tag{2}$$

Geométricamente:



La derivada es la pendiente, m, de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P(x_0, y_0)$ cuando el límite existe.

2.3. Derivadas parciales

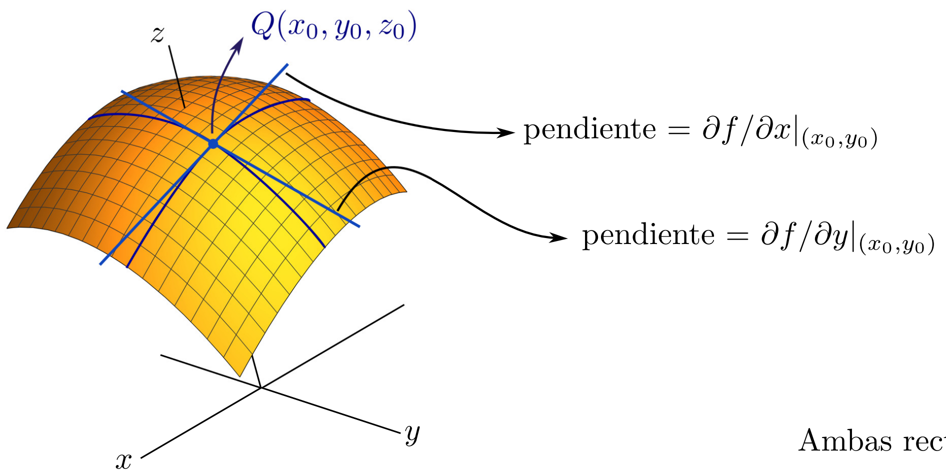
Considerar ahora el caso de una función de dos variables $z = f(x, y)$. La derivada parcial de f con respecto a x, evaluada en $(x_0, y_0) \in D$, es

$$\left.\frac{\partial\,f(x,y)}{\partial\,x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right|_{(x_0,y_0)} \tag{3}$$

Asimismo, la derivada parcial de f con respecto a y, evaluada en el mismo punto, está dada por

$$\left.\frac{\partial\,f(x,y)}{\partial\,y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \left.\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right|_{(x_0,y_0)} \tag{4}$$

Estas derivadas corresponden a las rectas tangentes a la gráfica de la función en el punto $Q(x_0, y_0, z_0)$, donde $z_0 = f(x_0, y_0)$, como se indica en la figura.



Ambas rectas definen un plano tangente a la superficie en el punto Q cuando el límite existe.

En el caso de un campo escalar en N variables, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, las derivadas parciales se definen de manera análoga:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_{1,0},\ldots,x_{N,0})} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left.\frac{f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_N) - f(x_1,\ldots,x_N)}{\Delta x_i}\right|_{(x_{1,0},\ldots,x_{N,0})} \tag{5}$$

A partir de la definición de derivada parcial, para calcular $\partial f/\partial x_j$ se considera a las x_i restantes $(i \neq j)$ como constantes.

Ejemplo:

Sea f una función que depende de dos variables, x y y, tal que $f(x,y) = 2x^2y + xy^2$.
La derivada parcial de f con respecto a x es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + xy^2) = \frac{\partial(2x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2)}{\partial x}$$

$$= 2y\frac{\partial x^2}{\partial x} + y^2\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$= (2y)(2x) + (y^2)(1) = 4xy + y^2$$

Nótese que en el desarrollo anterior, y se trata como constante porque se está obteniendo la derivada parcial respecto a x.

Por otro lado, la derivada parcial de f con respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + xy^2) = \frac{\partial(2x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}$$

$$= 2x^2\frac{\partial y}{\partial y} + x\frac{\partial y^2}{\partial y}$$

$$= (2x^2)(1) + (x)(2y) = 2x^2 + 2xy$$

En el desarrollo anterior, las expresiones que contienen a la variable x se tratan como si fueran constantes.

Ejercicios:

1. Calcula las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones.

   a) $f(u, v, w) = e^{u+v^2+w^3} - \cos(u^3v^2w)$

   Respuesta:

$$\partial f/\partial u = e^{u+v^2+w^3} + 3u^2v^2w \operatorname{sen}(u^3v^2w)$$
$$\partial f/\partial v = 2e^{u+v^2+w^3} + 2u^3vw \operatorname{sen}(u^3v^2w)$$
$$\partial f/\partial w = 3e^{u+v^2+w^3} + u^3v^2 \operatorname{sen}(u^3v^2w)$$

   b) La ecuación termodinámica de estado de van der Waals es:

$$p = p(v, T) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,,$$

   donde a y b son constantes y R es la constante universal de los gases.

   Respuesta:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}, \qquad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v-b}$$

   c) La corriente eléctrica que pasa a través de un resistor óhmico de resistencia R sometido a una diferencia de potencial ΔV se obtiene con la expresión

$$I = I(R, \Delta V) = \frac{\Delta V}{R}$$

   Respuesta:

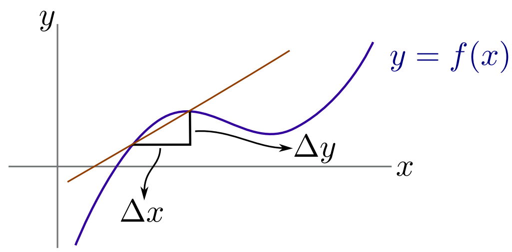
$$\frac{\partial I}{\partial \Delta V} = \frac{1}{R}, \qquad \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{\Delta V}{R^2}$$

3. Diferenciales

Una función diferencial permite conocer el efecto de los cambios infinitesimales realizados en las variables independientes sobre la variable dependiente, es decir, sobre la función escalar, ec. (1). Se trata de un elemento que será utilizado para la obtención de la ley propagación de la incertidumbre. Primeramente, se analizan funciones de una variable y después el caso general de varias variables. Al igual que en la sección 2, se utiliza la terminología propia del cálculo diferencial.[d]

3.1. Campo escalar en una variable

En la siguiente figura se expresa la pendiente, m_{sec}, de una recta secante[e] a la curva $y = f(x)$.



$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando Δx es pequeño, se obtiene aproximadamente una recta tangente con pendiente

$$m_{\tan} = \frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

El valor exacto de la pendiente de la recta tangente se obtiene en el límite cuando $\Delta x \to 0$. A partir de la expresión anterior:

$$\Delta y \approx \left(\frac{df}{dx}\right) \Delta x\,.$$

En el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene la diferencial de la función:

$$dy = \left(\frac{df}{dx}\right) dx\,. \tag{6}$$

Se usó la notación $dx \equiv \Delta x$ en ese límite y de manera análoga para dy. Esta expresión define a la diferencial de y. Con ella, se puede calcular el efecto que tiene sobre la variable

[d]En metrología, los términos 'exactitud' y 'error' se emplean en un contexto diferente al usado en esta sección y tienen sus propias definiciones plasmadas en el Vocabulario Internacional de Metrología. En la sección 4, se establecerá el enlace apropiado para la aplicación del cálculo diferencial en el análisis de información experimental con la terminología metrológica correspondiente.

[e]Una recta secante tiene dos puntos de intersección con una curva; una recta tangente, sólo intersecta a la curva en un punto.

dependiente, y, un cambio infinitesimal en la variable independiente, x; ese efecto depende de la forma funcional $y = f(x)$ y del punto en el dominio en que se evalúa la derivada. Es conveniente resaltar que la derivada y la diferencial no son lo mismo pues la derivada es una razón de cambio y la diferencial denota un cambio infinitesimal, como lo muestra la ec. (6).

Dos reglas para las diferenciales:

- $d(u+v) = du + dv$
- $d(uv) = udv + vdu$

Ejemplos:

1. La diferencial de $y = f(x) = 1/x$ es
$$dy = \left(\frac{d[x^{-1}]}{dx}\right) dx = -\frac{1}{x^2}dx\,.$$

2. Dado que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$,

   a) su diferencial es
$$dA = \left(\frac{d\,\pi r^2}{dr}\right) dr = \pi \left(\frac{dr^2}{dr}\right) dr = 2\pi r dr\,.$$

   b) Si un objeto circular de radio $r = 5$ cm se expande 0.1 cm por la acción de calor, calcula una aproximación al cambio en el área y compáralo con el valor exacto.

   Una aproximación al cambio en el valor del área se obtiene al usar Δr en lugar de dr y ΔA_{aprox} en lugar de dA:
$$\Delta A_{\text{aprox}} = 2\pi r\Delta r = 2\pi(5\,\text{cm})(0.1\,\text{cm}) = \pi\,\text{cm}^2\,.$$
   El valor exacto es:
$$\Delta A = \pi(5.1\,\text{cm})^2 - \pi(5\,\text{cm})^2 = 1.01\pi\,\text{cm}^2\,.$$
   Por lo tanto, $\Delta A - \Delta A_{\text{aprox}} = 0.01\,\pi\,\text{cm}^2$.
   De manera análoga, si el radio del objeto sólo aumenta 0.01 cm, se obtiene:
$$\begin{aligned}\Delta A_{\text{aprox}} &= 0.1\pi\,\text{cm}^2\\ \Delta A &= 0.1001\pi\,\text{cm}^2\\ \Delta A - \Delta A_{\text{aprox}} &= 0.0001\pi\,\text{cm}^2\end{aligned}$$
   La discrepancia respecto al valor exacto disminuye con el valor de Δr.

3. Una aproximación a la raíz cuadrada de un número, a partir de la raíz cuadrada conocida de otro número, puede obtenerse mediante la diferencial de $f(x) = \sqrt{x}$:

$$df = \left(\frac{d\, x^{1/2}}{dx} \right) dx = \frac{1}{2x^{1/2}}\, dx$$

Al sustituir las diferenciales por deltas, se obtiene la aproximación:

$$\begin{aligned} \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) &= \frac{1}{2\, x^{1/2}}\, \Delta x \\ f(x+\Delta x) &= f(x) + \frac{1}{2\, x^{1/2}}\, \Delta x \\ \sqrt{x+\Delta x} &= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \Delta x \end{aligned}$$

Por ejemplo, obtener $\sqrt{10}$ a partir de $\sqrt{9} = 3$. En este caso, $x = 3$ y Δx=1, de tal manera que $x + \Delta x = 10$:

$$f(10) = \sqrt{10} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(1) = 3 + \frac{1}{6} = 3.1667$$

La aproximación funciona mejor para valores cercanos a 3, como se ilustra en la tabla (valores a cinco decimales).

y	$\sqrt{y}$	Valor aproximado	Diferencia: $\sqrt{y}-$ Valor aproximado
9.2	3.03315	3.03333	-0.00018
12	3.46410	3.50000	-0.03590
16	4.00000	4.16667	-0.16667

3.2. Campo escalar en N variables

En el caso de un campo escalar en dos variables, $z = f(x, y)$, la diferencial total se define por

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy\,, \tag{7}$$

donde dx y dy son las diferenciales de x y y, respectivamente, e indica cuál es el efecto que tienen sobre la variable dependiente z cambios infinitesimales en las variables independientes x y y. Ese efecto depende de la relación funcional entre las variables y del valor (x, y) en que se evalúen las derivadas parciales. La extensión es directa al caso de una función de más variables, ec. (1), para la cual:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right) dx_N \tag{8}$$

La diferencial puede expresarse de manera compacta usando la notación de suma:

$$df = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i$$

Ejemplos:

1. La diferencial total de $z = e^{-x+y^2}$ es

$$dz = \left(\frac{\partial e^{-x+y^2}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial e^{-x+y^2}}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial(-x+y^2)}{\partial x} e^{-x+y^2} dx + \frac{\partial(-x+y^2)}{\partial y} e^{-x+y^2} dy$$
$$= -e^{-x+y^2} dx + 2ye^{-x+y^2} dy$$

2. La diferencial total de $z = \ln\left(uv/[1+2w]\right)$ es

$$dz = \left(\frac{\partial \ln(uv/[1+2w])}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial \ln(uv/[1+2w])}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial \ln(uv/[1+2w])}{\partial w} \right) dw$$

Dado que

$$\ln \frac{uv}{1+2w} = \ln u + \ln v - \ln[1+2w]$$

entonces

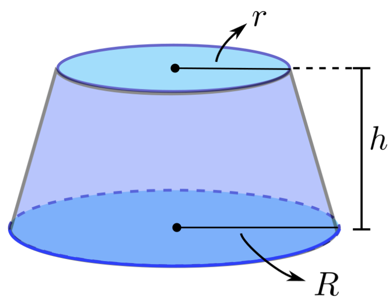
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left(\ln \frac{uv}{1+2w} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\ln u + \ln v - \ln[1+2w] \right) = \frac{\partial \ln u}{\partial u} + \frac{\partial \ln v}{\partial u} - \frac{\partial \ln(1+2w)}{\partial u} \\
&= \frac{1}{u} + 0 - 0 = \frac{1}{u} \\
\frac{\partial}{\partial v} \left(\ln \frac{uv}{1+2w} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\ln u + \ln v - \ln[1+2w] \right) = \frac{\partial \ln u}{\partial v} + \frac{\partial \ln v}{\partial v} - \frac{\partial \ln(1+2w)}{\partial v} \\
&= 0 + \frac{1}{v} - 0 = \frac{1}{v} \\
\frac{\partial}{\partial w} \left(\ln \frac{uv}{1+2w} \right) &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\ln u + \ln v - \ln[1+2w] \right) = \frac{\partial \ln u}{\partial w} + \frac{\partial \ln v}{\partial w} - \frac{\partial \ln(1+2w)}{\partial w} \\
&= 0 + 0 - \frac{1}{1+2w} \frac{\partial(1+2w)}{\partial w} \\
&= -\frac{2}{1+2w}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$dz = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} - \frac{2dw}{1+2w}$$

Ejercicio.

1. Encuentra la diferencial total del volumen del cono trunco. Nota que no significan lo mismo r y R.



$$V = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + R^2 + r\,R\right)$$

Respuesta:

$$dV = \frac{\pi}{3}h(2r + R)\,dr + \frac{\pi}{3}h(r + 2R)\,dR + \frac{\pi}{3}(r^2 + R^2 + rR)\,dh$$

4. Incertidumbre de medida

De acuerdo a la Guía para la expresión de la incertidumbre de medida (conocida también como GUM), se tiene que "la incertidumbre del resultado de una medición refleja la imposibilidad de conocer exactamente el valor del mensurando".[f] Es decir, cualquier medida experimental que se realice de manera directa o indirecta siempre tendrá una incertidumbre asociada.

En Laboratorio de Física, se distinguen dos procedimientos separados para determinar la incertidumbre asociada a medidas directas y la incertidumbre asociada a medidas indirectas.

4.1. Incertidumbre combinada asociada a una medida directa

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado de una cantidad X sujeta a medición (el mensurando), para la cual se han realizado n medidas independientes $\{x_k \,|\, k = 1, 2, \ldots n\}$, es la media aritmética o promedio $\bar{X}$. Éste se obtiene al aplicar la siguiente expresión:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{9}$$

La desviación típica experimental, $s(x)$, representa la dispersión de los valores obtenidos

[f] Ver la referencia 4 de la Bibliografía.

$\{x_k\}$ alrededor del promedio y se calcula a través de la siguiente expresión:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{X})^2}{n-1}} \tag{10}$$

La incertidumbre tipo A es evaluada a través del análisis estadístico de las observaciones. En términos del trabajo experimental, para una magnitud de entrada X (por ejemplo el diámetro de una esfera) la incertidumbre tipo A se asocia con el mejor estimado $x = \bar{X}$ y se denomina $u_A(x)$. La incertidumbre tipo A se calcula como la desviación típica de la media:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{X})^2}{n(n-1)}} = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

que en estadística permite cuantificar qué tan bien el valor promedio $\bar{X}$ estima al valor esperado del mensurando X. Es decir, calcula la incertidumbre en la estimación del promedio.

La *incertidumbre tipo B* es evaluada por medios distintos al análisis estadístico. Por el momento, únicamente se considerará una contribución a dicha incertidumbre a partir de la resolución del instrumento de medida empleado. Sin embargo, la incertidumbre tipo B tiene múltiples contribuciones cuyo estudio se deja para cursos más avanzados de Metrología.

En la asignatura Laboratorio de Física, se calcula una incertidumbre combinada asociada al mejor estimado de cierta magnitud de entrada, que será denominado *mensurando*, aplicando la siguiente expresión:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \tag{12}$$

donde $u_c(x)$ representa a la incertidumbre combinada, $u_A(x)$ es la incertidumbre tipo A y $u_B(x)$ es la incertidumbre tipo B. Estas incertidumbres están asociadas al mejor estimado del mensurando X.

Ejemplo

Se empleó un calibrador digital para medir el diámetro, d, de una muestra de 10 canicas similares ($n = 10$). A partir de la resolución del instrumento de medida, se asumirá que $u_B(d)$=0.01 mm, y se obtuvieron los siguientes resultados:

d [± 0.01 mm]	19.50	19.53	19.56	19.59	19.60	19.51	19.56	19.50	19.53	19.57

Se empleará $\{d_k\}$ para representar al conjunto de 10 mediciones.[g] La mejor estimación del valor esperado del diámetro es:

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} d_k = 19.545\,\text{mm} \to 19.54\,\text{mm}$$

Para realizar el redondeo, y al tratarse de medidas directas, se observa que el instrumento de medida permite conocer valores hasta las centésimas; entonces todos los redondeos de los valores calculados se realizarán hasta dos cifras decimales.[h]

La incertidumbre tipo A se calcula como:

$$u_A(d) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{10}(d_k - \bar{d})^2}{10(10-1)}} = 0.011474609652039\,\text{mm} \to 0.01\,\text{mm}$$

Finalmente, la incertidumbre combinada es:[i]

$$u_c(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0.0152206\,\text{mm} \to 0.02\,\text{mm}$$

El reporte del mejor estimado del diámetro de la muestra de canicas es el siguiente:

$$d = (19.54 \pm 0.02)\,\text{mm}$$

4.2. Incertidumbre combinada asociada a una medida indirecta

Los temas discutidos en las secciones 1 a 3 serán de utilidad para obtener la expresión que permite realizar la evaluación de la incertidumbre en la medida de un mensurando X que depende de un conjunto de N variables $\{x_i\}$. Es decir, X ahora representa a una medida indirecta. Para ello, se supone una relación funcional como la dada por la ec. (1) para representar al proceso de medición. A continuación se obtiene la ecuación de propagación de la incertidumbre para el caso de dos variables y posteriormente se extiende el resultado al caso general.[j]

En el caso de dos variables, considerar que se ha realizado un conjunto de n mediciones $\{x_{1,k}, x_{2,k} | k = 1, 2, \ldots, n\}$ que conducen a una medida indirecta $z = f(x_1, x_2)$. Para simplificar

[g]Es decir, d_1=19.50 mm, d_2 = 19.53 mm, ..., d_8 = 19.50 mm, d_9 = 19.53 mm, d_{10}=19.57 mm

[h]Para el redondeo de 19.545 mm se usó también la regla de redondeo al valor "par" más próximo que indica que si el dígito siguiente al último lugar retenido es un 5 y no hay dígitos más allá de ese número o son solamente ceros, dicho dígito se incrementará en una unidad si éste es impar, o dejando el dígito sin cambio si es par. Para mayor detalles respecto a cifras significativas y redondeos puede consultar el documento "Cifras significativas y su manejo en: `https://amyd.quimica.unam.mx/course/view.php?id=440&section=1`

[i]Para el cálculo numérico se empleó el valor de la incertidumbre tipo A sin redondear.

[j]Aunque el tratamiento general requiere el uso de series de Taylor de funciones de varias variables, la ecuación de propagación puede obtenerse considerando la definición de la diferencial, ec. (8).

el desarrollo, a continuación se usará la siguiente notación: $x_{1,k} = x_k$ y $x_{2,k} = y_k$. Se considera que $\bar{X}$ representa el valor promedio (mejor estimado) de la magnitud de entrada X_1, mientras que $\bar{Y}$ representa al mejor estimado de la magnitud de entrada X_2.

Ahora, se define el cálculo de la diferencia entre cada elemento del conjunto de mediciones y el mejor estimado de cada magnitud medida directamente (x y y) e indirectamente (z).

$$\Delta x_k = x_k - \bar{X}$$
$$\Delta y_k = y_k - \bar{Y}$$
$$\Delta z_k = z_k - \bar{Z}$$

Cada diferencia Δz también dependerá del error en cada uno de los valores medidos x_k y y_k. Mediante la ec. (7), se obtiene la aproximación:

$$\Delta z_k = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_k + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_k \tag{13}$$

que representa el error en la k-ésima medición de z proveniente de los correspondientes x_k y y_k.

Es de interés obtener una medida de la distribución de la varianza típica a partir de la ec. (10)[k] para las n determinaciones de z:

$$s^2(z) = \frac{1}{n-1} \sum_k^n (\Delta z_k)^2 \tag{14}$$

Al sustituir (13) en la ec. (14):

$$s^2(z) = \frac{1}{n-1} \sum_k^n \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_k + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_k\right]^2$$

Además, cada binomio al cuadrado dentro de la suma es

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_k + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_k\right]^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_k)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_k \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_k + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (\Delta y_k)^2$$

Por lo tanto, al sustituir en la ec. (14) y separar la suma en dos contribuciones, se obtiene

$$\begin{aligned} s^2(z) &= \frac{1}{n-1} \sum_j^n \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_j)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_j \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_j + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (\Delta y_j)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_j^n \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_j)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (\Delta y_j)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_j \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_j\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_j^n \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_j)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (\Delta y_j)^2\right] + \frac{1}{n-1} \sum_j^n \left[2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x_j \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y_j\right] \end{aligned}$$

[k]Tomar en cuenta que la varianza típica es el cuadrado de la desviación típica.

La segunda suma del tercer renglón se puede asociar con una covarianza donde aparece la influencia de unas magnitudes de entrada sobre las otras. Sin embargo, para variables estadísticamente independientes, se asumirá que la covarianza es despreciable.

Considerando únicamente la primera suma del tercer renglón en el desarrollo anterior, se encuentra que

$$s^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{n-1}\sum_j^n (x_j - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{n-1}\sum_j^n (y_j - \bar{y})^2$$

Es decir:

$$s^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 s^2(x) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 s^2(y)$$

Si la expresión anterior se divide entre n, se puede obtener la varianza típica de la media, que para medidas indirectas representará a la incertidumbre combinada.

$$u_c^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 u_c(x)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 u_c(y)^2 \tag{15}$$

Nótese que en la ec. (15) se utilizaron las incertidumbres combinadas de las medidas directas calculadas a través de la ec. (12), esto se hace así para asegurar que se están considerando también las contribuciones de la incertidumbre tipo B a las medidas directas.

Generalizando para N magnitudes de entrada $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, la varianza combinada está dada por:

$$u_c^2(z) = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 u_c(x_i)^2\right] \tag{16}$$

Se debe enfatizar que en la ec. (16), N se refiere al número de variables de entrada de las que depende la medida indirecta. Por ejemplo, en la ec. (15) se tiene la suma de dos términos porque z depende de dos variables.

De manera general, la *ley de propagación de la incertidumbre* se escribe de la siguiente manera:[l]

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u_c(x_i)^2\right]} \tag{17}$$

Nótese que los términos $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ son conocidos como los 'coeficientes de sensibilidad'.[m]

[l] Se debe hacer notar que esta expresión se ha obtenido para variables estadísticamente independientes. Cuando esto no es el caso, se deben incluir los términos de covarianza. Por ahora es suficiente con emplear esta aproximación.

[m] De acuerdo a la Guia para la expresión de incertidumbre de medida (Referencia 7), los coeficientes de sensibilidad describen çómo varía la estimación de salida -medida indirecta- z, en función de las variaciones en los valores de las estimaciones de entrada x, y

Ejemplos

1. Determinar el mejor estimado del volumen, en m^3, de la muestra de canicas del ejemplo de la sección anterior.

   Se usará el valor del mejor estimado del diámetro y su incertidumbre combinada asociada $d = (19.54 \pm 0.02)\,\mathrm{mm} = (0.01954 \pm 0.00002)\,\mathrm{m}$.

   El volumen de una esfera se encuentra con la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. Sin embargo, el radio de las canicas no se obtuvo directamente sino que se midió su diámetro ($d = r/2$). Entonces se debe re-escribir la expresión en términos del diámetro:

$$V = \frac{4\pi\, r^3}{3} = \frac{\pi\, d^3}{6}$$

$$V = \frac{\pi\ (0.01954\,\mathrm{m})^3}{6} = 3.9063603257 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

   El volumen depende únicamente de una variable, por lo tanto al aplicar la expresión de la ley de propagación de la incertidumbre, ec. (17), se tiene que

$$\begin{aligned} u_c(V) &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 u_c(d)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\pi d^2}{6}\right)^2 u_c(d)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi d^2}{2}\right)^2 u_c(d)^2} \end{aligned}$$

   Al usar la propiedad de los exponentes $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = ab$, donde $a = \frac{\pi d^2}{2}$ y $b = u_c(d)$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_c(V) = \left(\frac{\pi d^2}{2}\right) u_c(d)\ &= \left(\frac{\pi\,(0.01954\,\mathrm{m})^2}{2}\right)(0.00002\,\mathrm{m}) \\ &= 1.19949652 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} = 0.0119949652 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

   El mejor estimado del volumen de las canicas se presenta con el redondeo correspondiente:[n]

$$V = (3.906 \times 10^{-6} \pm 0.012 \times 10^{-6})\ \mathrm{m}^3$$

[n] En este ejemplo se está considerando que, para la operación de multiplicación y potencia, el resultado se presenta con el número de cifras significativas de aquel valor que contenga el menor número de cifras significativas. El diámetro se presenta con 4 cifras significativas, por lo que el volumen también se escribe con 4 cifras significativas. Posteriormente, la incertidumbre asociada se redondeo para que haya congruencia entre los valores reportados.

2. Conocidos los mejores estimados de resistencia, R y de diferencia potencial ΔV, determinar el mejor estimado de la corriente eléctrica a través del resistor.

   Experimentalmente se determinaron los mejores estimados $\Delta V = (7.35 \pm 0.03)$ V y $R = (1.1 \pm 0.1)$ kΩ. La corriente eléctrica depende de R y de ΔV de acuerdo a la expresión

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{7.35\,\mathrm{V}}{1.1\times\ 10^3\ \Omega} = 6.68181818 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}$$

   En el ejercicio *c)* de la sección 2.3 ya se han calculado las derivadas parciales necesarias para el desarrollo de la ley de propagación de la incertidumbre. Aplicando la ec. (17) para este caso

$$u_c(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial \Delta V}\right)^2 u_c^2(\Delta V) + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 u_c^2(R)}$$

   Entonces:[ñ]

$$\begin{aligned} u_c(I) &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 u_c(\Delta V)^2 + \left(-\frac{\Delta V}{R^2}\right)^2 u_c(R)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1.1\times 10^3\,\Omega}\right)^2 (0.03\,\mathrm{V})^2 + \left(\frac{7.35\,\mathrm{V}}{(1.1\times 10^3\,\Omega)^2}\right)^2 (0.1\times 10^3\,\Omega)^2} \\ &= 6.080499531926 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

   El mejor estimado se reporta como:[o]

$$I = (6.7\times 10^{-3} \pm 0.6\times 10^{-3})\ \mathrm{A} = (6.7 \pm 0.6)\,\mathrm{mA}$$

Ejercicio

Se construyó un circuito en serie con una fuente de alimentación, dos resistores y una celda de conductividad, como se muestra en la siguiente figura para estudiar el cambio en la conductividad de un medio líquido como función de la concentración de un electrolito fuerte disuelto.

[ñ] En el segundo renglón del desarrollo se ha aplicado que $(-1)^2$=1

[o] Nuevamente, se considera que el resultado se presenta con el número de cifras significativas de aquel valor que contenga el menor número de cifras significativas. La resistencia tiene el menor número de cifras significativas, que es dos. Por ello I se escribe con dos cifras significativas.

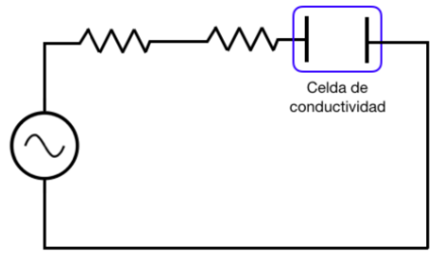


Figura 1: Diagrama del circuito eléctrico con una celda de conductividad

La conductividad, κ, de un medio líquido se define a través de la relación que existe entre la conductancia (L) y las dimensiones de la celda electrolítica empleada, la cual está delimitada por la distancia de separación entre los electrodos (l) y el área (A) de los mismos:

$$\kappa = L\frac{l}{A}$$

Sin embargo, no es posible medir directamente ni la conductancia ni el área de los electrodos. Se miden la resistencia (R) de los resistores, las diferencias de potencial a través de los resistores (ΔV_R) y de los electrodos (ΔV_C), así como el largo (d_1) y el ancho de los electrodos (d_2). La expresión de κ como función de las magnitudes que se midieron directamente es:

$$\kappa = \frac{\Delta V_R\ l}{\Delta V_C\ R\ d_1\ d_2} \tag{18}$$

Desarrolle la expresión de ley de propagación de la incertidumbre asociada a κ.

Respuesta:

La conductividad κ depende de seis variables ($n = 6$) que se midieron directamente. La ec. (17) para este caso particular se convierte en:

$$u_c(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta V_R}\right)^2 u_c^2(\Delta V_R) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\, l}\right)^2 u_c^2(l) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta V_C}\right)^2 u_c^2(\Delta V_C) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial R}\right)^2 u_c^2(R) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial d_1}\right)^2 u_c^2(d_1) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial d_2}\right)^2 u_c^2(d_2)}$$

$$u_c(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{l}{\Delta V_C\ R\ d_1\ d_2}\right)^2 u_c^2(\Delta V_R) + \left(\frac{\Delta V_R}{\Delta V_C\ R\ d_1\ d_2}\right)^2 u_c^2(l) + \left(\frac{-\Delta V_R\ l}{(\Delta V_C)^2\ R\ d_1\ d_2}\right)^2 u_c^2(\Delta V_C) + \left(\frac{-\Delta V_R\ l}{\Delta V_C\ R^2\ d_1\ d_2}\right)^2 u_c^2(R) + \left(\frac{-\Delta V_R\ l}{\Delta V_C\ R\ (d_1)^2\ d_2}\right)^2 u_c^2(d_1) + \left(\frac{-\Delta V_R\ l}{\Delta V_C\ R\ d_1\ (d_2)^2}\right)^2 u_c^2(d_2)}$$

La expresión anterior se puede simplificar si se aplica que $(-1)^2 = 1$ y se factoriza $\kappa^2 = \left(\frac{\Delta V_R\, l}{\Delta V_C\; R\, d_1\; d_2}\right)^2$, ver ec. (18), dentro de la raíz cuadrada para llegar a:

$$u_c(\kappa) = \kappa\,\sqrt{\left(\frac{u_c(\Delta V_R)}{\Delta V_R}\right)^2 + \left(\frac{u_c(l)}{l}\right)^2 + \left(\frac{u_c(\Delta V_C)}{\Delta V_C}\right)^2 + \left(\frac{u_c(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_c(d_1)}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{u_c(d_2)}{d_2}\right)^2}$$

Nota:

En el último paso, después de la factorización, se empleó nuevamente la propiedad de los exponentes:

$$\sqrt{\kappa^2 b} = (\kappa^2 b)^{1/2} = (\kappa^2)^{1/2}(b)^{1/2} = \kappa b^{1/2} = \kappa\sqrt{b}.$$

En este caso, b es lo que está dentro de la raíz cuadrada que multiplica a κ en la expresión final de $u_c(\kappa)$.

5. Bibliografía

1. BIPM (Oficina de pesas y medidas), et. al, *Vocabulario internacional de metrología. Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados*, 3a. edición, Centro Español de Metrología, 2012.

2. D. Zill, W. Wright, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* 4a. edn. McGraw-Hil. México. 2011.

3. J. Stewart, *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.*, 7a. edición, Cengage, 2012.

4. M. M. Pérez Hernández, "Estimación de incertidumbres. Guía GUM", *Revista Española de Metrología*, pags. 113–130 (2012).

5. H. W. Coleman, W. G. Steele, "Engineering Application of Experimental Uncertainty Analysis", *AIAA Journal*, vol. **33**, pags. 1888–1896 (1995).

6. J. M. Martín del Campo, "Incertidumbre en datos experimentales", Instituto de Física, UNAM, `https://www.fisica.unam.mx/personales/crespo/es/Estudiantes_files/EVALINCERT-2003.pdf`

7. Grupo de Trabajo 1 del Comité Conjunto de Guías en Metrología, "Evaluación de datos de medición - Guía para la expresión de la incertidumbre de medida", 3a. edn. Centro Español de Metrología, 2009.

8. "Manual de prácticas para Laboratorio de Física", Facultad de Química, UNAM, 2017.