Suma y producto por escalar

En la otra presentación fue explicado cómo representar un vector en diferentes notaciones, independientemente de su dimensionalidad.

Ahora, analizaremos las operaciones matemáticas que podemos realizar con las cantidades vectoriales.

Estas operaciones son esencialmente cuatro y están agrupadas en las siguientes categorías:

- Producto de un vector por un escalar.
- Suma entre vectores.
- Producto escalar entre vectores.
- Producto vectorial entre vectores.

En esta presentación analizaremos las dos primeras operaciones y en la siguiente presentación discutiremos los pormenores del producto entre vectores, sea este escalar o vectorial.

Suma y producto por escalar

Producto de un vector por un escalar.

Definición. Dado un vector $\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y un escalar s, el producto del vector por el escalar es:

$$s\vec{V} = s(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = sx\hat{\imath} + sy\hat{\jmath} + sz\hat{k}$$

Lo anterior puede entenderse como el producto del escalar por cada componente del vector, obteniéndose otro vector.

Las propiedades generales de esta operación son:

• Propiedad asociativa. Dados dos escalares s y u que serán multiplicados por un vector $\vec{V}$, se tiene que:

$$(su)\vec{V} = s(u\vec{V}) = u(s\vec{V})$$

• Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares. Dados la suma de dos escalares s y u cuyo resultado será multiplicado por un vector $\vec{V}$, se tiene que:

$$(s + u)\vec{V} = s\vec{V} + u\vec{V}$$

• Relación de magnitudes. Sea un escalar s que se multiplica por un vector $\vec{V}$ se tiene que:

$$|s\vec{V}| = |s||\vec{V}|$$

Ejercicio 1.

Determina el vector resultante de multiplicar el escalar 3.0 kg por un vector aceleración de magnitud es 2.0 m/s^2 y dirección θ = 20.0 grados, ϕ = 5.0 grados.

Para resolver este ejercicio, primero determinaremos las coordenadas del vector, las cuales están dadas por el ejercicio en coordenadas esféricas.

$$x = |\vec{a}| sen\phi cos\theta \quad \ldots \quad x = (2.0) sen(5.0)\cos(20.0) \quad \ldots \quad x = 0.164\, m/s^2$$

$$y = |\vec{a}| sen\phi sen\theta \quad \ldots \quad y = (2.0) sen(5.0) sen(20.0) \quad \ldots \quad y = 0.06\, m/s^2$$

$$z = |\vec{a}| cos\phi \quad \ldots \quad z = (2.0)\cos(5.0) \quad \ldots \quad z = 1.99\, m/s^2$$

Por lo que las coordenadas del vector serán: $\vec{a} = 0.16\, m/s^2\hat{\imath} + \; 0.06\, m/s^2\hat{\jmath} + 1.99\, m/s^2\hat{k}$

Con el vector expresado en esta forma, multiplicamos por el escalar 3.0 kg.

$$m\vec{a} = (3.0)\left(0.164\hat{\imath} + \; 0.06\hat{\jmath} + 1.99\hat{k}\right) \quad \ldots \quad m\vec{a} = (3.0)(0.16)\hat{\imath} + (3.0)(0.06)\hat{\jmath} + (3.0)(1.99)\hat{k}$$

$$m\vec{a} = 0.49\text{ N}\hat{\imath} + 0.18\text{ N}\hat{\jmath} + 5.98\text{ N}\hat{k}$$

$$|m\vec{a}| = 6.0\text{ N} \quad \theta = 20.0\ grados \quad \phi = 5.0\ grados$$

Observa que las unidades fueron cambiadas debido a que [kgm/s^2] ≡ [N].

Ejercicio 2.

Determina el vector resultante de multiplicar el escalar –2.0 por un vector de posición de magnitud es 5.3 m y dirección θ = 310.0 grados, ϕ = 90.0 grados.

Primero determinaremos las coordenadas del vector.

$$x = |\vec{r}| sen\phi cos\theta \quad \dots \quad x = (5.3)sen(90.0)\cos(310.0) \quad \dots \quad x = 3.41\ m$$

$$y = |\vec{r}| sen\phi sen\theta \quad \dots \quad y = (5.3)sen(90.0)sen(310.0) \quad \dots \quad y = -4.1\ m$$

$$z = |\vec{r}| cos\phi \quad \dots \quad z = (5.3)\cos(90.0) \quad \dots \quad z = 0\ m$$

Por lo que las coordenadas del vector serán: $\vec{r} = 3.41\ m\hat{\imath} - 4.1\ m\hat{\jmath} + 0\ m\hat{k}$

Con el vector expresado en esta forma, multiplicamos por el escalar adimensional – 2.0.

$$s\vec{r} = (-2.0)\left(3.41\hat{\imath} - 4.1\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right) \quad \dots \quad s\vec{r} = (-2.0)(3.41)\hat{\imath} + (-2.0)(-4.1)\hat{\jmath} + (-2.0)(0)\hat{k}$$

$$s\vec{r} = -6.82\ \mathrm{m}\hat{\imath} + 8.2\ \mathrm{m}\hat{\jmath} + 0\ \mathrm{m}\hat{k}$$

$$|s\vec{r}| = 10.6\ \mathrm{m} \quad \theta = 130.0\ grados \quad \phi = 90.0\ grados$$

Observa que las unidades del vector resultante son las mismas que el vector inicial debido a que el escalar es adimensional.

Suma y producto por escalar

Analicemos un poco los resultados obtenidos en los dos ejercicios anteriores.

En ambos ejercicios podemos observar la propiedad de magnitudes: $|s\vec{V}| = |s||\vec{V}|$

- En el ejercicio uno, la magnitud del vector aceleración es 2.0 m/s^2 mientras que el escalar vale 3.0 kg. Si multiplicamos ambos valores tendremos la magnitud del vector resultante de multiplicar un vector por un escalar, 6.0 N.

- En el ejercicio dos también se observa la propiedad de magnitudes ya que ésta hace referencia al producto de la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar. De forma que si multiplicamos la magnitud del vector posición (5.3 m) por el valor absoluto del escalar adimensional (2.0), tendremos la magnitud del vector resultante de multiplicar un vector por un escalar (10.6 m).

Otro detalle importante en los ejercicios anteriores tiene que ver con la dirección del vector resultante y el vector inicial.

- En el ejercicio uno puede verse que cuando el escalar es positivo, la dirección del vector resultante de la operación coincide con la dirección del vector inicial, es decir, son vectores paralelos.

- En el ejercicio dos puede verse que cuando el escalar es negativo, el vector resultante es opuesto al vector inicial, es decir, son vectores antiparalelos.

Ejercicio 3.

Determina el vector resultante de dividir al vector posición de magnitud 20.5 m y dirección θ = 30.0 grados, ϕ = 45.0 grados, por el escalar 5.0 s.

Primero determinaremos las coordenadas del vector.

$$x = |\vec{r}| sen\phi cos\theta \quad \dots \quad x = (20.5)sen(45.0)\cos(30.0) \quad \dots \quad x = 12.55\ m$$

$$y = |\vec{r}| sen\phi sen\theta \quad \dots \quad y = (20.5)sen(45.0)sen(30.0) \quad \dots \quad y = 7.25\ m$$

$$z = |\vec{r}| cos\phi \quad \dots \quad z = (20.5)\cos(45.0) \quad \dots \quad z = 14.5\ m$$

Por lo que las coordenadas del vector serán: $\vec{r} = 12.55\ m\hat{\imath} + 7.25\ m\hat{\jmath} + 14.5\ m\hat{k}$

Dividir un vector por un escalar es equivalente con multiplicar al vector por el inverso del escalar, es decir:

$$\frac{\vec{V}}{s} = \left(\frac{1}{s}\right)\vec{V} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) = \frac{x}{s}\hat{\imath} + \frac{y}{s}\hat{\jmath} + \frac{z}{s}\hat{k}$$

De tal forma que al dividir el vector por el escalar 5.0 s, tenemos

$$\frac{\vec{r}}{t} = \left(\frac{1}{5.0}\right)\left(12.55\hat{\imath} + 7.25\hat{\jmath} + 14.5\hat{k}\right) \quad \dots \quad \frac{\vec{r}}{t} = \frac{12.55}{5.0}\hat{\imath} + \frac{7.25}{5.0}\hat{\jmath} + \frac{14.5}{5.0}\hat{k}$$

$$\frac{\vec{r}}{t} = 2.51\ \mathrm{m/s}\ \hat{\imath} + 1.45\ \mathrm{m/s}\ \hat{\jmath} + 2.9\ \mathrm{m/s}\ \hat{k}$$

$$\left|\frac{\vec{r}}{t}\right| = 4.1\ \mathrm{m/s} \quad \theta = 30.0\ grados \quad \phi = 45.0\ grados$$

Suma y producto por escalar

Como puede observarse en el ejercicio anterior, es posible analizar la división de un vector por un escalar mediante el uso de la propiedad producto de un vector por un escalar.

En este momento, es importante mencionar que en la manipulación de vectores existe la posibilidad de crear un vector especial, denominado vector unitario, el cual resultará muy útil dado que este vector unitario es adimensional, de magnitud uno y únicamente tiene información asociada con la dirección.

Hasta el momento hemos empleado tres de estos vectores unitarios, los cuales denominamos vectores canónicos, y recuerda que ellos dan el sentido creciente a los diferentes eje coordenados.

Un vector unitario se define como la división de un vector por su magnitud, la cual puede verse como un número asociado al tamaño del vector.

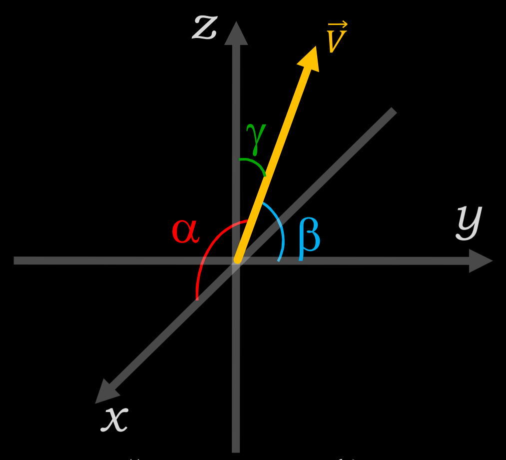
Supongamos un vector $\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, cuya magnitud es $|\vec{V}|$, definimos que su vector unitario es:

$$\widehat{\mathrm{V}} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad \ldots \quad \widehat{\mathrm{V}} = \frac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}{|\vec{V}|} \quad \ldots \quad \widehat{\mathrm{V}} = \frac{x}{|\vec{V}|}\hat{\imath} + \frac{y}{|\vec{V}|}\hat{\jmath} + \frac{z}{|\vec{V}|}\hat{k}$$

CUIDADO: Nota que el símbolo que se emplea en vector coordenado y en un vector unitario son diferentes.

Suma y producto por escalar

Si retomamos la expresión de un vector en tres dimensiones que hicimos mediante el uso de cosenos directores en la presentación anterior, veremos que existe una gran similitud entre la representación de un vector con cosenos directores y la definición que acabamos de hacer para un vector unitario.



"cosenos directores"

$$cos\alpha = \frac{x}{|\vec{V}|}$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\vec{V}|}$$

$$cos\gamma = \frac{z}{|\vec{V}|}$$

$$\hat{V} = \frac{x}{|\vec{V}|}\hat{\imath} + \frac{y}{|\vec{V}|}\hat{\jmath} + \frac{z}{|\vec{V}|}\hat{k}$$

"vector unitario"

De forma que podemos expresar al vector unitario únicamente en función de las direcciones del vector.

$$\hat{V} = (cos\alpha)\,\hat{\imath} + (cos\beta)\,\hat{\jmath} + (cos\gamma)\hat{k}$$

Como puedes observar, el vector unitario es adimensional (recuerda que las funciones trigonométricas lo son) y solamente tiene información de la dirección del vector analizado.

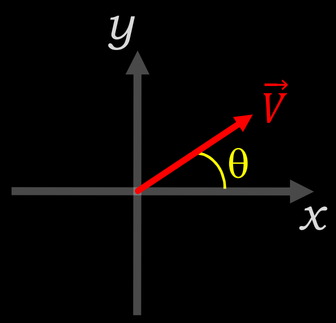
Suma y producto por escalar

En el caso de los vectores en dos dimensiones, el vector unitario puede ser escrito en función de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Supongamos un vector $\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, cuya magnitud es $|\vec{V}|$, definimos que su vector unitario es:

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad \ldots \quad \hat{V} = \frac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{|\vec{V}|} \quad \ldots \quad \hat{V} = \frac{x}{|\vec{V}|}\hat{\imath} + \frac{y}{|\vec{V}|}\hat{\jmath}$$

Retomando la representación de un vector en dos dimensiones.



$$\cos\theta = \frac{x}{|\vec{V}|} \qquad sen\,\theta = \frac{y}{|\vec{V}|}$$

Podemos expresar al vector unitario mediante.

$$\hat{V} = (\cos\theta)\,\hat{\imath} + (sen\theta)\,\hat{\jmath}$$

El uso de vectores unitarios es muy importante ya que, una vez definida la dirección con el vector unitario, puedes multiplicar cualquier magnitud vectorial por el vector unitario para encontrar las coordenadas de un segundo vector que será paralelo con el vector unitario.

Suma entre vectores.

Definición. Dado el vector $\vec{V} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ y el vector $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ la suma de los dos vectores es:

$$\vec{V} + \vec{A} = \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) + \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right) = (v_x + a_x)\hat{\imath} + (v_y + a_y)\hat{\jmath} + (v_z + a_z)\hat{k}$$

Lo anterior puede entenderse como la suma coordenada a coordenada entre los vectores, obteniéndose otro vector.

Las propiedades generales de esta operación son:

- Propiedad conmutativa. Dados dos vectores $\vec{V}$ y $\vec{A}$, se tiene:

$$\vec{V} + \vec{A} = \vec{A} + \vec{V}$$

- Propiedad asociativa. Dados los vectores $\vec{V}, \vec{A}$ y $\vec{B}$ se tiene:

$$\vec{V} + \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \left(\vec{V} + \vec{A}\right) + \vec{B}$$

- Elemento neutro. Dado un vector $\vec{V}$ se define al elemento neutro de la operación suma como el vector que ante esta operación no modifica al vector $\vec{V}$, tal que dicho elemento es: $\vec{0} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$$

Ejercicio 4.

Dado los vectores $\vec{V} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$ y $\vec{A} = -8\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 5\,\mathrm{N}\,\hat{k}$, determina el vector resultante de las siguientes operaciones:

i) $\vec{V} + \vec{A}$

ii) $\vec{V} + \vec{V}$

En esta ocasión no es necesario realizar ninguna transformación en los vectores pues el texto del ejercicio ya nos brinda las coordenadas de cada uno de ellos.

El primer inciso no puede ser resuelto debido a que los vectores no tienen las mismas unidades.

En el caso del segundo inciso tenemos que:

$$\vec{V} + \vec{V} = \left(3\ \hat{\imath} - 5\ \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) + \left(3\ \hat{\imath} - 5\ \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} + \vec{V} = (3+3)\,\hat{\imath} + (-5-5)\hat{\jmath} + (2+2)\,\hat{k}$$

$$\vec{V} + \vec{V} = 6\,m\,\hat{\imath} - 10\,m\,\hat{\jmath} + 4\,m\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{V} + \vec{V}\right| = 12.33\,m \quad \theta = 301.0\ grados \quad \phi = 71.1\ grados$$

Ejercicio 5.

Considera los siguientes vectores que se brindan en coordenadas esféricas:

$$|\vec{A}| = 2.0 \quad \theta = 180.0\ grados \quad \phi = 56.5\ grados$$

$$|\vec{B}| = 11.5 \quad \theta = 350.0\ grados \quad \phi = 135.0\ grados$$

$$|\vec{C}| = 8.3 \quad \theta = 45.0\ grados \quad \phi = 10.0\ grados$$

Determina el vector resultante de sumar los tres vectores.

Lo primeros que debe hacerse es transformar los vectores para expresarlos en notación canónica.

$$\text{Vector A}\begin{cases} x = |\vec{A}|sen\phi cos\theta \quad \ldots \quad x = (2.0)sen(56.5)\cos(180.0) \quad \ldots \quad x = -1.67 \\ y = |\vec{A}|sen\phi sen\theta \quad \ldots \quad y = (2.0)sen(56.5)sen(180.0) \quad \ldots \quad y = 0 \\ z = |\vec{A}|cos\phi \quad \ldots \quad z = (2.0)\cos(56.5) \quad \ldots \quad z = 1.10 \end{cases}$$

$$\vec{A} = -1.67\ \hat{\imath} + 0\ \hat{\jmath} + 1.10\ \hat{k}$$

$$\text{Vector B}\begin{cases} x = |\vec{B}|sen\phi cos\theta \quad \ldots \quad x = (11.5)sen(135.0)\cos(350.0) \quad \ldots \quad x = 8.01 \\ y = |\vec{B}|sen\phi sen\theta \quad \ldots \quad y = (11.5)sen(135.0)sen(350.0) \quad \ldots \quad y = -1.41 \\ z = |\vec{B}|cos\phi \quad \ldots \quad z = (11.5)\cos(135.0) \quad \ldots \quad z = -8.13 \end{cases}$$

$$\vec{B} = 8.01\ \hat{\imath} - 1.41\ \hat{\jmath} - 8.13\ \hat{k}$$

Suma y producto por escalar

Vector C
$$\begin{cases} x = |\vec{C}| sen\phi cos\theta \quad \dots \quad x = (8.3) sen(10.0) \cos(45.0) \quad \dots \quad x = 1.02 \\ y = |\vec{C}| sen\phi sen\theta \quad \dots \quad y = (8.3) sen(10.0) sen(45.0) \quad \dots \quad y = 1.02 \\ z = |\vec{C}| cos\phi \quad \dots \quad z = (8.3)\cos(10.0) \quad \dots \quad z = 8.17 \end{cases}$$

$$\vec{C} = 1.02\,\hat{\imath} + 1.02\,\hat{\jmath} + 8.17\,\hat{k}$$

Una vez expresados los tres vectores en notación canónica, procedemos con la operación suma.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{D} = \left(-1.67\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 1.10\,\hat{k}\right) + \left(8.01\,\hat{\imath} - 1.41\,\hat{\jmath} - 8.13\,\hat{k}\right) + \left(1.02\,\hat{\imath} + 1.02\,\hat{\jmath} + 8.17\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{D} = (-1.67 + 8.01 + 1.02)\,\hat{\imath} + (0 - 1.41 + 1.02)\,\hat{\jmath} + (1.10 - 8.13 + 8.17)\,\hat{k}$$

$$\vec{D} = 7.36\,\hat{\imath} - 0.39\,\hat{\jmath} + 1.14\,\hat{k}$$

$$|\vec{D}| = 7.46 \quad \theta = 357.0\ grados \quad \phi = 81.2\ grados$$

Suma y producto por escalar

En el caso de necesitar restar vectores, es necesario combinar las dos operaciones que hemos analizado hasta el momento; es decir, primero se realiza el producto del vector, que será el sustraendo, por el escalar -1 y después se suma con el vector que será el minuendo.

Supongamos que tenemos dos vectores $\vec{V} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ y $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

Si vamos a realizar la operación $\vec{V} - \vec{A}$ el vector $\vec{A}$ es el sustraendo así que primero deberemos de multiplicarlo por el escalar -1 para después proceder con la suma de los vectores.

$$\vec{V} - \vec{A} = \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) - \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} - \vec{A} = \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) + \left(-a_x\hat{\imath} - a_y\hat{\jmath} - a_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} - \vec{A} = (v_x - a_x)\hat{\imath} + \left(v_y - a_y\right)\hat{\jmath} + (v_z - a_z)\hat{k}$$

Como puede observarse la operación “resta de vectores” brinda un nuevo vector.

Recuerda que la operación resta carece de la propiedad, ya que:

$$\vec{V} - \vec{A} \neq \vec{A} - \vec{V}$$

Pero la magnitud de los vectores resultantes de las dos operaciones anteriores si son iguales, es decir:

$$\left|\vec{V} - \vec{A}\right| = \left|\vec{A} - \vec{V}\right|$$

Ejercicio 6.

Dado los vectores $\vec{V} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$ y $\vec{A} = -8\ \mathrm{m}\ \hat{\imath} + 2\ \mathrm{m}\ \hat{\jmath} - 5\ \mathrm{m}\ \hat{k}$, determina el vector resultante de las siguientes operaciones:

i) $\vec{V} - \vec{A}$

ii) $\vec{A} - \vec{V}$

En esta ocasión no es necesario realizar ninguna transformación en los vectores pues el texto del ejercicio ya nos brinda las coordenadas de cada uno de ellos.

Para el inciso i tenemos que:

$$\vec{V} - \vec{A} = \left(3\ \hat{\imath} - 5\ \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) - \left(-8\ \hat{\imath} + 2\ \hat{\jmath} - 5\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} - \vec{A} = \left(3\ \hat{\imath} - 5\ \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) + \left(8\ \hat{\imath} - 2\ \hat{\jmath} + 5\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} - \vec{A} = (3 + 8)\,\hat{\imath} + (-5 - 2)\hat{\jmath} + (2 + 5)\,\hat{k}$$

$$\vec{V} - \vec{A} = 11\,m\,\hat{\imath} - 7\,m\,\hat{\jmath} + 7\,m\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{V} - \vec{A}\right| = 14.8\,m \quad \theta = 327.5\,grados \quad \phi = 61.8\,grados$$

Suma y producto por escalar

Para el inciso ii, tenemos que:

$$\vec{A}-\vec{V}=\left(-8\ \hat{\imath}+2\ \hat{\jmath}-5\,\hat{k}\right)-\left(3\ \hat{\imath}-5\ \hat{\jmath}+2\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}-\vec{V}=\left(-8\ \hat{\imath}+2\ \hat{\jmath}-5\,\hat{k}\right)+\left(-3\ \hat{\imath}+5\ \hat{\jmath}-2\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}-\vec{V}=(-8-3)\,\hat{\imath}+(2+5)\hat{\jmath}+(-5-2)\,\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{V}=-11\,m\,\hat{\imath}+7\,m\,\hat{\jmath}-7\,m\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{V}\right|=14.8\,m \quad \theta=147.5\,grados \quad \phi=118.2\,grados$$

Si comparamos los vectores resultantes de las dos operaciones podemos ver que la magnitud de ambos vectores es la misma pero la dirección entre ellos es contraria, es decir, son vectores antiparalelos

$$\vec{V}-\vec{A}=11\,m\,\hat{\imath}-7\,m\,\hat{\jmath}+7\,m\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{V}-\vec{A}\right|=14.8\,m \quad \theta=327.5\,grados \quad \phi=61.8\,grados$$

$$\vec{A}-\vec{V}=-11\,m\,\hat{\imath}+7\,m\,\hat{\jmath}-7\,m\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{V}\right|=14.8\,m \quad \theta=147.5\,grados \quad \phi=118.2\,grados$$

Ejercicio 7.

Considera los vectores $\vec{A} = -7\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}$ y $\vec{B} = -2\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$. Determina un tercer vector, $\vec{V}$, tal que la suma de los tres vectores resulte en:

i) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{V} = \vec{0}$

ii) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{V} = -5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}$

Para resolver estos incisos asumiremos que las coordenadas del vector incógnita son $\vec{V} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ siendo el objetivo del ejercicio determinar cada coordenada.

Para el inciso i tenemos que:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{V} = \vec{0}$$

$$\left(-7\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}\right) + \left(-2\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}\right) + \left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\right) = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$(-7 - 2 + x)\,\hat{\imath} + (2 + 7 + y)\,\hat{\jmath} + (5 + 3 + z)\,\hat{k} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Resolviendo para cada componente:

$$-7 - 2 + x = 0 \qquad x = 9$$

$$2 + 7 + y = 0 \qquad y = -9$$

$$5 + 3 + z = 0 \qquad z = -8$$

Suma y producto por escalar

Dados los resultados anteriores podemos expresar que el vector que da satisfacción a la operación solicitada es:

$$\vec{V} = 9\,\hat{\imath} - 9\,\hat{\jmath} - 8\,\hat{k}$$

$$|\vec{V}| = 15.0 \qquad \theta = 315.0\ grados \qquad \phi = 122.2\ grados$$

Para el inciso ii tenemos que:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{V} = -5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}$$

$$\left(-7\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}\right) + \left(-2\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}\right) + \left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\right) = -5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}$$

$$(-7 - 2 + x)\,\hat{\imath} + (2 + 7 + y)\,\hat{\jmath} + (5 + 3 + z)\,\hat{k} = -5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}$$

Resolviendo para cada componente.

$$-7 - 2 + x = -5 \qquad x = 4$$

$$2 + 7 + y = 2 \qquad y = -7$$

$$5 + 3 + z = 8 \qquad z = 0$$

Dados los resultados anteriores podemos expresar que el vector que da satisfacción a la operación solicitada es:

$$\vec{V} = 4\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$|\vec{V}| = 8.1 \qquad \theta = 299.7\ grados \qquad \phi = 90.0\ grados$$

Ejercicio 8.
Considera el vector $\vec{A} = -10\, m\, \hat{\imath} + 5\, m\, \hat{\jmath} - 1\, m\, \hat{k}$ y determina tanto las coordenadas como las unidades de un segundo vector, $\vec{B}$, que permita dar solución a la operación: $\vec{A} + w\vec{B} = -3\, m\, \hat{\imath} + 0\, m\, \hat{\jmath} + 4\, m\, \hat{k}$. Considera que w es un escalar cuyo valor es 3.0 s.

Iniciemos la resolución del ejercicio con el análisis de las unidades que debe tener el vector incógnita.

Dado que el vector $\vec{A}$ está medido en metros al igual que el vector resultante de la operación, entonces, el término $w\vec{B}$ deberá estar en metros para poder realizar la suma.

Sin embargo, el término w está medido en segundos, así que el vector $\vec{B}$ debe ser medido en [m/s] para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea.

Una vez que hemos determinado las unidades asociadas con el vector incógnita, procederemos con el análisis matemático de la operación para encontrar las coordenadas del vector de interés. Para ello plantearemos que las coordenadas de dicho vector son:

$$\vec{B} = x\, \hat{\imath} + y\, \hat{\jmath} + z\, \hat{k}$$

Suma y producto por escalar

Si sustituimos en la operación el valor del primer vector así como de la cantidad escalar, tenemos:

$$\vec{A} + w\vec{B} = -3\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

$$\left(-10\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 1\,\hat{k}\right) + (3.0)\left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\right) = -3\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

$$\left(-10\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 1\,\hat{k}\right) + \left((3.0)(x)\,\hat{\imath} + (3.0)(y)\,\hat{\jmath} + (3.0)(z)\,\hat{k}\right) = -3\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

$$(-10 + 3.0x)\,\hat{\imath} + (5 + 3.0y)\,\hat{\jmath} + (-1 + 3.0z)\,\hat{k} = -3\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

Resolviendo para cada componente.

$$-10 + 3.0x = -3 \qquad x = 2.33$$

$$5 + 3.0y = 0 \qquad y = -1.67$$

$$-1 + 3.0z = 4 \qquad z = 1.67$$

Dados los resultados anteriores y el análisis dimensional podemos expresar que el vector que da satisfacción a la operación solicitada es:

$$\vec{B} = 2.33\,m/s\,\hat{\imath} - 1.67\,m/s\,\hat{\jmath} + 1.67\,m/s\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{B}\right| = 3.32\,m/s \qquad \theta = 324.4\,grados \qquad \phi = 59.8\,grados$$

Producto entre vectores

Ahora nos dedicaremos a entender los pormenores de las operaciones que involucran el producto entre vectores.

Estas operaciones son dos y están categorizadas en función del resultado de dicha operación.

El producto escalar entre dos vectores, también denominado producto punto por el símbolo que se emplea para denotar la operación (•), resulta en una cantidad escalar.

El producto vectorial entre dos vectores, también denominado producto cruz por el símbolo que se emplea para denotar la operación (×), resulta en una cantidad vectorial.

Producto escalar.

Definición. Dados los vectores $\vec{V} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ y $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ el producto escalar entre dos vectores es:

$$\vec{V}\bullet\vec{A} = (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k})\bullet(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) = (v_x)(a_x) + (v_y)(a_y) + (v_z)(a_z)$$

Lo anterior puede entenderse como la suma del producto entre las componentes de los vectores, obteniéndose un escalar.

Otra forma para determinar el escalar resultante del producto escalar entre vectores es:

$$\vec{V}\bullet\vec{A} = |\vec{V}||\vec{A}|cos\theta$$

Lo anterior puede entenderse como el producto de las magnitudes de ambos vectores por el coseno del ángulo θ que forman los vectores.

Dadas las formas de analizar el producto escalar, podemos establecer que para los dos vectores empleados en la definición:

$$(v_x)(a_x) + (v_y)(a_y) + (v_z)(a_z) = |\vec{V}||\vec{A}|cos\theta$$

Estas ecuaciones serán de gran utilidad para determinar el ángulo entre vectores o la proyección de un vector sobre otro.

Producto entre vectores

Las propiedades generales de esta operación son:

• El producto escalar de un vector consigo mismo es igual al cuadrado de la magnitud del vector.

$$\vec{V}\bullet\vec{V} = |\vec{V}|^2$$

• Propiedad asociativa. El producto escalar entre dos vectores es asociativo con un escalar u.

$$u(\vec{A}\bullet\vec{B}) = (u\vec{A})\bullet\vec{B} = \vec{A}\bullet(u\vec{B})$$

• Propiedad distributiva. El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores.

$$\vec{V}\bullet(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{V}\bullet\vec{A} + \vec{V}\bullet\vec{B}$$

• Propiedad conmutativa. El producto escalar es conmutativo entre dos vectores.

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A}$$

• Desigualdad de Cauchy-Schwarz. El producto escalar entre dos vectores es menor o igual que el producto de las magnitudes de los vectores.

$$\vec{A}\bullet\vec{B} \leq |\vec{A}||\vec{B}|$$

• Propiedad de ortogonalidad. El producto escalar entre dos vectores diferentes del vector $\vec{0}$, será cero si los dos vectores son perpendiculares.

Antes de mostrar algunos ejercicios, analicemos un poco las características del producto escalar que nos permitirán tener un mejor panorama de esta operación.

El resultado del producto escalar, como su nombre lo dice, es una cantidad escalar y sus unidades provienen de combinar, mediante la multiplicación, las unidades en las que se expresan los vectores operados.

El ángulo involucrado en el producto escalar entre dos vectores siempre estará en el intervalo de validez $0.0 \leq \theta \leq 180.0$ grados sin importar en qué dimensionalidad estén los vectores y es el ángulo que forman los vectores entre ellos, no es un ángulo medido con respecto a ningún eje coordenado.

Si se deseará determinar el ángulo que forma un vector con algún eje coordenado particular, entonces el producto escalar deberá involucrar al vector canónico que define al eje coordenado que sea de interés. De hecho, es de esta forma que se definen los "cosenos directores".

Supongamos que deseamos medir el ángulo que forma un vector con respecto al eje coordenado x, que está definido por el vector canónico $\hat{\imath}$, si empleamos la operación producto escalar tenemos:

$$\vec{V} \bullet \vec{\imath} = |\vec{V}||\vec{\imath}| cos\theta$$

Producto entre vectores

Asumiendo que el vector canónico tiene coordenadas $\hat{\imath}$ (1, 0, 0) y que el vector tiene coordenadas $\vec{V}(x, y, z)$, entonces, el producto escalar los ambos vectores es:

$$\vec{V}\bullet\vec{\imath} = (x, y, z)\bullet(1, 0, 0) = x$$

Sustituyendo el resultado del producto escalar en la ecuación que implica el ángulo entre los vectores tenemos:

$$\vec{V}\bullet\vec{\imath} = |\vec{V}||\vec{\imath}|cos\theta \quad \ldots \quad x = |\vec{V}||\vec{\imath}|cos\theta$$

Dado que la magnitud del vector canónico es uno, podemos despejar de la ecuación anterior al coseno del ángulo.

$$cos\theta = \frac{x}{|\vec{V}|}$$

Observa que este resultado coincide con la forma en la que determinamos un ángulo empleando el teorema de Pitágoras pero tiene la "ventaja" de que no es necesario hacer una representación gráfica o visualizar el triángulo rectángulo lo cual es, en varias ocasiones, difícil de observar.

Este mismo procedimiento puede emplearse para definir cualquier ángulo con respecto a cualquier vector canónico (eje coordenado) sin importar en qué dimensionalidad sea expresado el vector, pues aunque en este curso se muestran vectores hasta de tres dimensiones eso no implica que no existan representaciones vectoriales de mayor dimensionalidad.

Producto entre vectores

En este sentido podemos establecer una relación entre el valor del producto escalar y el ángulo que forman los vectores:

- Si el producto escalar es cero, entonces los vectores son perpendiculares formando un ángulo recto (90.0 grados).

- Si el producto escalar es positivo, entonces los vectores están formando un ángulo agudo, cuyo intervalo de validez es de $0.0 < \theta < 90.0$ grados.

- Si el producto escalar es negativo, entonces los vectores están formando un ángulo obtuso, cuyo intervalo de validez es de $90.0 < \theta < 180.0$ grados.

Existen dos particularidades en el producto escalar.

- En la primera el producto de las magnitudes de los vectores coincide con el valor del producto escalar, lo cual indica que los vectores son paralelos; es decir, forman un ángulo de cero grados.

- En la segunda el producto de las magnitudes de los vectores coincide con el menos producto escalar, lo cual indica que los vectores son antiparalelos; es decir, forman un ángulo llano (180.0 grados).

Ejercicio 1.
Dado los vectores $\vec{V} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$ y $\vec{A} = -8\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 5\,\mathrm{N}\,\hat{k}$, determina el producto escalar así como el ángulo que forman los dos vectores.

Para determinar el producto escalar entre los dos vectores recurriremos a la definición que involucra la suma del producto entre las componentes de los vectores.

$$\vec{V} \bullet \vec{A} = \left(3\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) \bullet \left(-8\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 5\,\hat{k}\right) = (3)(-8) + (-5)(2) + (2)(-5)$$

$$\vec{V} \bullet \vec{A} = -24 - 10 - 10 = -44.0\ \mathrm{Nm}$$

Observa que el resultado del producto escalar es un número (escalar) en el que las unidades resultantes provienen de multiplicar las unidades de cada vector.

Una vez calculado el producto escalar, el resultado nos servirá para determinar el ángulo entre los vectores. Para ello emplearemos que

$$\vec{V} \bullet \vec{A} = \left|\vec{V}\right|\left|\vec{A}\right| cos\theta$$

Por lo que necesitamos determinar la magnitud de cada uno de los vectores.

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (2)^2} = 6.16\ m$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 9.63\ \mathrm{N}$$

Producto entre vectores

Con el valor de las magnitudes de los vectores podemos sustituir en la ecuación que contiene al ángulo θ que forman los vectores.

$$\vec{V}\bullet\vec{A} = |\vec{V}||\vec{A}|cos\theta \quad \dots \quad -44.0 = (6.16)(9.63)cos\theta \quad \dots \quad \cos\theta = \frac{-44.0}{(6.16)(9.63)}$$

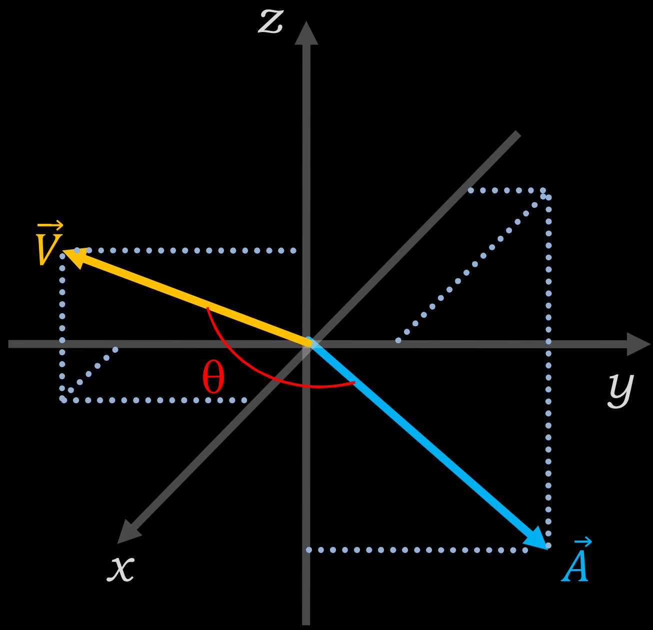
$$\theta = 137.9 \; grados$$

Este valor representa el ángulo mínimo formado entre los dos vectores.

Gráficamente el ángulo sería:

$\vec{V} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$

$\vec{A} = -8\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 5\,\mathrm{N}\,\hat{k}$

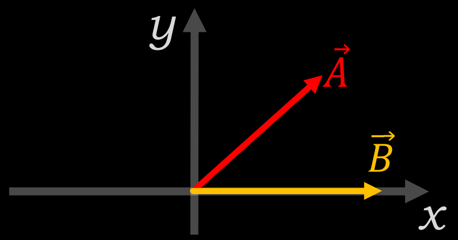


CUIDADO: El ángulo que acabamos de determinar no se mide con respecto a ningún eje coordenado y es el ángulo entre los dos vectores involucrados.

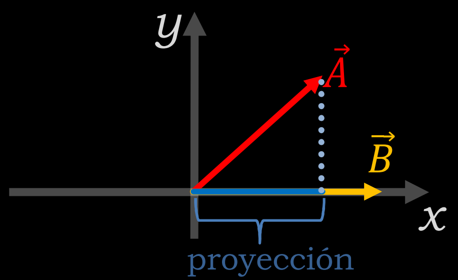
Producto entre vectores

Como se mencionó, el producto escalar es empleado para determinar la proyección de un vector, sea sobre una línea cualquiera, un eje coordenado u otro vector.

Con la intención de facilitar la interpretación geométrica de dicha proyección, empleemos dos vectores situados en un espacio euclidiano bidimensional como los mostrados en la siguiente imagen.



La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ es la "sombra" que genera el primer vector sobre el segundo vector:



La forma en la que cuantificamos cuánto se proyectó el vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ es empleando el producto escalar entre vectores.

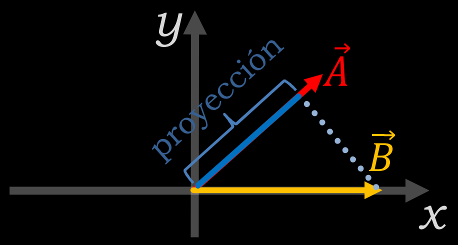
Producto entre vectores

Para determinar cuánto se proyecta un vector sobre otro, emplearemos una ecuación en la que se multiplica la proyección del vector que se desea proyectar por la magnitud del vector en el que se va a proyectar y este producto se iguala con el producto escalar de los dos vectores involucrados.

Siguiendo el ejemplo anterior, la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, la ecuación a resolver sería:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = proy\vec{A}|\vec{B}| \quad \ldots \quad proy\vec{A} = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

De hecho, podríamos determinar cuánto se proyecta el vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$



$$\vec{A}\bullet\vec{B} = proy\vec{B}|\vec{A}| \quad \ldots \quad proy\vec{B} = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

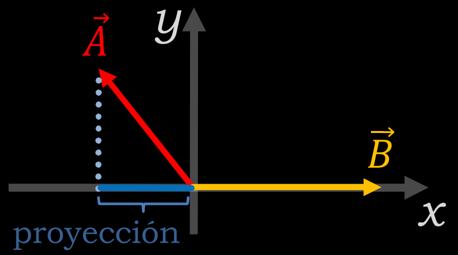
En los dos casos se puede observar que geométricamente la “línea” imaginaria que une al vector proyectado con el valor de la proyección en el otro vector debe formar un ángulo recto, es decir, 90.0 grados.

Además, en ambos casos la proyección de un vector sobre el otro sería positiva debido a que el ángulo que forman los dos vectores es menor a 90.0 grados.

Producto entre vectores

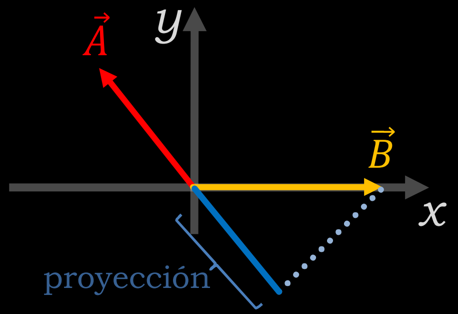
En el caso de que el ángulo entre los dos vectores sea mayor a 90.0 grados pero menor a 180.0 grados, la proyección será negativa y no estaría sobre el vector sino en dirección contraria al vector.

Por ejemplo, veamos la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, en la siguiente representación gráfica:



$$proy\vec{A} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

En el caso de la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$ sería:



$$proy\vec{B} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}|}$$

Observa que para mostrar gráficamente la proyección de un vector sobre otro cuando el ángulo entre ellos es mayor a 90.0 grados, es necesario trazar una línea imaginaria en dirección contraria a la dirección en la que apunta el vector sobre el que se va a proyectar.

Producto entre vectores

Finalmente, nos hace falta asociar una dirección a la proyección determinada y para ello recurriremos al concepto vector unitario que fue discutido en la presentación anterior.

Recuerda que un vector unitario se determina mediante la división de un vector sobre su magnitud, tal que:

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

Una vez que se ha determinado la proyección de un vector sobre otro, se multiplica el valor de la proyección por el vector unitario asociado al vector sobre el que se está proyectando.

Por ejemplo, en la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ que realizamos anteriormente, la dirección de la proyección sería:

$$proy\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\hat{B}$$

Cambiando el vector unitario por su definición tendríamos:

$$proy\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad \ldots \quad proy\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)\vec{B}$$

Ejercicio 2.
Dado los vectores $\vec{V} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$ y $\vec{A} = -8\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 5\,\mathrm{N}\,\hat{k}$, determina la proyección del vector $\vec{V}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Para determinar la proyección de un vector sobre otro es necesario determinar el producto escalar.

$$\vec{V}\bullet\vec{A} = \left(3\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right)\bullet\left(-8\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 5\,\hat{k}\right) = (3)(-8) + (-5)(2) + (2)(-5)$$

$$\vec{V}\bullet\vec{A} = -24 - 10 - 10 = -44.0\ \mathrm{Nm}$$

En el caso de la proyección del vector $\vec{V}$ sobre el vector $\vec{A}$, tenemos:

$$proy\vec{V} = \left(\frac{\vec{V}\bullet\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|^2}\right)\vec{A}$$

Por lo que es requerido determinar la magnitud del vector sobre el que se va a proyectar.

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 9.63\ \mathrm{N}$$

Ahora podemos determinar la proyección:

$$proy\vec{V} = \frac{-44.0}{(9.63)^2}\left(-8\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 5\,\hat{k}\right) = 3.8\,m\,\hat{\imath} - 0.9\,m\,\hat{\jmath} + 2.4\,m\,\hat{k}$$

Observa que la proyección conserva las unidades del vector proyectado.

Producto vectorial.

Definición. Dados los vectores $\vec{V} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ y $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ el producto vectorial entre dos vectores es:

$$\vec{V} \times \vec{A} = \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) \times \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{V} \times \vec{A} = \left(v_y a_z - v_z a_y\right)\hat{\imath} + \left(v_z a_x - v_x a_z\right)\hat{\jmath} + \left(v_x a_y - v_y a_x\right)\hat{k}$$

En el producto vectorial se obtiene como resultado otro vector que es perpendicular a los dos vectores que fueron multiplicados y cuya magnitud puede calcularse con la relación:

$$\left|\vec{V} \times \vec{A}\right| = \left|\vec{V}\right|\left|\vec{A}\right| sen\theta$$

En donde el ángulo θ representa el ángulo que forman los vectores multiplicados entre ellos.

El método para resolver el producto vectorial entre dos vectores es a través de un determinante, en donde en la primera fila se colocan los vectores canónicos, en la segunda fila se escribe el primer vector en el producto mientras que en la tercera fila se coloca el segundo vector, tal que:

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Producto entre vectores

El mecanismo que emplearemos para resolver el determinante 3x3 que acabamos de expresar consiste en reducirlo a tres determinantes 2x2.

Lo primero que haremos será elegir la primera fila con la primera columna.

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Lo que nos permite escribir un determinante 2x2 que irá multiplicado por el vector canónico $\hat{\imath}$, de forma que:

$$\hat{\imath} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Ahora, elegiremos la columna dos conservando la fila uno.

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Lo que nos permite escribir un determinante 2x2 que irá multiplicado por el vector canónico $\hat{\jmath}$, de forma que:

$$\hat{\jmath} \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ a_x & a_z \end{vmatrix}$$

Producto entre vectores

Ahora elegiremos la columna tres conservando la fila uno.

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Lo que nos permite escribir un determinante 2x2 que irá multiplicado por el vector canónico $\hat{k}$, de forma que:

$$\hat{k} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$$

Si juntamos los tres determinantes 2x2 que hemos generado siguiendo que en la reducción de un determinante, los determinantes generados se expresan como una suma con la peculiaridad de que los signos se van alternando, tenemos:

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ a_x & a_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

Finalmente recurrimos al método establecido para resolver determinantes 2x2, en el cual, de forma general, se tiene:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$$

Producto entre vectores

Aplicando la forma de resolver un determinante 2x2 a los determinantes que tenemos multiplicados por los vectores canónicos llegamos a:

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ a_x & a_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{V} \times \vec{A} = \left(v_y a_z - v_z a_y\right) \hat{\imath} + \left(v_z a_x - v_x a_z\right) \hat{\jmath} + \left(v_x a_y - v_y a_x\right) \hat{k}$$

De esta forma encontramos el vector resultante del producto vectorial entre los vectores involucrados.

Ahora veamos las propiedades de este producto.

• Propiedad distributiva. El producto vectorial es distributivo respecto a la suma de vectores.

$$\vec{V} \times \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{V} \times \vec{A} + \vec{V} \times \vec{B}$$

• Propiedad de paralelismo. El producto vectorial entre dos vectores diferentes del vector $\vec{0}$, será cero si los dos vectores son paralelos.

CUIDADO: En este producto no se cumple que “el orden de los factores no altera el resultado” ya que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Ejercicio 3.
Dado los vectores $\vec{B} = 3\,m\,\hat{\imath} - 5\,m\,\hat{\jmath} + 2\,m\,\hat{k}$ y $\vec{A} = -8\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 5\,\mathrm{N}\,\hat{k}$, determina el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$.

Iniciemos resolviendo el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (4 - 25)\,\hat{\imath} + (-15 + 16)\,\hat{\jmath} + \ (40 - 6)\,\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -21.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{\imath} + 1.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{\jmath} + \ 34.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = 40.0\ \mathrm{Nm} \qquad \theta = 177.3\ grados \qquad \phi = 31.8\ grados$$

En el caso del producto vectorial $\vec{B} \times \vec{A}$.

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -5 & 2 \\ -8 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = (25 - 4)\,\hat{\imath} + (-16 + 15)\,\hat{\jmath} + (6 - 40)\,\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 21.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{\imath} - 1.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{\jmath} - 34.0\ \mathrm{Nm}\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{B} \times \vec{A}\right| = 40.0\ \mathrm{Nm} \qquad \theta = 357.3\ grados \qquad \phi = 148.2\ grados$$

Producto entre vectores

Si observamos los dos vectores anteriores podemos observar que se cumple que el producto vectorial no es conmutativo pues el orden de los elementos en el producto afecta el resultado.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -21.0 \text{ Nm } \hat{\imath} + 1.0 \text{ Nm } \hat{\jmath} + 34.0 \text{ Nm } \hat{k}$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = 40.0\text{Nm} \qquad \theta = 177.3 \; grados \qquad \phi = 31.8 \; grados$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 21.0 \text{ Nm } \hat{\imath} - 1.0 \text{ Nm } \hat{\jmath} - 34.0 \text{ Nm } \hat{k}$$

$$\left|\vec{B} \times \vec{A}\right| = 40.0\text{Nm} \qquad \theta = 357.3 \; grados \qquad \phi = 148.2 \; grados$$

De hecho, la única característica que conservan es que ambos vectores tienen la misma magnitud.

Cabe mencionar que, empleando el producto escalar, podemos demostrar que:

- Los dos vectores obtenidos forman un ángulo de 180.0 grados, es decir, son antiparalelos.

- Cualquiera de los dos vectores obtenidos son perpendiculares con los vectores que fueron multiplicados.

Producto entre vectores

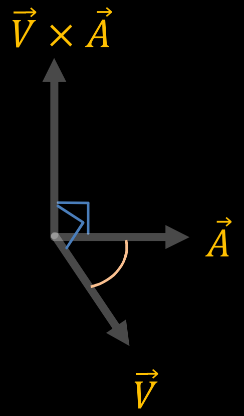
Una forma de analizar la dirección del vector que resulta de la operación producto vectorial es empleando algunos dedos de la mano derecha.

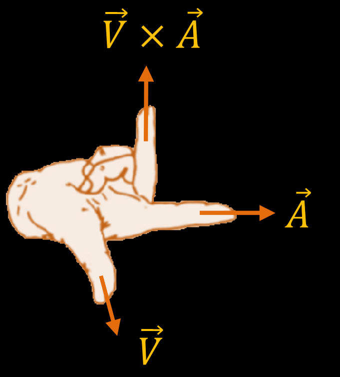
En esta ocasión, los dedos se emplean de la siguiente manera:

- El dedo pulgar debe apuntar en la dirección del primer vector que se va a multiplicar.

- El dedo índice debe apuntar en la dirección del segundo vector que se va a multiplicar.

- El dedo medio, que debe colocarse de forma que sea perpendicular a los dedos pulgar e índice, apuntará en la dirección del vector resultante.





Producto entre vectores

Para finalizar esta presentación, cabe mencionar que las dos operaciones aquí vistas pueden combinarse para generar un producto denominado producto mixto entre vectores.

Dados tres vectores $\vec{V} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$, $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ y $\vec{B} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$ el producto mixto se define como:

$$\vec{V} \bullet (\vec{B} \times \vec{A})$$

El resultado del producto mixto es un escalar en el que las unidades es el producto de las unidades de los tres vectores.

Es importante señalar que en la operación producto mixto primero debe resolverse el producto vectorial y posteriormente el producto escalar.

Cabe mencionar que el valor absoluto del escalar que se obtiene del producto mixto está directamente asociado con el volumen de cualquier paralelepípedo en el espacio de tres dimensiones, en donde la magnitud del producto vectorial representa el área del paralelepípedo.