Vectores en 2D

En los campos de la ciencia podemos encontrar cantidades o variables físicas que pueden ser clasificadas como escalares o vectoriales.

Una cantidad escalar es aquella que tiene un valor específico o magnitud que no depende de la dirección de análisis como por ejemplo la masa, el tiempo, la energía o la carga eléctrica.

Una cantidad vectorial es aquella que, además de tener una magnitud, tiene una dirección y sentido establecido dentro de un espacio euclidiano como por ejemplo la posición, la velocidad, la aceleración, la fuerza o la cantidad de movimiento.

Con la intención de familiarizarnos con las cantidades vectoriales, en esta presentación estudiaremos, matemáticamente, a los vectores en un espacio de dos dimensiones, los cuales se representan gráficamente con una flecha que inicia en un punto de aplicación y apunta en la dirección de acción.

Antes de iniciar con la descripción de los vectores es necesario mencionar que es requerida la existencia de un espacio euclidiano o euclídeo en el que está suscrito el vector. Por lo tanto, analizaremos brevemente algunas condiciones que definen al espacio euclidiano.

Vectores en 2D

El espacio euclidiano es un espacio geométrico que está definido por cuantos vectores canónicos tenga la dimensionalidad del problema.

Por ejemplo, si se requiere de un espacio euclidiano de una dimensión, entonces se requiere de un vector canónico. Si se requiere de un espacio de dos dimensiones, entonces se requieren dos vectores canónicos. Si se requiere de un espacio euclidiano de tres dimensiones, entonces se requieren tres vectores canónicos y así sucesivamente.

Los vectores canónicos son vectores adimensionales de magnitud uno (unitario) que indican la dirección creciente del espacio y “nacen” del mismo punto, denominado origen del espacio euclidiano. Las características de los vectores canónicos se irán mencionando a lo largo de las presentaciones.

Pensemos que se requiere construir un espacio euclidiano de una dimensión.

Para poder construir el espacio euclidiano en una dimensión necesitamos de un vector canónico unitario que denominaremos $\hat{\imath}$ el cual define al eje cartesiano x.

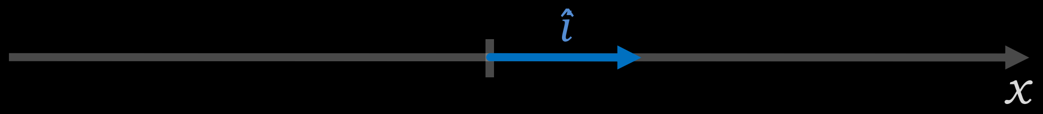
Si quisiéramos emplear otro eje cartesiano, por ejemplo, el eje cartesiano y se emplea el vector canónico $\hat{\jmath}$ pero si se quiere el eje cartesiano z entonces se emplea el vector canónico $\hat{k}$.

Vectores en 2D

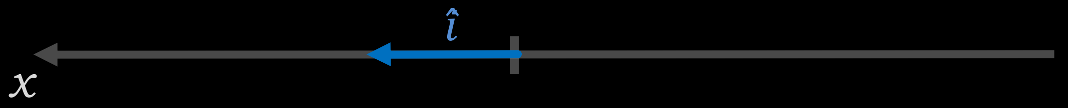
Supongamos que elegimos el vector canónico $\hat{\imath}$ y por lo tanto el eje cartesiano x para describir el espacio unidimensional que está comprendido entre "la derecha" y "la izquierda".

En la línea imaginaria que puede trazarse entre "la derecha" y "la izquierda" colocaremos un punto que está justo a la mitad, al cual llamaremos el origen y cuyo valor será cero.

Ahora bien, si se desea que a "la derecha" se encuentren los valores positivos del espacio unidimensional, entonces, el vector canónico $\hat{\imath}$, que empieza en el origen, deberá apuntar hacia "la derecha". Lo anterior se vería "gráficamente" de la siguiente forma:



Si se requiere que a "la izquierda" se encuentren los valores positivos del espacio unidimensional, entonces, el vector canónico $\hat{\imath}$, que empieza en el origen, deberá apuntar hacia "la izquierda". Lo anterior se vería "gráficamente" de la siguiente forma:



Ambos espacios son válidos y la elección de uno u otro espacio queda a tu entera disposición.

Vectores en 2D

Con la intención de ejemplificar el uso de los espacios euclidianos anteriores, supondremos que estás parado y a tu izquierda está un árbol. Si la distancia que te separa del árbol es 2.0 m, ¿cuál es la posición del árbol si consideramos que eres el origen?

Para poder resolver la pregunta sobre la posición del árbol debemos analizar un par de detalles:

- El texto ya nos mencionó en dónde está el origen.

- Se tiene que decidir hacia dónde apunta el vector canónico $\hat{\imath}$, es decir, hacia dónde son los positivos en el eje cartesiano x.

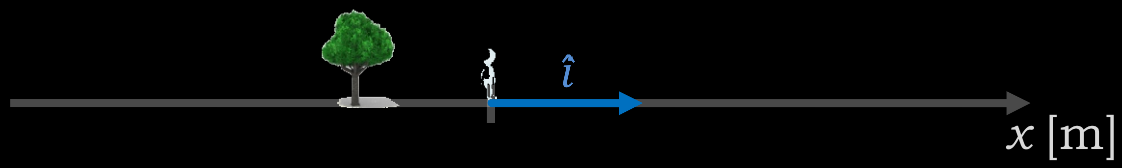
- Sin importar la dirección del vector canónico el árbol siempre se mantiene a la izquierda y a una distancia de 2.0 m.

- La posición del árbol será un número que está multiplicando al vector canónico elegido, en este caso $\hat{\imath}$. Dicho número está relacionado con la propiedad física distancia que se mide en [m].

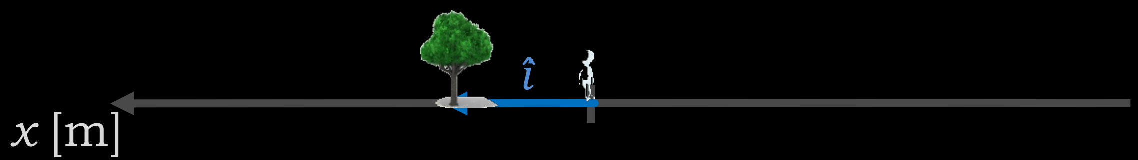
- Dado que hablaremos del vector posición, que se mide en [m], el eje cartesiano deberá colocarse en metros. Este detalle es importante, los ejes cartesianos siempre tienen la misma unidad que la cantidad vectorial.

Vectores en 2D

Consideremos que el vector canónico $\hat{\imath}$ apunta a “la derecha”, entonces, la posición del árbol será de – 2.0 m $\hat{\imath}$ pues el árbol está a la izquierda.



Pero si consideramos que el vector canónico $\hat{\imath}$ apunta a “la izquierda”, entonces, la posición del árbol será de 2.0 m $\hat{\imath}$ pues el árbol está a la izquierda.



Observa que el vector posición depende del espacio euclidiano elegido pero en ambos casos la distancia de separación entre el árbol y tú es la misma, 2.0 m.

Lo que acabamos de analizar es una de las principales características de una cantidad vectorial. Sus coordenadas dependen del espacio euclidiano elegido.

Lo anterior no sucedería si se analizara, por ejemplo, la masa del árbol. El valor de la masa del árbol no cambia como función de elegir si a la “la derecha” o a “la izquierda” están los positivos. Por eso la masa es una cantidad escalar.

Vectores en 2D

Analicemos el caso del espacio bidimensional, en donde es común emplear los vectores canónicos $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Como ya se mencionó, el vector canónico $\hat{\imath}$ define al eje cartesiano x mientras que el vector canónico $\hat{\jmath}$ define al eje cartesiano y, así que los vectores estarán en el plano cartesiano xy.

De manera análoga al caso unidimensional, los vectores que se sitúen en el espacio bidimensional ahora estarán compuestos por un número que multiplica al vector canónico $\hat{\imath}$ y otro número que multiplica al vector canónico $\hat{\jmath}$, y este conjunto de números se escribe como una suma.

Aquí requerimos mencionar a existencia de una propiedad de los vectores canónicos y es que estos deben ser perpendiculares entre ellos, es decir, deben formar un ángulo recto o, en otras palabras, formar entre ellos un ángulo de 90 grados o $\pi/2$ radianes.

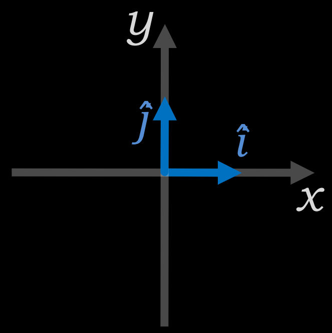
Ahora debemos de elegir hacia dónde apuntará el vector canónico $\hat{\imath}$ y hacia dónde apuntará el vector canónico $\hat{\jmath}$ para describir en qué dirección se considerará que están los positivos de cada eje cartesiano.

Cabe mencionar que el punto en el que se intersectan ambos ejes cartesianos será considerado el origen del espacio euclidiano.

Vectores en 2D

Para iniciar la construcción del espacio euclidiano bidimensional podemos proponer que el vector canónico $\hat{\imath}$ será empleado para diferenciar los positivos entre "la izquierda" y "la derecha" mientras que el vector canónico $\hat{\jmath}$ se utilizará para diferenciar los positivos entre "arriba" y "abajo" en un plano que vertical y paralelo con esta pantalla.

Ahora, diremos que el vector canónico $\hat{\imath}$ apunta hacia "la derecha" mientras que el vector canónico $\hat{\jmath}$ apunta hacia "arriba", lo que nos permite representar al espacio euclidiano bidimensional de la siguiente manera:



Observa que los dos vectores canónicos nacen del mismo punto, el cual corresponde con el origen del espacio euclidiano.

Ten presente que esta representación del espacio euclidiano es completamente arbitraria pues elegimos sin ningún criterio la dirección en la que apuntarían los vectores canónicos y, con ello, la dirección positiva de los ejes cartesianos.

Vectores en 2D

Asumiendo que el espacio euclidiano bidimensional está definido con la descripción anterior, ahora podemos suscribir cualquier vector en dicho espacio.

Como fue mencionado previamente, cualquier vector $\vec{V}$ que sea colocado en el espacio euclidiano deberá estar referido como la suma del producto de un número (x) que multiplica al vector canónico $\hat{\imath}$ y otro número (y) que multiplica al vector canónico $\hat{\jmath}$, según:

$$\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

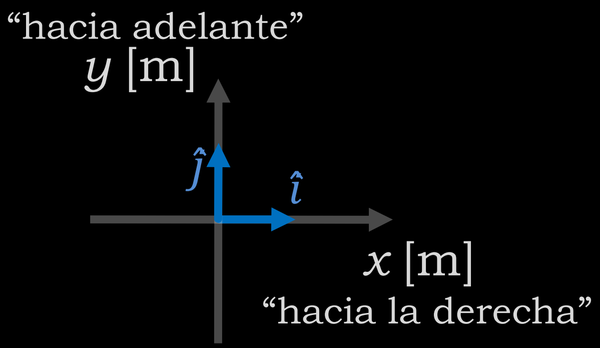
Esta representación es denominada “notación canónica del vector”.

Para ejemplificar la notación canónica, pensemos que estás parado en algún sitio de una explanada (este punto será el origen del espacio euclidiano) y caminas 3.0 m “hacia adelante” para luego girar a “la derecha” y caminar 4.0 m más.

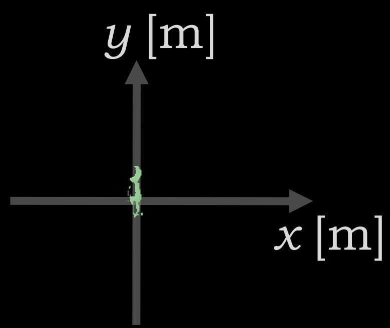
Si asumimos que “hacia adelante” coincide con el vector canónico $\hat{\jmath}$ (eje cartesiano y) y que hacia “la derecha” coincide con el vector canónico $\hat{\imath}$ (eje cartesiano x) podemos representar gráficamente el vector posición asociado con el movimiento que acabamos de describir.

CUIDADO: Es posible plantear este espacio euclidiano porque “hacia adelante” y “hacia la derecha” forman un ángulo recto.

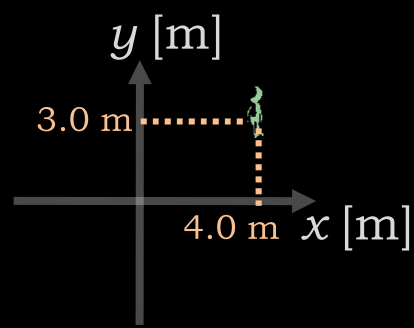
Vectores en 2D



Espacio euclidiano.



Punto de partida



Punto final

De esta forma, podemos establecer que el vector de posición final, en notación canónica, es:

$$\vec{V} = 4.0\ [m]\hat{\imath} + 3.0[m]\hat{\jmath}$$

Sin embargo, las cantidades vectoriales pueden ser representadas de diversas formas, por ejemplo, pueden ser expresado en notación:

- Coordenadas cartesianas.
- Matricial.
- Coordenadas polares.

Vectores en 2D

En la notación de coordenadas cartesianas se ordenan los valores asociados al eje cartesiano x y al eje cartesiano y dentro de un paréntesis, separando los valores mediante una coma.

$$\vec{V}(x, y)$$

Observa que en esta notación no se emplean los vectores canónicos ni el signo de igualdad.

Si retomamos el ejemplo del movimiento en una explanada, el vector posición final, en notación de coordenadas cartesianas, es:

$$\vec{V}(4.0, 3.0)\ m$$

En la notación matricial el vector se escribe dentro de un paréntesis, formando una columna, en la que el valor asociado al eje cartesiano y se encuentra por debajo del valor de la coordenada cartesiana x.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observa que en esta notación no se emplean los vectores canónicos.

Si retomando el ejemplo del movimiento en una explanada, el vector posición final, en notación matricial, es:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 4.0\ m \\ 3.0\ m \end{pmatrix}$$

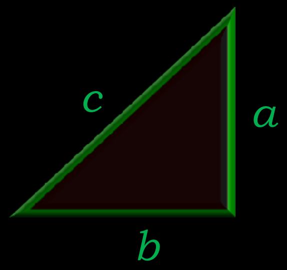
Vectores en 2D

La notación de coordenadas polares de un vector está compuesta de dos elementos: la magnitud del vector, también denominada norma, tamaño o módulo, y el ángulo que forma el vector, que inicia en el origen del espacio euclidiano, con respecto a uno de los ejes cartesianos.

Para analizar con mayor solidez esta expresión vectorial, es necesario retomar los conceptos mínimos sobre triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras.

Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo, el cual está definido cuando dos de sus lados forman un ángulo recto, como el que se muestra en la imagen:

En el triángulo, el lado a y el lado b forman un ángulo recto entre ellos y dentro de la geometría de Pitágoras, podemos describir que la relación entre los tamaños de los lados es:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

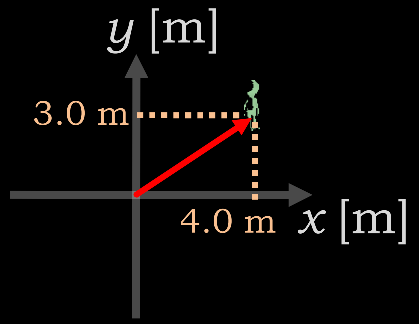
Ahora bien, como los lados a y b del triángulo forman un ángulo recto, estos pueden relacionarse con los valores que corresponden a las coordenadas cartesianas del vector ya que estos también forman un ángulo recto cuando se ven desde la perspectiva de los vectores canónicos $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Dado lo anterior, podemos asumir que si los lados del triángulo rectángulo representan las componentes cartesianas de un vector en dos dimensiones, entonces la hipotenusa de dicho triángulo corresponde con el tamaño del vector, es decir, con su magnitud, de tal forma que la magnitud de un vector se determina como:

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De esta forma tenemos el primer elementos de la notación polar, la magnitud.

Si retomamos el ejemplo en el caminas en una explanada terminando en un punto de coordenadas cartesianas (4.0, 3.0) m y hacemos una representación gráfica empleando una flecha para describir al vector posición, tenemos:



En donde la magnitud del vector posición será:

$$|\vec{V}| = \sqrt{(4.0)^2 + (3.0)^2} = 5.0\ m$$

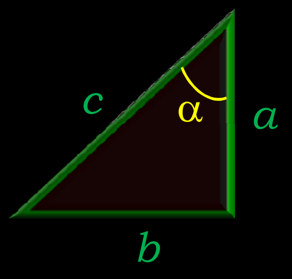
Observa que las unidades de la magnitud del vector corresponden con las unidades de las componentes cartesianas así como que la “flecha”, que representa al vector, inicia en el origen y termina en el punto de coordenadas.

Para analizar el segundo elemento, el ángulo que forma el vector con respecto a un eje cartesiano, es necesario comprender el concepto cateto adyacente.

En la geometría de Pitágoras denominamos al cateto adyacente como el lado del triángulo desde el cual se mide el ángulo que existe desde el lado elegido a la hipotenusa.

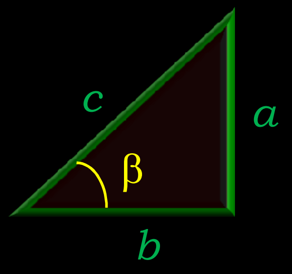
Retomando el triángulo rectángulo de lados *a* y *b*, cuya hipotenusa es *c*, podemos elegir como cateto adyacente a cualquiera de los dos lados.

Si consideramos que el cateto adyacente será el lado *a*, entonces el ángulo que se estaría calculando es α y se determinaría con la siguiente ecuación:



$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Si consideramos que el cateto adyacente será el lado *b*, entonces el ángulo que se estaría calculando es β y se determinaría con la siguiente ecuación:



$$\cos\beta = \frac{b}{c}$$

En donde se satisface, siguiendo la geometría de los triángulos rectángulos, que:

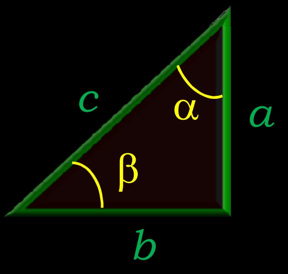
$$\alpha + \beta = 90 \text{ grados}$$

De esta forma podemos generalizar que sin importar que lado del triángulo sea el cateto adyacente, éste siempre se determina con la identidad trigonométrica coseno.

Cabe mencionar que en la geometría de Pitágoras al otro lado del triángulo que no se emplea para determinar el ángulo se le denomina cateto opuesto y está relacionado con la identidad trigonométrica seno.

Dado lo anterior, podemos plantear las siguientes dos situaciones:

Si consideramos que el cateto adyacente es el lado a con el ángulo α y el cateto opuesto es el lado b, entonces:



$$cos\,\alpha = \frac{a}{c} \qquad sen\,\alpha = \frac{b}{c}$$

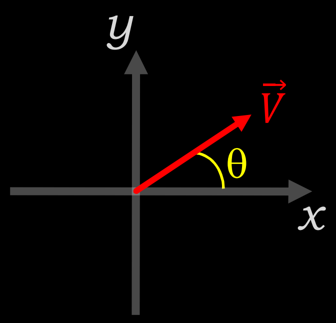
Si consideramos que el cateto adyacente es el lado b con el ángulo β y el cateto opuesto es el lado a, entonces:

$$cos\,\beta = \frac{b}{c} \qquad sen\,\beta = \frac{a}{c}$$

Con lo que se puede establecer:

$$\frac{a}{c} = cos\,\alpha = sen\,\beta \qquad \frac{b}{c} = cos\,\beta = sen\,\alpha$$

Ahora bien, en el caso de los vectores en dos dimensiones, por convención, acordaremos que el ángulo que forma el vector, el cual denominaremos θ, será medido con respecto al eje cartesiano *x*; es decir, la componente cartesiana *x* de un vector será el cateto adyacente y la componente cartesiana *y* será el cateto opuesto, de forma que:



$$\cos\theta = \frac{x}{|\vec{V}|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|\vec{V}|}$$

En este momento podemos aplicar la función trigonométrica "tangente" que se define con la división de la función seno entre la función coseno, cuando el argumento de las funciones es el mismo, es decir senθ/cosθ = tanθ.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

CUIDADO: Lo anterior no sucede siempre, es sólo un acuerdo para evitar confusiones y siempre tendrás que estar atento al texto del ejercicio para saber con respecto a qué eje cartesiano se está solicitando el ángulo del vector, pero si el texto no hace referencia a esta información, entonces, deberás calcular el ángulo considerando que el eje cartesiano *x* es el cateto adyacente.

Vectores en 2D

Una consecuencia de elegir que el eje cartesiano *x* será el eje cartesiano de referencia para medir el ángulo que forma el vector, lo cual denominamos dirección del vector, es que podemos dividir el espacio euclidiano bidimensional en cuatro secciones, conocidas como cuadrantes, como función de dicho ángulo. En cada cuadrante se tiene una característica numérica de las coordenadas cartesianas del vector así como un valor permitido para el ángulo, las cuales se resumen a continuación:

SEGUNDO CUADRANTE

(x^-, y^+)

$90 < \theta < 180$ grados

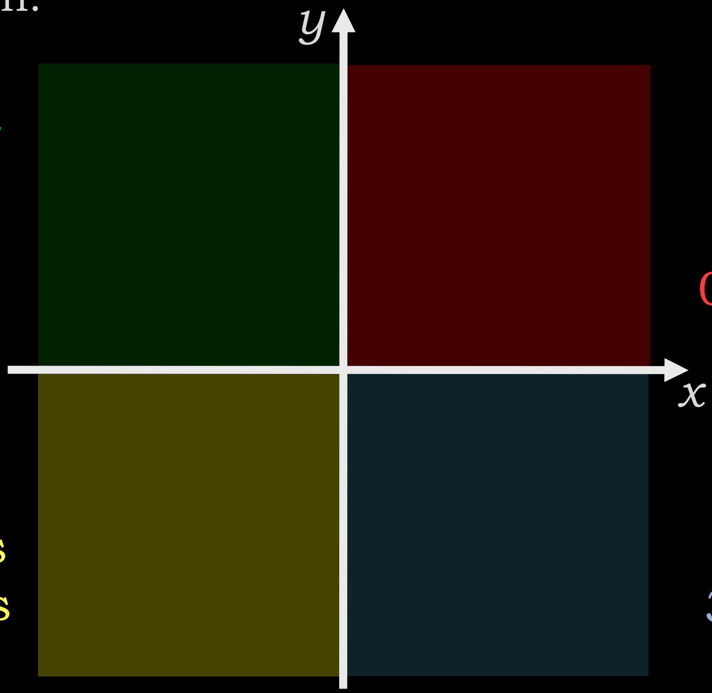
$\pi/2 < \theta < \pi$ radianes

PRIMER CUADRANTE

(x^+, y^+)

$0 < \theta < 90$ grados

$0 < \theta < \pi/2$ radianes



TERCER CUADRANTE

(x^-, y^-)

$180 < \theta < 270$ grados

$\pi < \theta < 3\pi/2$ radianes

CUARTO CUADRANTE

(x^+, y^-)

$270 < \theta < 360$ grados

$3\pi/2 < \theta < 2\pi$ radianes

CUIDADO: la función tangente siempre brindará el ángulo naciente desde el eje cartesiano que está en el “denominador” hacia el eje cartesiano que está en el “numerador” así que algunas veces este ángulo tendrá que se corregido.

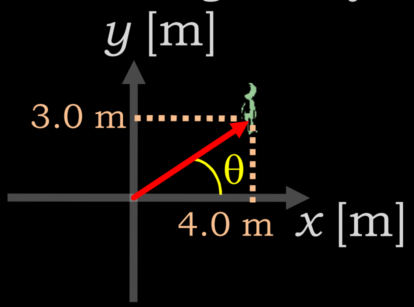
Vectores en 2D

De esta forma, ahora tenemos las herramientas para describir un vector en dos dimensiones en la notación de coordenada polares, magnitud y dirección.

Si retomamos el ejemplo de caminar en la explanada, en donde el vector posición final es, en coordenadas cartesianas, (4.0, 3.0) m podemos establecer que su dirección, en coordenadas polares, es:

$$tan\,\theta = \frac{3.0}{4.0} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{3.0}{4.0}\right) \quad \ldots \quad \theta = 36.9 \text{ grados}$$

Finalmente, podemos expresar al vector en coordenadas polares conjuntando la información de la magnitud y la dirección.



$$|\vec{V}| = 5.0\ m \qquad \theta = 36.9 \text{ grados}$$

A modo de resumen, el vector posición final puede expresarse en:

$$\vec{V} = 4.0\ [m]\hat{\imath} + 3.0[m]\hat{\jmath}$$

Notación canónica

$$\vec{V}(4.0, 3.0)\ m$$

Coordenadas cartesianas

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 4.0\ m \\ 3.0\ m \end{pmatrix}$$

Notación matricial

$$|\vec{V}| = 5.0\ m \quad \theta = 36.9 \text{ grados}$$

Coordenadas polares

Cabe mencionar que existen dos tipos de vectores que requieren de "especial" atención cuando nos referimos a un espacio euclidiano bidimensional.

• El vector nulo cuyas componentes cartesianas son (0, 0). Este vector expresado en coordenadas polares tiene magnitud cero y no posee dirección.

• Los vectores en los que una de sus componentes cartesianas es cero. Estos vectores son cuatro y pueden generalizarse de la siguiente forma:

1) $\vec{V}(x^+, 0)$. Este vector está sobre el eje cartesiano x positivo. Su magnitud será igual al valor absoluto de la componente cartesiana diferente de cero y su dirección es 0.0 grados.

2) $\vec{V}(0, y^+)$. Este vector está sobre el eje cartesiano y positivo. Su magnitud será igual al valor absoluto de la componente cartesiana diferente de cero y su dirección es 90.0 grados.

3) $\vec{V}(x^-, 0)$. Este vector está sobre el eje cartesiano x negativo. Su magnitud será igual al valor absoluto de la componente cartesiana diferente de cero y su dirección es 180.0 grados.

4) $\vec{V}(0, y^-)$. Este vector está sobre el eje cartesiano y negativo. Su magnitud será igual al valor absoluto de la componente cartesiana diferente de cero y su dirección será 270.0 grados.

Ejercicio 1.

Expresa los siguientes vectores en coordenadas polares.

i. $\vec{A}\,(3,\,2)$ m

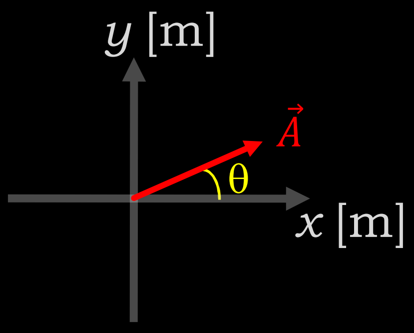
ii. $\vec{B}\,(-1,\,5)$ m/s

iii. $\vec{C}\,(-3,\,-3)$ N

iv. $\vec{D}\,(4,\,-2)$ m/s^2

En este tipo de ejercicios es importante identificar en qué cuadrante está situado el vector para determinar correctamente la dirección del vector, según lo establecido en la diapositiva 16.

Inciso i. El vector tiene coordenadas cartesianas positivas tanto en el eje cartesiano x como en el eje cartesiano y, tal y como puede apreciarse en la representación.



Aplicando la relación que existe entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares, tenemos:

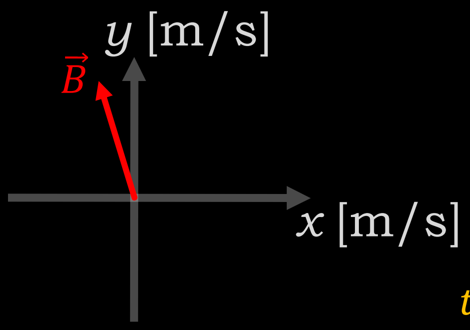
$$|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = 3.6\ m$$

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad \dots \quad tan\,\theta = \frac{2}{3} \quad \dots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad \dots \quad \theta = 33.7 \text{ grados}$$

El ángulo corresponde al intervalo válido para el primer cuadrante.

Vectores en 2D

Inciso ii. El vector tiene coordenadas cartesianas negativa en el eje cartesiano x pero positiva en el eje cartesiano y, tal que:

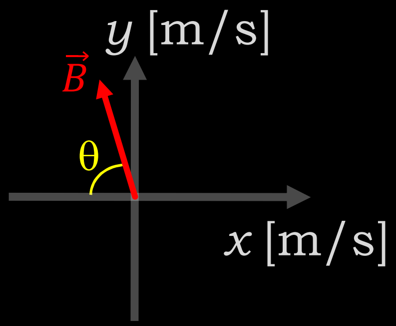


Aplicando la relación que existe entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares, tenemos:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = 5.1\ m/s$$

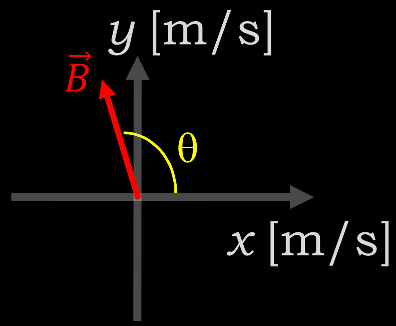
$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad tan\,\theta = \frac{5}{-1} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{5}{-1}\right) \quad \ldots \quad \theta = -78.7 \text{ grados}$$

En esta ocasión el cálculo nos da un valor negativo para θ pero eso no tiene coherencia con el acuerdo de la diapositiva 16, en donde un vector en segundo cuadrante tiene un intervalo válido para el ángulo entre 90 y 180 grados. Lo que sucedió es que la función tangente nos permite determinar el ángulo a partir de la relación "cateto opuesto/cateto adyacente" y al sustituir los valores de las coordenadas del vector (–1, 5) m/s estamos asumiendo que el cateto adyacente es "–1" por lo que se está calculando el ángulo mostrado en la imagen.



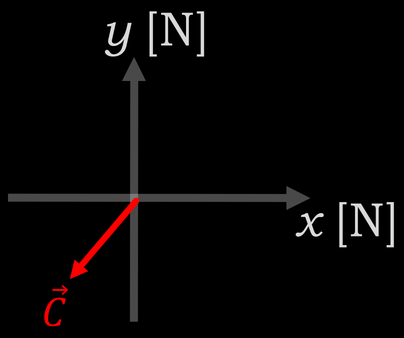
La forma de corregir este detalle es sumando 180 grados al valor de θ calculado para así tener el ángulo respecto al eje cartesiano x positivo.

θ = 180 – 78.7= 101.3 grados



Por lo que las coordenadas polares serán: $|\vec{B}| = 5.1\ m/s \quad \theta = 101.3$ grados

Inciso iii. El vector tiene coordenadas cartesianas negativa tanto en el eje cartesiano x como en el eje cartesiano y, tal que:

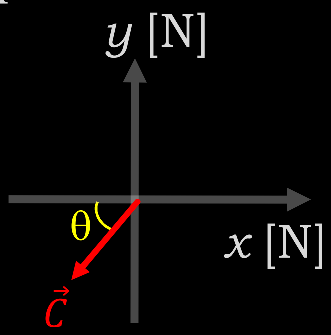


Aplicando la relación que existe entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares, tenemos:

$$|\vec{C}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 4.2 \text{ N}$$

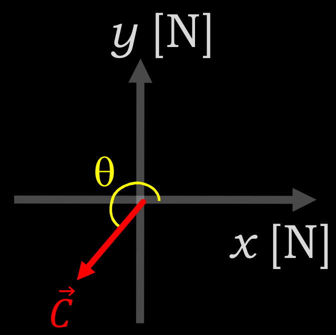
$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad tan\,\theta = \frac{-3}{-3} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{-3}{-3}\right) \quad \ldots \quad \theta = 45.0 \text{ grados}$$

En esta ocasión el cálculo nos da un valor positivo para θ pero eso no tiene coherencia con el acuerdo de la diapositiva 16, en donde un vector en tercer cuadrante tiene un intervalo válido para el ángulo entre 180 y 270 grados. Al igual que en el inciso anterior cuando sustituimos los valores de las coordenadas del vector (–3, –3) N estamos asumiendo que el cateto adyacente es “–3” por lo que se está calculando el ángulo mostrado en la imagen.



La forma de corregir este detalle es sumando 180 grados al valor de θ calculado para así tener el ángulo respecto al eje cartesiano x positivo.

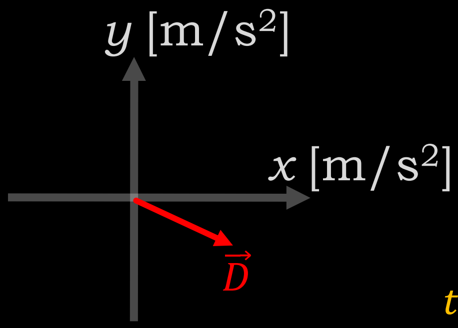
$$\theta = 180 + 45.0 = 225.0 \text{ grados}$$



Por lo que las coordenadas polares serán: $|\vec{C}| = 4.2 \text{ N} \quad \theta = 225.0 \text{ grados}$

Vectores en 2D

Inciso iv. El vector tiene coordenadas cartesianas positiva en el eje cartesiano x pero negativa en el eje cartesiano y, tal que:

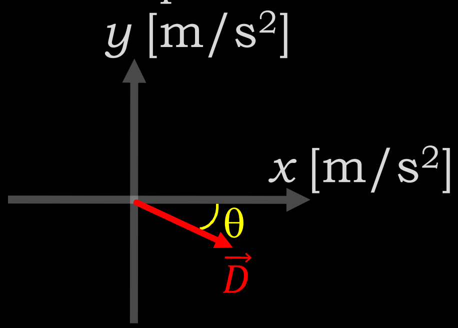


Aplicando la relación que existe entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares, tenemos:

$$|\vec{D}| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = 4.5\ m/s^2$$

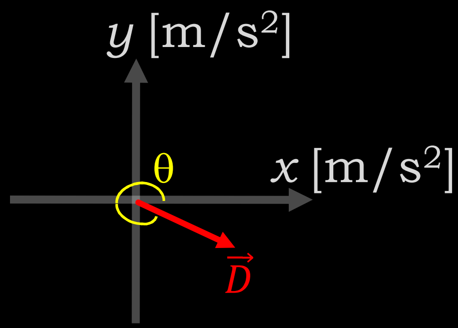
$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad tan\,\theta = \frac{-2}{4} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{-2}{4}\right) \quad \ldots \quad \theta = -26.6 \text{ grados}$$

En esta ocasión el cálculo nos da un valor negativo para θ pero eso no tiene coherencia con el acuerdo de la diapositiva 16, en donde un vector en cuarto cuadrante tiene un intervalo válido para el ángulo entre 270 y 360 grados. Al igual que en los incisos anteriores cuando sustituimos los valores de las coordenadas del vector (4, –2) m/s^2 estamos asumiendo que el cateto adyacente es "4" pero midiendo hacia "–2" por lo que el ángulo calculado es.



La forma de corregir este detalle es sumando 360 grados al valor de θ calculado para así tener el ángulo respecto al eje cartesiano x positivo.

θ = 360 – 26.6 = 333.4 grados



Por lo que las coordenadas polares serán: $|\vec{D}| = 4.5\ m/s^2 \quad \theta = 333.4 \text{ grados}$

Ejercicio 2.

Expresa los siguientes vectores en coordenadas cartesianas y en notación canónica.

i. $|\vec{A}| = 50.0\, m$ con ángulo de 20.0 grados respecto al eje cartesiano x positivo y situado en el primer cuadrante.

ii. $|\vec{B}| = 30.0\, m/s$ con ángulo de 15.0 grados respecto al eje cartesiano y positivo y situado en el primer cuadrante.

iii. $|\vec{C}| = 15.0\,\mathrm{N}$ con ángulo de 40.0 grados respecto al eje cartesiano x negativo y situado en el segundo cuadrante.

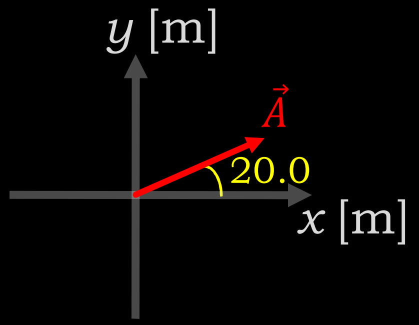
iv. $|\vec{D}| = 7.2\, m$ con ángulo de 10.0 grados respecto al eje cartesiano y negativo y situado en el tercer cuadrante.

En este tipo de ejercicios es importante identificar de qué eje cartesiano se está midiendo la dirección del vector pues como fue mencionado, el valor del vector en este eje será determinado con la función trigonométrica coseno mientras que la otra componente cartesiana será calculada con la función trigonométrica seno.

Además, deberemos tener cuidado con el signo en cada componente cartesiana para ser coherentes con el acuerdo adquirido en la diapositiva 16.

Vectores en 2D

Inciso i. El vector tiene magnitud de 50.0 m con dirección de 20.0 grados respecto al eje cartesiano x positivo y en el primer cuadrante, de tal forma que:



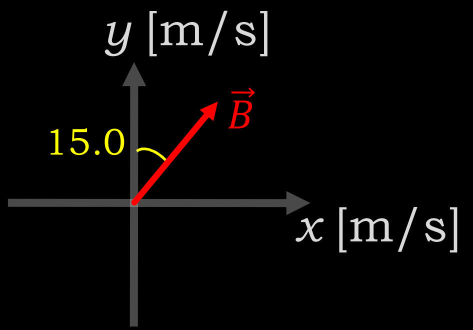
Aplicando las funciones trigonométricas :

$$x = |\vec{A}|cos\theta \quad ... \quad x = 50.0cos20.0 \quad ... \quad x = 47.0\ m$$

$$y = |\vec{A}|sen\theta \quad ... \quad y = 50.0sen20.0 \quad ... \quad y = 17.1\ m$$

Dado lo anterior las coordenadas cartesianas del vector son $\vec{A}$(47.0, 17.1) m mientras que en notación canónicas es: $\vec{A}$ = 47.0 m $\hat{\imath}$ + 17.1 m $\hat{\jmath}$.

Inciso ii. El vector tiene magnitud de 30.0 m/s con dirección de 15.0 grados respecto al eje cartesiano y positivo y en el primer cuadrante, de tal forma que:



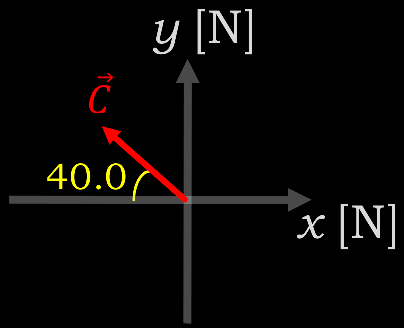
Aplicando las funciones trigonométricas :

$$x = |\vec{B}|sen\theta \quad ... \quad x = 30.0sen15.0 \quad ... \quad x = 7.8\ m/s$$

$$y = |\vec{B}|cos\theta \quad ... \quad y = 30.0cos15.0 \quad ... \quad y = 29.0\ m/s$$

Dado lo anterior las coordenadas cartesianas del vector son $\vec{B}$(7.8, 29.0) m/s mientras que en notación canónicas es: $\vec{B}$ = 7.8 m/s $\hat{\imath}$ + 29.0 m/s $\hat{\jmath}$.

Inciso iii. El vector tiene magnitud de 15.0 N con dirección de 40.0 grados respecto al eje cartesiano x negativo y en el segundo cuadrante, de tal forma que:



Aplicando las funciones trigonométricas :

$$x = |\vec{C}|cos\theta \quad ... \quad x = 15.0cos40.0 \quad ... \quad x = 11.5 \text{ N}$$

$$y = |\vec{C}|sen\theta \quad ... \quad y = 15.0sen40.0 \quad ... \quad y = 9.6 \text{ N}$$

En este punto debes tener presente que el vector está en el segundo cuadrante, por lo que su componente cartesiana x debe ser negativa, de forma que las coordenadas cartesianas del vector son $\vec{C}$ (–11.5, 9.6) N mientras que en notación canónicas es: $\vec{C}$ = –11.5 N $\hat{\imath}$ + 9.6 N $\hat{\jmath}$.

Este tipo de situaciones, incluir un signo negativo en alguna componente cartesianas, se realiza para que el vector sea coherente con su posición en el cuadrante y deberá ser realizado bajo dos condiciones:

- El vector no está en el primer cuadrante.

- El ángulo, al que se aplica la función seno y coseno, está en el intervalo de 0 a 90 grados.

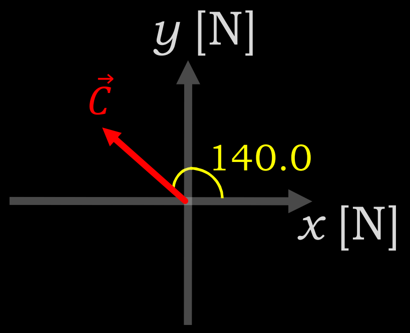
Vectores en 2D

Una alternativa para determinar las componentes cartesianas de un vector sin tener que “insertar” un signo negativo en alguna componente cartesiana, es determinando el ángulo que forma el vector con respecto al eje cartesiano x positivo en dirección al eje cartesiano y positivo.

Con este fin, se requiere un análisis previo al cálculo.

Sabemos que desde el eje cartesiano x positivo hasta el eje cartesiano x negativo existen 180.0 grados así que podemos realizar una simple resta para tener la dirección deseada: 180.0 – 40.0 = 140.0 grados.

Como ahora el ángulo es medido con respecto al eje cartesiano x positivo, podemos calcular de forma directa las componentes cartesianas del vector.



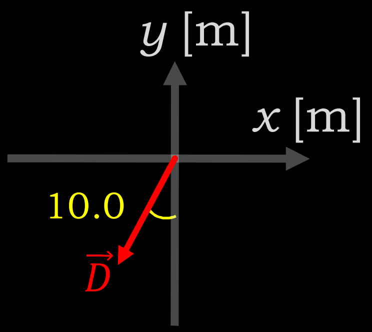
$$x = |\vec{C}|cos\theta \quad \ldots \quad x = 15.0cos140.0 \quad \ldots \quad x = -11.5 \text{ N}$$

$$y = |\vec{C}|sen\theta \quad \ldots \quad y = 15.0sen140.0 \quad \ldots \quad y = 9.6 \text{ N}$$

Observa que los valores de las coordenadas cartesianas coinciden con el cálculo anterior y no es necesario introducir un signo negativo en la componente cartesiana x.

Vectores en 2D

Inciso iv. El vector tiene magnitud de 7.2 m con dirección de 10.0 grados respecto al eje cartesiano y negativo y en el tercer cuadrante, de tal forma que:



Aplicando las funciones trigonométricas :

$$x = |\vec{D}|sen\theta \quad \ldots \quad x = 7.2sen10.0 \quad \ldots \quad x = 1.3 \text{ m}$$

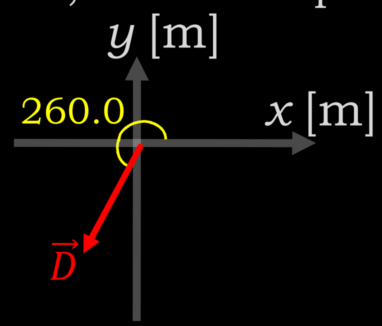
$$y = |\vec{D}|cos\theta \quad \ldots \quad y = 7.2cos10.0 \quad \ldots \quad y = 7.1 \text{ m}$$

En este punto debes tener presente que el vector está en tercer cuadrante, por lo que sus componentes cartesianas x y y deben ser negativas, de forma que las coordenadas cartesianas del vector son $\vec{D}(-1.3, -7.1)$ m mientras que en notación canónicas es: $\vec{D} = -1.3 \text{ m } \hat{\imath} - 7.1 \text{ m } \hat{\jmath}$.

Podemos obtener las mismas componentes cartesianas si determinamos primero el ángulo con respecto al eje cartesiano x positivo en dirección al eje cartesiano y positivo. En esta ocasión debemos considerar que el ángulo desde el eje cartesiano x hasta el eje cartesiano y negativo es 270.0 grados, de forma que la dirección del vector será de 260.0 grados.

$$x = |\vec{D}|cos\theta \quad \ldots \quad x = 7.2cos260.0 \quad \ldots \quad x = -1.3 \text{ m}$$

$$y = |\vec{D}|sen\theta \quad \ldots \quad y = 7.2sen260.0 \quad \ldots \quad y = -7.1 \text{ m}$$



Vectores en 3D

Ahora analizaremos espacios euclidianos en tres dimensiones para poder representar características vectoriales con igual dimensionalidad.

Al igual que en el caso de los vectores en una y dos dimensiones, requerimos generar un espacio euclidiano y para ello emplearemos tres vectores canónicos que definan dicho espacio.

Los vectores canónicos que serán utilizados son: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

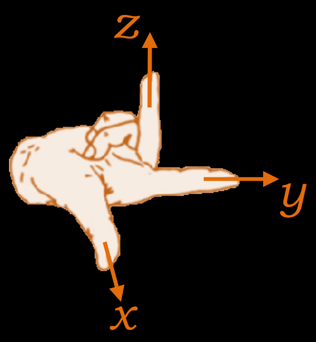
Nuevamente, la dirección del vector canónico $\hat{\imath}$ definirá la dirección creciente del eje coordenado x, la dirección del vector canónico $\hat{\jmath}$ definirá la dirección creciente del eje coordenado y mientras que la dirección del vector canónico $\hat{k}$ definirá la dirección creciente del eje coordenado z.

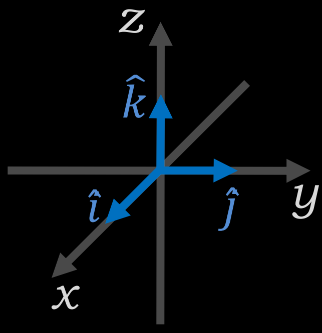
Para representar gráficamente el espacio euclidiano en tres dimensiones es necesario, por convención, emplear algunos dedos de la mano derecha, siguiendo que:

- El dedo pulgar representa el vector canónico $\hat{\imath}$ (eje coordenado x).
- El dedo índice representa el vector canónico $\hat{\jmath}$ (eje coordenado y).
- El dedo medio representa el vector canónico $\hat{k}$ (eje coordenado z).

Vectores en 3D

Si se extienden los dedos de forma que entre ellos formen ángulos rectos, como se muestra en la imagen, podemos establecer gráficamente el espacio euclidiano en tres dimensiones.





De esta forma, podemos representar cualquier vector en el espacio euclidiano de tres dimensiones como:

$$\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Que en notación de un sistema coordenado tiene la forma:

$$\vec{V}(x, y, z)$$

Aplicando la notación del sistema coordenado, podemos expresar los vectores canónicos como:

$$\hat{\imath}(1,0,0) \qquad \hat{\jmath}(0,1,0) \qquad \hat{k}(0,0,1)$$

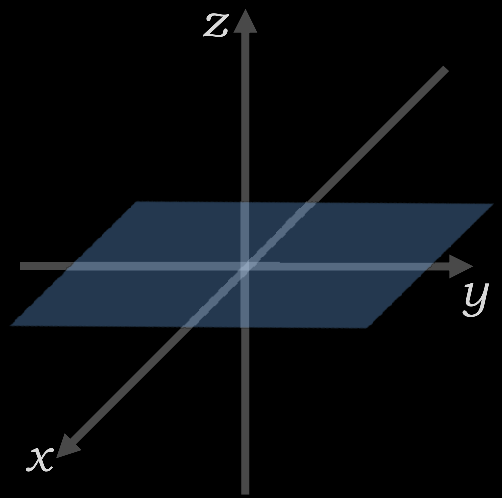
Vectores en 3D

Dada la descripción del espacio euclidiano en tres dimensiones, podemos asumir que éste está formado por tres planos cartesianos, lo cuales están referidos como:

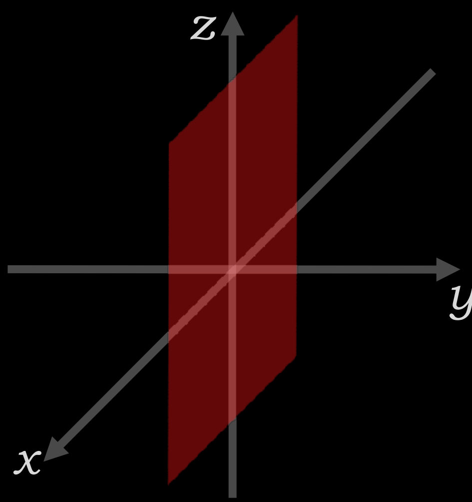
• Plano *xy*: formado por los ejes coordenados x y y. El eje coordenado z es perpendicular a dicho plano.

• Plano *xz*: formado por los ejes coordenados x y z. El eje coordenado y es perpendicular a dicho plano.

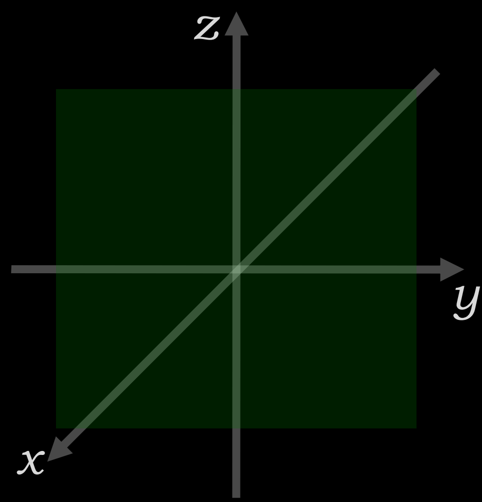
• Plano *yz*: formado por los ejes coordenados y y z. El eje coordenado x es perpendicular a dicho plano.



Plano *xy*



Plano *xz*

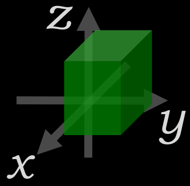


Plano *yz*

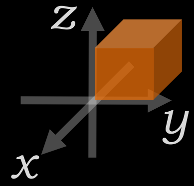
Vectores en 3D

La existencia de estos tres planos divide al espacio en ocho regiones que son denominadas octantes. Análogamente al sistema cartesiano, cada octante está referido por una característica numérica en las componentes del vector, según:

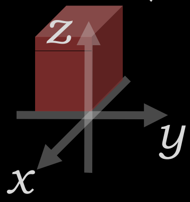
- Primer octante: (x^+, y^+, z^+)



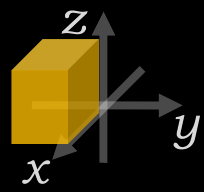
- Segundo octante: (x^-, y^+, z^+)



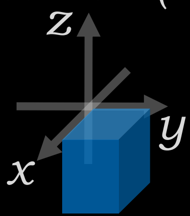
- Tercer octante: (x^-, y^-, z^+)



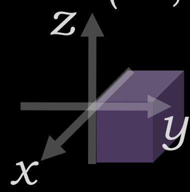
- Cuarto octante: (x^+, y^-, z^+)



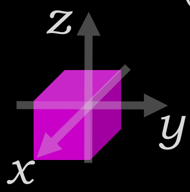
- Quinto octante: (x^+, y^+, z^-)



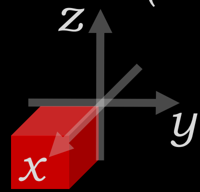
- Sexto octante: (x^-, y^+, z^-)



- Séptimo octante: (x^-, y^-, z^-)



- Octavo octante: (x^+, y^-, z^-)



Vectores en 3D

En la notación matricial, los vectores en tres dimensiones se escriben añadiendo una fila a la columna que representará a la coordenada z y esta debe colocarse por debajo de la coordenada y.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De forma análoga a la notación de coordenadas polares para un vector en dos dimensiones, un vector en tres dimensiones puede ser expresado en coordenadas esféricas.

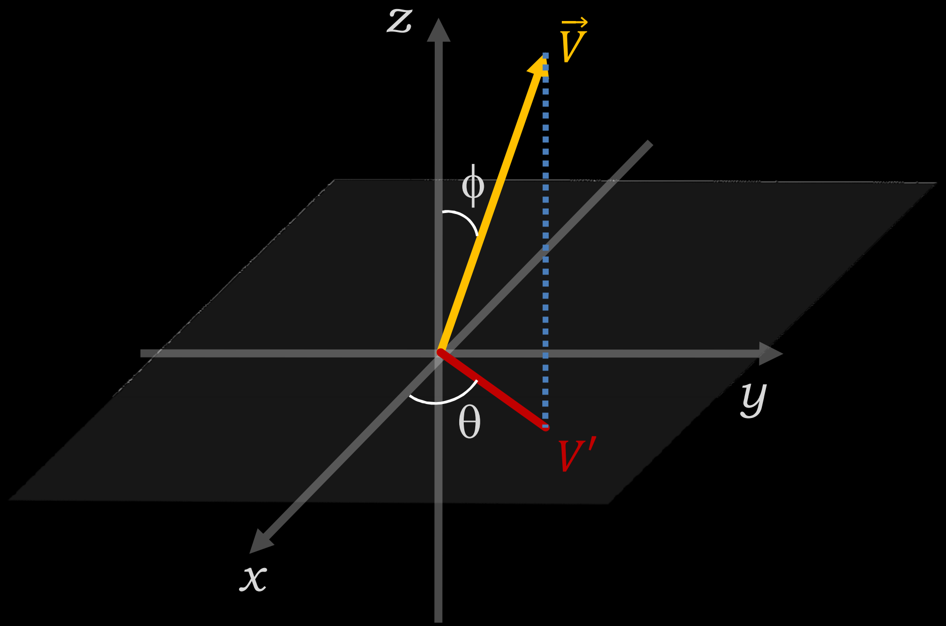
Las coordenadas esféricas requieren de una magnitud (norma, tamaño o módulo) así como de dos direcciones o ángulos que serán denominados θ y ϕ.

El ángulo θ está definido con respecto al eje coordenado x positivo en dirección al eje coordenado y positivo. A este ángulo se le denomina ángulo circular o acimutal y su intervalo de validez es de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ radianes o de $0 \leq \theta \leq 360$ grados.

El ángulo ϕ está definido con respecto al eje coordenado z positivo. A este ángulo se le denomina ángulo polar o cónico y su intervalo de validez es de $0 \leq \phi \leq \pi$ radianes o de $0 \leq \phi \leq 180$ grados.

Vectores en 3D

Un detalle particular con respecto a los ángulos es que el ángulo ϕ se mide del eje coordenado z hacia el vector pero el ángulo θ se mide desde el eje coordenado x hacia la proyección del vector en el plano xy.



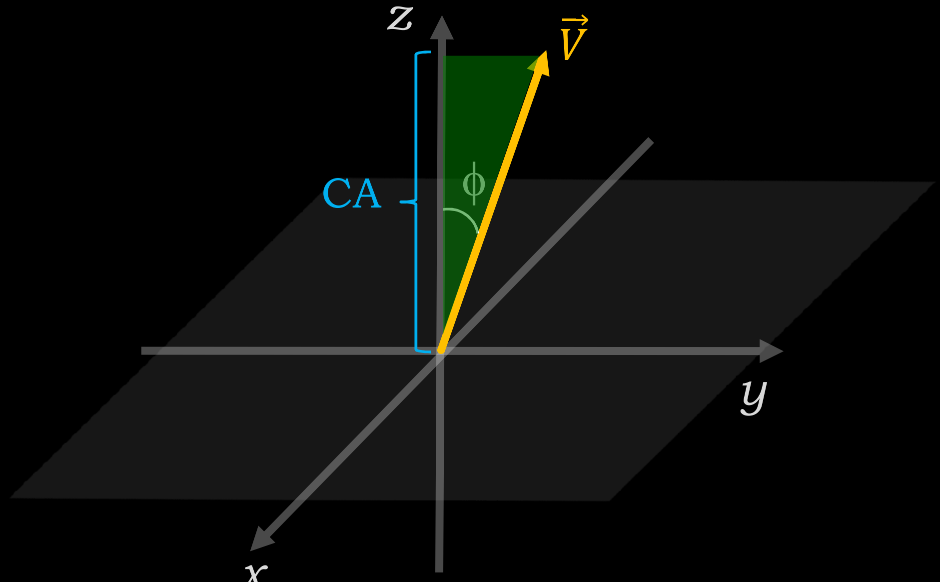
Observa que tanto el vector como su proyección en el plano xy inician en el punto de coincidencia de las rectas que representan a los ejes coordenados. Este punto es considerado el origen del espacio euclidiano en tres dimensiones y puede representarse como:

$\vec{V} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$	$\vec{V}(0,0,0)$	$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Notación canónica	Sistema coordenado	Notación matricial

Vectores en 3D

La proyección de un vector en un plano puede entenderse como "la sombra" que hace el vector en el plano de interés y para determinar su tamaño es necesario recurrir a la geometría de Pitágoras.

Supongamos un vector cualquiera en un espacio euclidiano tridimensional el cual formará un ángulo ϕ con respecto al eje coordenado *z*. En el espacio confinado entre el vector y el eje coordenado *z* podemos plantear la existencia de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde con la magnitud del vector mientras que el cateto adyacente corresponde con el valor del eje coordenado *z*.



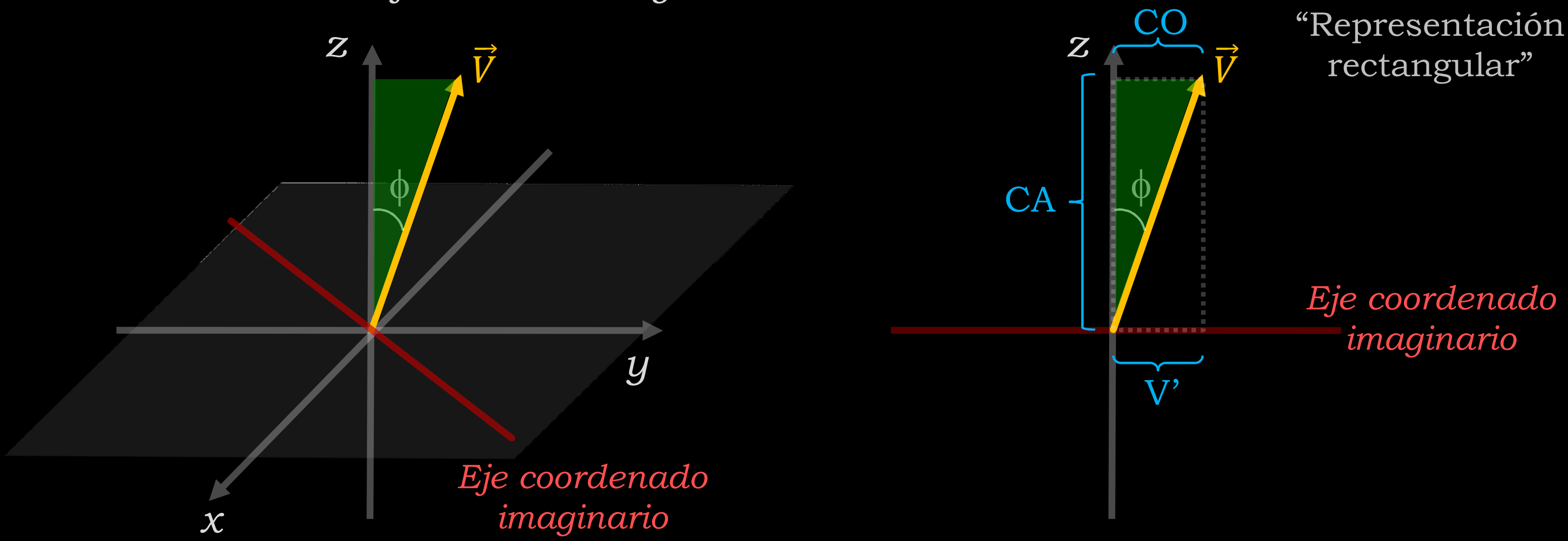
Recuerda que el cateto adyacente, CA, es el lado del triángulo a partir del cuál se está midiendo el ángulo ϕ y como ϕ se define con respecto al eje coordenado *z*, entonces, el eje coordenado *z* es el cateto adyacente, de forma que:

$$z = |\vec{V}| cos\phi$$

Para facilitar la visualización del cateto opuesto, CO, como el tamaño de la proyección del vector en el plano *xy* recurramos a una representación "rectangular".

Vectores en 3D

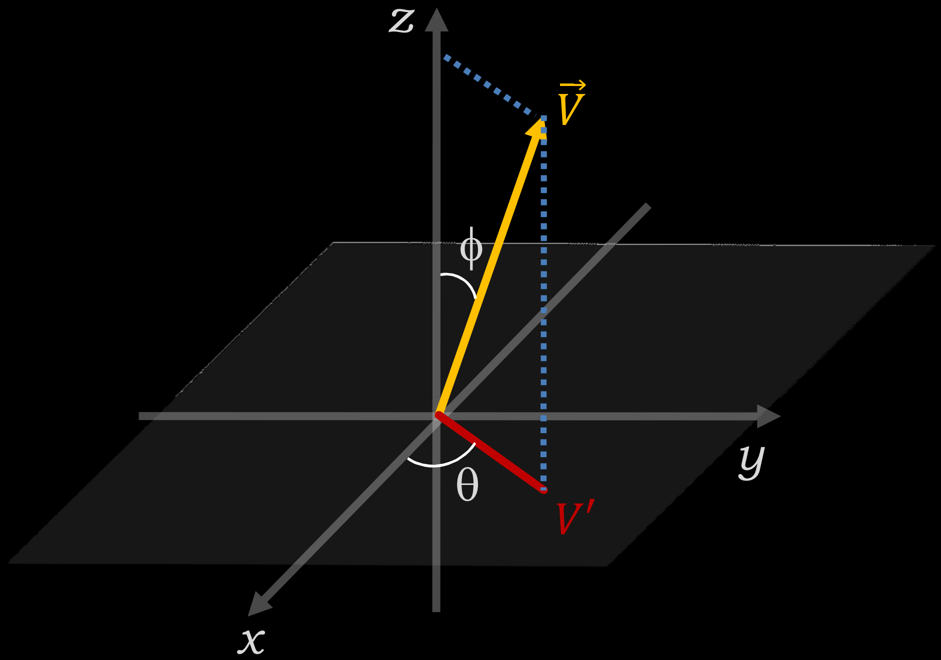
Tomemos el vector descrito anteriormente y realicemos un análisis de éste en un plano formado por el eje coordenado z y otro eje coordenado "imaginario" que, perpendicular al eje coordenado z, coincida con la proyección del vector en el plano xy. Este eje coordenado "imaginario" no necesariamente es el eje coordenado x o el eje coordenado y.

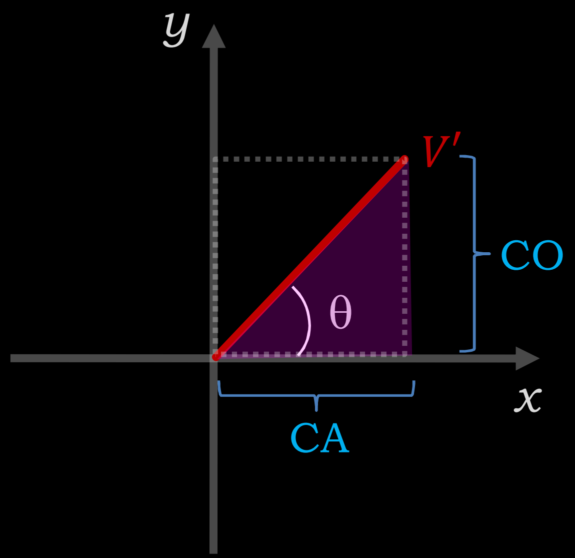


Como puede observarse en la imagen del lado derecho, debido a la simetría de un rectángulo, el lado superior (cateto opuesto, CO, al ángulo ϕ) tiene el mismo tamaño que el lado inferior, el cual representará el tamaño de la proyección del vector en el plano xy, es decir, el valor V', de tal forma que:

$$V' = |\vec{V}| sen\phi$$

Una vez que hemos definido el tamaño de la proyección, podemos observar al plano xy para analizar el ángulo θ que forma la proyección con respecto al eje coordenado x.





En el plano xy la proyección forma un nuevo triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde con el tamaño de la proyección, V'. En este triángulo el cateto adyacente al ángulo θ es el valor en el eje coordenado x mientras que el cateto opuesto es el valor en el eje coordenado y, tal que:

$$x = V' cos\theta \qquad\qquad y = V' sen\theta$$

Vectores en 3D

Si en las ecuaciones anteriores sustituimos el valor del tamaño de la proyección demostrado en la diapositiva 8, $V' = |\vec{V}| sen\phi$, tenemos:

$$x = V' cos\theta \quad \ldots \quad x = |\vec{V}| sen\phi cos\theta$$

$$y = V' sen\theta \quad \ldots \quad y = |\vec{V}| sen\phi sen\theta$$

Que en conjunto con la ecuación encontrada en la diapositiva 7 para determinar el valor de la componente *z*, nos permite tener la forma de convertir de coordenadas esféricas al sistema coordenado y viceversa, tal y como se muestra a continuación:

- Coordenadas esféricas ($|\vec{V}|, \theta, \phi$) a un sistema coordenado (*x*, *y*, *z*):

$$x = |\vec{V}| sen\phi cos\theta \qquad y = |\vec{V}| sen\phi sen\theta \qquad z = |\vec{V}| cos\phi$$

- Sistema coordenado (*x*, *y*, *z*) a coordenadas esféricas: ($|\vec{V}|, \theta, \phi$):

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad tan\theta = \frac{y}{x} \qquad cos\phi = \frac{z}{|\vec{V}|}$$

Es importante mencionar que únicamente el ángulo θ es susceptible de ser corregido en función del cuadrante en el que se encuentre la proyección, exactamente igual que en el caso de los vectores en dos dimensiones.

Vectores en 3D

En el caso de expresar un vector en coordenadas esféricas, estos tendrán valores permitidos en los ángulos θ y ϕ según el octante en el que esté suscrito.

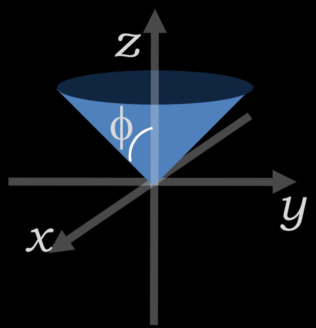
Como referencia tomemos la descripción de los octantes vista en la diapositiva 4 en la que los primeros cuatro octantes tienen en común que el valor de la coordenada z es positiva mientras que en los últimos cuatro octantes la coordenada z es negativa.

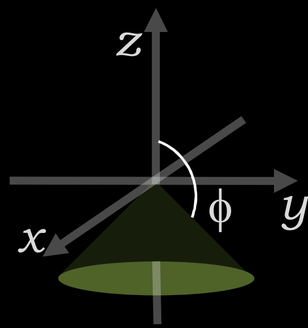
Esto ocasiona que si la coordenada z del vector es:

- positiva, el ángulo ϕ tendrá valores en el intervalo de $0 < \phi < \pi/2$ radianes o $0 < \phi < 90.0$ grados.

- negativa, el ángulo ϕ tendrá valores en el intervalo de $\pi/2 < \phi < \pi$ radianes o $90.0 < \phi < 180.0$ grados.

Dado lo anterior, el ángulo ϕ jamás tendrá valores mayores a 180 grados o π radianes, pues como fue mencionado, éste es un ángulo cónico.





Como se mencionó, el ángulo θ es susceptible a ser corregido pues debe ser coherente con el octante que ocupe el vector.

- En los octantes 1 y 5, en donde las coordenadas x y y son positivas, el ángulo θ tiene un intervalo de validez de $0 < \theta < \pi/2$ radianes o $0 < \theta < 90.0$ grados.

- En los octantes 2 y 6, en donde la coordenada x es negativa pero la coordenada y es positiva, el ángulo θ tiene un intervalo de validez de $\pi/2 < \theta < \pi$ radianes o $90.0 < \theta < 180.0$ grados.

- En los octantes 3 y 7, en donde las coordenadas x y y son negativas, el ángulo θ tiene un intervalo de validez de $\pi < \theta < 3\pi/2$ radianes o $180.0 < \theta < 270.0$ grados.

- En los octantes 4 y 8, en donde la coordenada x es positiva pero la coordenada y es negativa, el ángulo θ tiene un intervalo de validez de $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ radianes o $270.0 < \theta < 360.0$ grados.

Observa que la descripción del ángulo θ que forma la proyección del vector en el plano xy es equivalente a la descripción realizada para vectores en dos dimensiones.

Ejercicio 1.

Expresa los siguientes vectores en coordenadas esféricas.

i. $\vec{A}\,(1,\ 3,\ -2)$ m

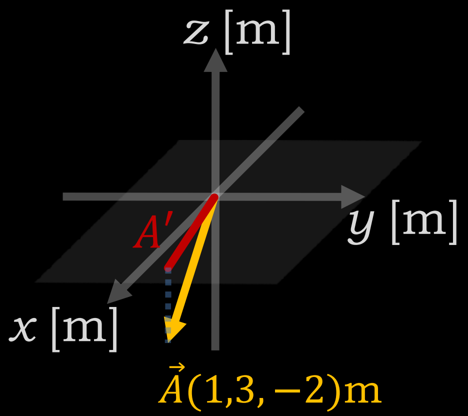
ii. $\vec{B}\,(-2,\ 1,\ 4)$ m/s

iii. $\vec{C}\,(-3,\ -5,\ -2)$ N

iv. $\vec{D}\,(4,\ 3,\ 6)$ m/s^2

En este tipo de ejercicios es importante identificar en qué octante está situado el vector para determinar correctamente el ángulo θ.

Inciso i. El vector se encuentre en el quinto octante así que la proyección del vector en el plano *xy* estará en el primer cuadrante de este plano.



Aplicando las relaciones que existen entre el sistema coordenado y las coordenadas esféricas, tenemos:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \quad |\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} \quad \ldots \quad |\vec{A}| = 3.7\ m$$

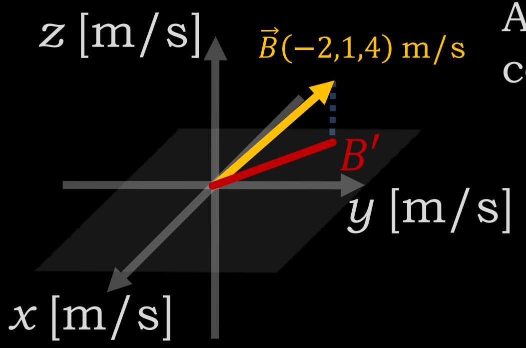
$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right) \quad \ldots \quad \theta = 71.6\ grados$$

$$cos\phi = \frac{z}{|\vec{A}|} \quad \ldots \quad \phi = cos^{-1}\left(\frac{-2}{3.7}\right) \quad \ldots \quad \phi = 122.7\ grados$$

Por lo que las coordenadas esféricas del vector son:

$$|\vec{A}| = 3.7\ m \quad \theta = 71.6\ grados \quad \phi = 122.7\ grados$$

Inciso ii. El vector se encuentre en el segundo octante así que la proyección del vector en el plano xy estará en el segundo cuadrante de este plano.



Aplicando las relaciones que existen entre el sistema coordenado y las coordenadas esféricas, tenemos:

$$|\vec{B}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \dots \quad |\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (4)^2} \quad \dots \quad |\vec{B}| = 4.6\, m/s$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \dots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{-2}\right) \quad \dots \quad \theta = -26.6\ grados$$

$$cos\phi = \frac{z}{|\vec{B}|} \quad \dots \quad \phi = cos^{-1}\left(\frac{4}{4.6}\right) \quad \dots \quad \phi = 29.6\ grados$$

Como puede verse, el ángulo θ deberá ser corregido para que este sea coherente con el octante en el que se encuentra el vector. Para ello, dado que la proyección está en el segundo cuadrante del plano xy, sumaremos 180.0 grados al valor de θ encontrado.

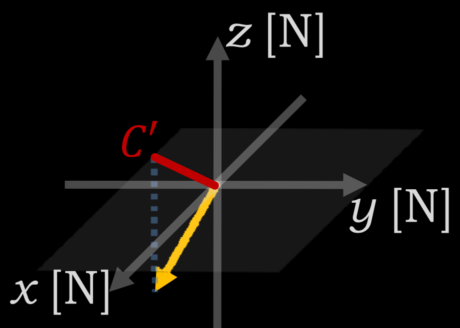
$$180.0 - 26.6 = 153.4 \text{ grados}$$

Por lo que las coordenadas esféricas del vector son:

$$|\vec{B}| = 4.6\, m/s \quad \theta = 153.4\ grados \quad \phi = 29.6\ grados$$

Vectores en 3D

Inciso iii. El vector se encuentre en el séptimo octante así que la proyección del vector en el plano xy estará en el tercer cuadrante de este plano.



$\vec{C}(-3,-5,-2)$ N

Aplicando las relaciones que existen entre el sistema coordenado y las coordenadas esféricas, tenemos:

$$|\vec{C}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \ldots \quad |\vec{C}| = \sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-2)^2} \quad \ldots \quad |\vec{C}| = 6.2 \text{ N}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{-5}{-3}\right) \quad \ldots \quad \theta = 59.0 \; grados$$

$$cos\phi = \frac{z}{|\vec{C}|} \quad \ldots \quad \phi = cos^{-1}\left(\frac{-2}{6.2}\right) \quad \ldots \quad \phi = 108.8 \; grados$$

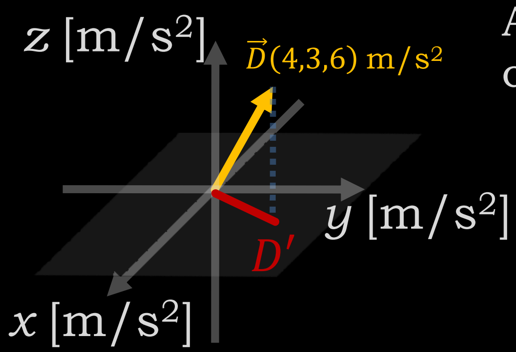
Como puede verse, el ángulo θ da positivo pero este valor deberá ser corregido para que este sea coherente con el octante en el que se encuentra el vector. Para ello, dado que la proyección está en el tercer cuadrante del plano xy, sumaremos 180.0 grados al valor de θ encontrado.

180.0 + 59.0 = 239.0 grados

Por lo que las coordenadas esféricas del vector son:

$$|\vec{C}| = 6.2 \text{ N} \quad \theta = 239.0 \; grados \quad \phi = 108.8 \; grados$$

Inciso iv. El vector se encuentre en el primer octante así que la proyección del vector en el plano xy estará en el primer cuadrante de este plano.



Aplicando las relaciones que existen entre el sistema coordenado y las coordenadas esféricas, tenemos:

$$|\vec{D}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \quad |\vec{D}| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (6)^2} \quad \ldots \quad |\vec{D}| = 7.8 \text{ m}/s^2$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \ldots \quad \theta = 36.9 \; grados$$

$$cos\phi = \frac{z}{|\vec{D}|} \quad \ldots \quad \phi = cos^{-1}\left(\frac{6}{7.8}\right) \quad \ldots \quad \phi = 39.7 \; grados$$

Por lo que las coordenadas esféricas del vector son:

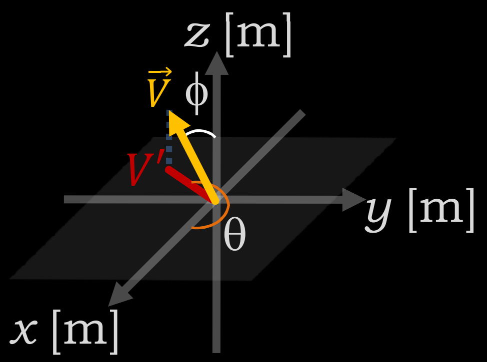
$$|\vec{D}| = 7.8 \text{ m}/s^2 \quad \theta = 36.9 \; grados \quad \phi = 39.7 \; grados$$

Ejercicio 2.

Determina las coordenadas de un vector cuya magnitud es 4.0 m con direcciones de θ = 210.0 grados y ϕ = 50.0 grados. Expresa el vector en notación canónica.

En este tipo de ejercicios aplicaremos las ecuaciones que corresponden a la transformación de coordenadas esféricas a las componentes x, y y z.

Dados los valores de los ángulos, el vector se encuentra en el tercer octante por lo que es de esperarse que las componentes x y y sean negativas pero la coordenada z será positiva.



Aplicando las relaciones que existen entre el sistema coordenado y las coordenadas esféricas, tenemos:

$$x = |\vec{V}| sen\phi cos\theta \quad \ldots \quad x = (4.0)sen(50.0)\cos(210.0) \quad \ldots \quad x = -2.7\ m$$

$$y = |\vec{V}| sen\phi sen\theta \quad \ldots \quad y = (4.0)sen(50.0)sen(210.0) \quad \ldots \quad y = -1.5\ m$$

$$z = |\vec{V}| cos\phi \quad \ldots \quad z = (4.0)\cos(50) \quad \ldots \quad z = 2.6\ m$$

Por lo que las coordenadas del vector serán: $\vec{V}(-2.7, -1.5, 2.6)\ m$

Que en notación canónica corresponde con: $\vec{V} = -2.7m\ \hat{\imath} - 1.5m\ \hat{\jmath} + 2.6m\ \hat{k}$

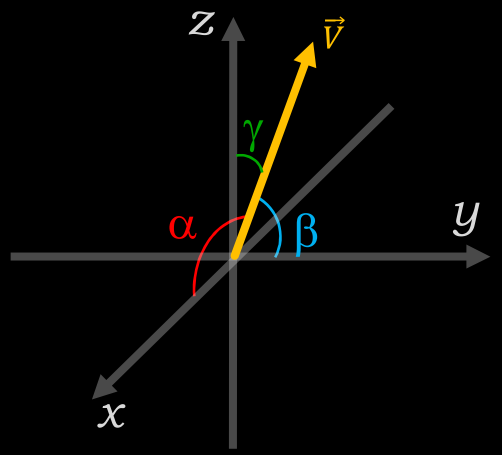
Vectores en 3D

Para finalizar esta presentación, nos falta mencionar la existencia de otra forma para expresar a los vectores en tres dimensiones.

Esta representación es denominada "cosenos directores" y está fundamentada en generar tres direcciones o ángulos diferentes para un mismo vector. Estos tres ángulos son referidos como α, β, γ y cada uno de ellos se mide con respecto a los ejes coordenados *x*, *y* y *z*, respectivamente.

Como el nombre lo dice, se emplea la función trigonométrica coseno debido a que cada ángulo es adyacente a cada eje coordenado.

De esta forma, para describir un vector en tres dimensiones empleando la notación "cosenos directores" deberán brindarse cuatro elementos; la magnitud del vector, el ángulo α con respecto al eje coordenado *x*, el ángulo β con respecto al eje coordenado *y* así como el ángulo γ con respecto al eje coordenado *z*.



$$cos\alpha = \frac{x}{|\vec{V}|}$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\vec{V}|}$$

$$cos\gamma = \frac{z}{|\vec{V}|}$$