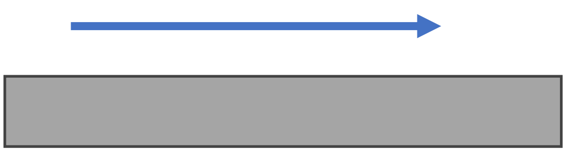
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química
Departamento de Ingeniería Metalúrgica
Introducción de la Ingeniería de Procesos Metalúrgicos y de Materiales

Profesor: Luis Enrique Jardón Pérez

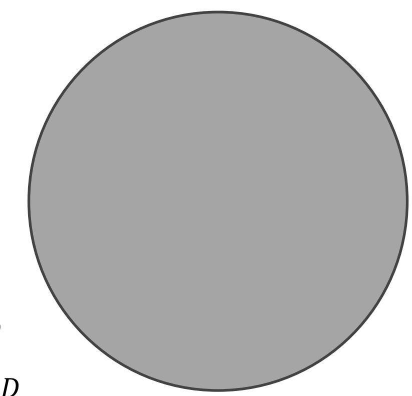
Ejemplo de Balance Macroscópico de Energía Mecánica
Ecuación de Bernoulli
(Flujo en una tubería)

Planteamiento del problema:

Se propone bombear plomo líquido a 1000 K. El flujo másico de plomo que se requiere bombear es de 1 tonelada métrica por hora. Se bombea a través de una tubería de 2 cm de diámetro y 100 m de longitud. Calcule la caída de presión requerida y la potencia teórica requerida por la bomba.



ΔP



Para una tubería de sección redonda totalmente llena

$$A_{\perp} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$P_{mojado} = \pi D$$

$$L = \frac{4A_{\perp}}{P_{mojado}} = D$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} L}{\mu}$$

Datos:

$$\mu_{Pb} = 0.012\frac{g}{cm\ s}$$

$$\rho_{Pb} = 10\frac{g}{cm^3}$$

$$\frac{e}{D} = 4x10^{-3}$$

Planteamiento del modelo matemático:

Suposiciones:
-Balance macroscópico de energía mecánica.
-Estado estacionario.
-El fluido es incompresible y newtoniano.
-Se considera que el flujo es a través de una tubería recta de sección redonda con diámetro contante.
-La velocidad a la que fluye el plomo es contante.
-El tubo se encuentra totalmente horizontal (no hay diferencia de alturas).
-El flujo es debido a una diferencia de presión.
-Se considera la fricción del fluido con la tubería.
-La diferencia de presión será subministrada por una bomba que ejerce trabajo sobre el líquido.

Ecuaciones gobernantes:
El flujo de plomo líquido esta gobernado por la conservación de energía mecánica, lo cual puede ser descrito por la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{\overline{v_2}^2}{2} - \frac{\overline{v_1}^2}{2} + g(h_2 - h_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + W' + E_f{}' = 0$$

A esta expresión de le pueden aplicar las suposiciones correspondientes. Primeramente, la velocidad es contante por lo que $\overline{v_2} = \overline{v_1}$:

$$g(h_2 - h_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + W' + E_f{}' = 0$$

Dado que la tubería se encuentra horizontal $h_2 = h_1$, por lo que:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + W' + E_f{}' = 0$$

Dado que la densidad es constante se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho}\int_{p_1}^{p_2} dp + W' + E_f{}' = 0$$

Por lo que:

$$\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + W' + E_f{}' = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + W' + E_f{}' = 0$$

Dado que el cálculo se divide en dos partes, una en la que se necesita calcular la diferencia de presión y otra en la que se calculará la potencia requerida para mover el fluido, usaremos las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + E_f{}' = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + W' = 0$$

Usando la primera para calcular la diferencia requerida para que la presión sea suficiente para contrarrestar la fricción de la tubería, y la segunda para conocer la potencia de la bomba que suministrará dicha diferencia de presión.

Condiciones de frontera:
Al ser un balance macroscópico no hay necesidad de colocar condiciones de frontera.

Condiciones iniciales:
Al ser estado estacionario no se necesitan condiciones iniciales.

Materiales:
Las propiedades del plomo fundido están en el planteamiento del problema, sin embargo, para trabajar es mejor tenerlas en unidades del sistema internacional.

$$\mu_{Pb} = 0.012\,\frac{g}{cm\ s}\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right) = 0.0012\,\frac{kg}{m\ s}$$

$$\rho_{Pb} = 10\,\frac{g}{cm^3}\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right)^3 = 10000\,\frac{kg}{m^3}$$

Solución:

Primeramente, usando el flujo másico se puede conocer la velocidad promedio a la que el plomo debe viajar por la tubería:

$$\dot{m} = \rho \bar{v} A_{\perp}$$

$$\bar{v} = \frac{\dot{m}}{\rho A_{\perp}}$$

Dado que el flujo másico es de 1 ton/h:

$$\dot{m} = 1\,\frac{ton}{h}\left(\frac{1000\ kg}{1\ ton}\right)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 0.2778\,\frac{kg}{s}$$

Y sabiendo que la tubería tiene una sección redonda contante de diámetro 2 cm:

$$A_{\perp} = \pi\frac{D^2}{4} = \pi\frac{(2\ cm)^2\left(\frac{1\ m}{100\ cm}\right)^2}{4} = 0.000314\ m^2$$

Por lo que:

$$\bar{v} = \frac{0.2778\,\frac{kg}{s}}{\left(10000\,\frac{kg}{m^3}\right)(0.000314\ m^2)} = 0.088\,\frac{m}{s}$$

Ahora bien, la energía mecánica pérdida por la fricción ($E_f{'}$) dentro de una tubería se puede obtener mediante la expresión:

$$E_f{'} = 2\, f_{fr}\left(\frac{L}{D}\right)\bar{v}^2$$

Donde:
f_{fr} es el factor de fricción, L es la longitud de la tubería, D es el diámetro interno de la tubería y $\bar{v}$ es la velocidad media del fluido dentro de la tubería.

El factor de fricción (f_{fr}) es una constante de proporcionalidad empírica que depende de diversos factores, en este caso usaremos el siguiente nomograma para poder estimarlo:

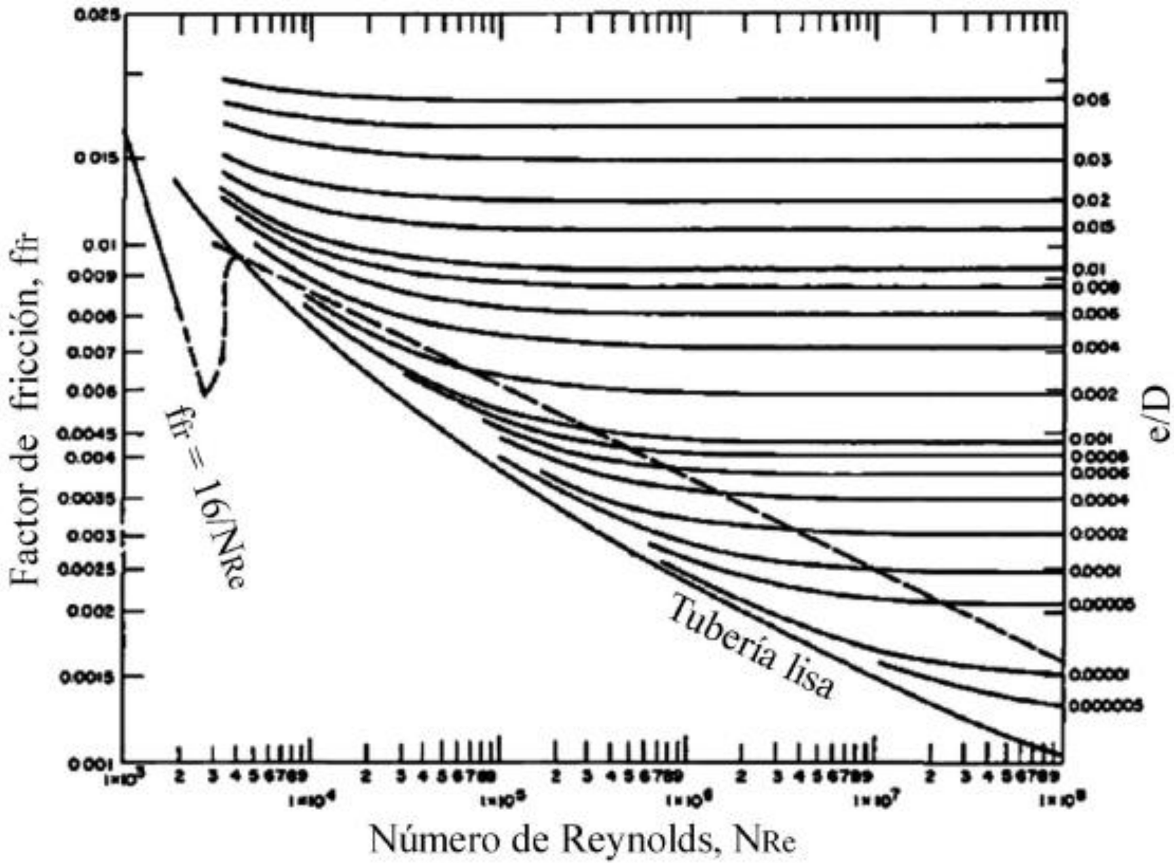


Figura.- Nomograma para estimar el factor de fricción.

Para ello requerimos el número de Reynolds (N_{Re}) y la rugosidad relativa (e/D). La rugosidad relativa es un dato que se nos proporciona en la descripción del problema, mientras que el número de Reynolds se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$$

$$N_{Re} = \frac{\left(10000 \frac{kg}{m^3}\right)\left(0.088 \frac{m}{s}\right)(2\ cm)\left(\frac{1\ m}{100\ cm}\right)}{\left(0.0012 \frac{kg}{m\ s}\right)}$$

$$N_{Re} = 14736.57$$

$$\frac{e}{D} = 4x10^{-3}$$

Una vez con ambos datos se procede a usar el nomograma para estimar el valor del factor de fricción:

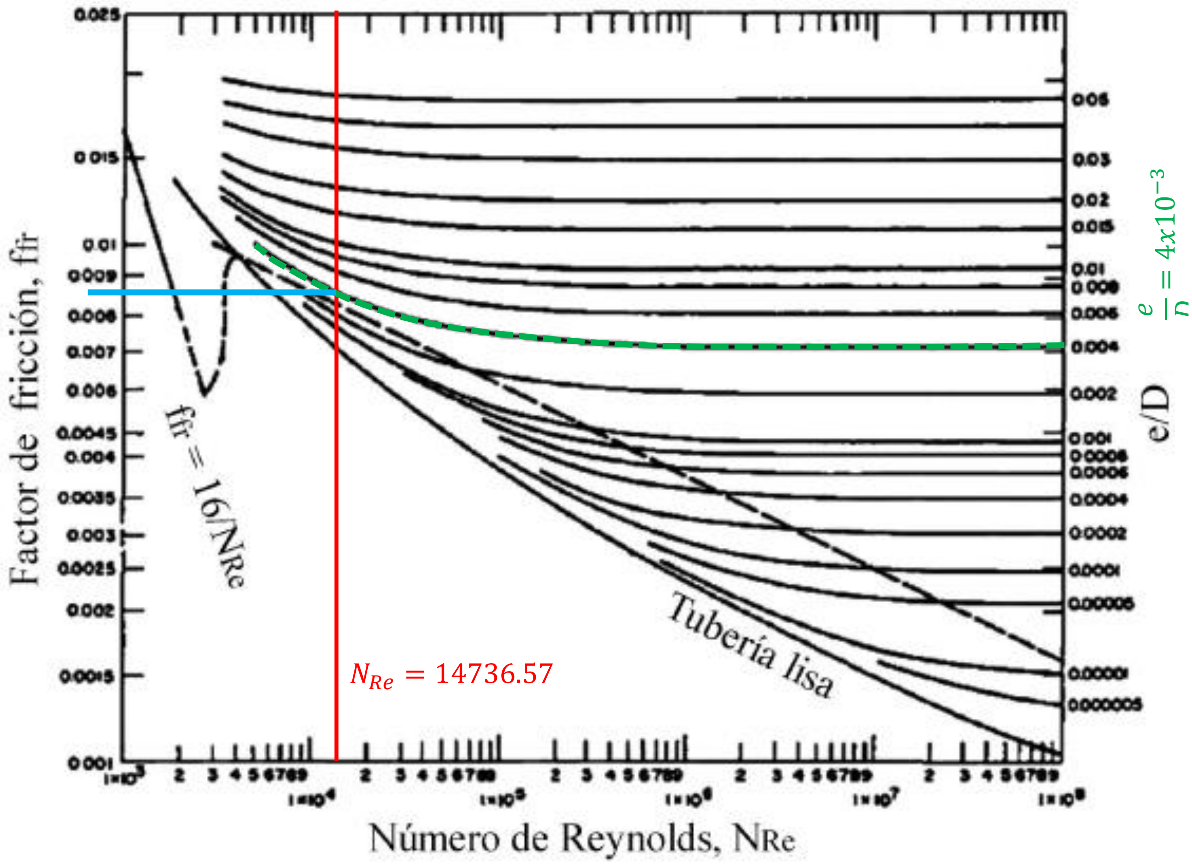


Figura.- Factor de fricción estimado con los datos del problema.

Del nomograma se puede leer que el factor de fricción estimado es:

$$f_{fr} \approx 0.0087$$

Con lo cual finalmente podemos sustituir en nuestra ecuación gobernante los valores:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + E_f{'} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + 2\, f_{fr}\left(\frac{L}{D}\right)\bar{v}^2 = 0$$

$$\Delta p = -2\rho\, f_{fr}\left(\frac{L}{D}\right)\bar{v}^2$$

$$\Delta p = -2\left(10000\frac{kg}{m^3}\right)(0.0087)\left(\frac{100\ m}{2\ cm\left(\frac{1\ m}{100\ cm}\right)}\right)\left(0.088\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\Delta p = -76924.89\frac{kg}{m\ s^2} = -76924.89\frac{N}{m^2} = -76924.89\ Pa$$

Finalmente, para estimar la potencia de la bomba empleamos la otra ecuación:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + W' = 0$$

$$W' = -\frac{1}{\left(10000\,\frac{kg}{m^3}\right)}\left(-76924.89\ \frac{kg}{m\,s^2}\right)$$

$$W' = 7.6925\,\frac{m^2}{s^2}$$

Y sabiendo que:

$$W' = \frac{W}{\dot{m}}$$

$$W = W'\dot{m}$$

$$W = \left(7.6925\,\frac{m^2}{s^2}\right)\left(0.2778\,\frac{kg}{s}\right)$$

$$W = 2.1368\ \frac{kg\,m^2}{s^3} = 2.1368\,W$$