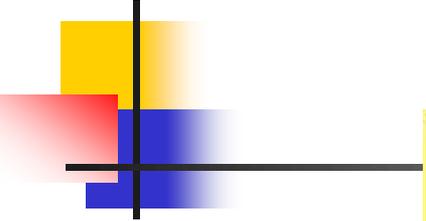


## UNIDADES TEMÁTICAS

NÚMERO DE HORAS POR UNIDAD	UNIDAD
8T 8H	<p>1. FUERZA ELÉCTRICA.</p> <p>1.1. Naturaleza discreta de la carga eléctrica.</p> <p>1.2. Principio de conservación de la carga eléctrica.</p> <p>1.3. Métodos para cargar eléctricamente un cuerpo (frotación, inducción y contacto).</p> <p>1.4. Características de conductores y aislantes (dieléctricos) eléctricos.</p> <p>1.5. Ley de Coulomb.</p> <p>1.6. Aplicaciones de la ley de Coulomb, para el cálculo de interacciones en los casos:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Distribuciones discretas de cargas puntuales.</li><li>b) Distribuciones continuas de carga eléctrica.</li><li>c) El dipolo eléctrico como caso particular.</li></ul>
6T 6H	<p>2. CAMPO ELÉCTRICO.</p> <p>2.1. Campo eléctrico generado por cargas puntuales. Principio de superposición.</p> <p>2.2. Campo eléctrico generado por distribuciones continuas de carga eléctrica.</p> <p>2.3. El campo eléctrico generado por un dipolo. El vector momento dipolar eléctrico.</p> <p>2.4. Movimiento de cargas originado por campos eléctricos.</p>
4T 4H	<p>3. LEY DE GAUSS PARA ELECTRICIDAD.</p> <p>3.1. El flujo de un vector.</p> <p>3.2. El flujo del vector campo eléctrico.</p> <p>3.3. La ley de Gauss para campo eléctrico.</p>

	3.4. Aplicaciones de la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico generado por distribuciones continuas de carga eléctrica (casos de alta simetría).
4T 4H	4. ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA.  4.1. Fuerzas conservativas. Trabajo realizado por fuerzas conservativas. 4.2. La función energía potencial electrostática. (Enfatizar el concepto de diferencia de energía potencial). 4.3. Energía potencial asociada a diferentes configuraciones de cargas puntuales.
6T 6H	5. EL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO.  5.1. La diferencia de potencial electrostático concebida como la diferencia de energía potencial electrostática por cada unidad de carga. 5.2. Diferencia de potencial eléctrico generada por: a) Distribuciones discretas de cargas puntuales. b) Distribuciones continuas de carga. c) Un dipolo eléctrico, generalización a multipolos. 5.3. El vector campo eléctrico a partir de la función escalar asociada al potencial electrostático.
6T 6H	6. CAPACITORES.  6.1. Cálculo de capacitancia en los casos de placas: a) Planas paralelas. b) Cilíndricas coaxiales. c) Esféricas concéntricas. 6.2. Circuitos en paralelo, serie y mixtos. Determinación de capacitancias equivalentes. 6.3. Capacitores con dieléctrico. 6.4. Relación entre los vectores campo eléctrico, desplazamiento eléctrico y polarización eléctrica. 6.5. Energía del campo eléctrico en capacitores con y sin dieléctrico.
4T 4H	7. INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA.  7.1. Intensidad de corriente eléctrica y densidad de corriente eléctrica. 7.2. Resistividad y conductividad de un elemento, dependencia de estas propiedades con la temperatura. 7.3. Resistencia (conductores, semiconductores y superconductores). 7.4. Circuitos en paralelo, serie y mixtos. Determinación de resistencias equivalentes. 7.5. Efecto Joule.
4T 4H	8. FUERZA ELECTROMOTRIZ.  8.1. Fuentes de fuerza electromotriz. 8.2. Circuitos simples con corriente continua. Reglas de Kirchhoff. 8.3. Circuitos RC.
8T 8H	9. CAMPO Y FUERZA MAGNÉTICOS.  9.1. Campo magnético. 9.2. Fuerza magnética sobre partículas puntuales moviéndose en



	<p>regiones con campos magnéticos. Aplicaciones: Ciclotrón, Selector de velocidades, Espectrómetro de masas.</p> <p>9.3. Fuerza magnética sobre corrientes eléctricas.</p> <p>9.4. Torca magnética sobre una espira de corriente (motor). Momento dipolar magnético de una espira de corriente.</p> <p>9.5. Efecto Hall.</p>
6T 6H	<p>10. FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO.</p> <p>10.1. Ley de Biot-Savart.</p> <p>10.2. Ley de Ampère.</p> <p>10.3. Cálculo del campo magnético generado por: alambre recto, espira, solenoide, toroide y cinta.</p> <p>10.4. Flujo del vector campo magnético. Ley de Gauss para campo magnético.</p> <p>10.5. Respuesta magnética de los materiales.</p> <p>a) Ferromagnetismo.</p> <p>b) Diamagnetismo.</p> <p>c) Paramagnetismo.</p>
8T 8H	<p>11. INDUCCIÓN MAGNÉTICA Y ECUACIONES DE MAXWELL.</p> <p>11.1. Ley de inducción de Faraday-Lenz.</p> <p>11.2. Inductancia y energía magnética.</p> <p>11.3. Circuitos RLC para corriente continua.</p> <p>11.4. Oscilaciones electromagnéticas.</p> <p>11.5. Resonancia.</p> <p>11.6. Corrientes de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell.</p>
SUMA: 64T-64H	

#### BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. Ohanian H., Markert J., Física para Ingeniería y Ciencias, Vol. 2. 3ª Ed., México, McGraw-Hill (2009). ISBN: 9789701067468.
2. Halliday D., Resnick R., Krane K., Física Vol. 2, 5ª Ed., México, Patria (2009). ISBN: 970-24-0257-2.
3. Sears F. W., Zemansky M. W., Young H. D., Freedman R. A., Física Universitaria con Física Moderna, Vol. 2. 13ª Ed., México, Pearson Education (2014). ISBN: 9786073221245.
4. Tipler P. A., Mosca G., Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2, 6ª Ed., México, Reverté (2010). ISBN: 9788429144307.
5. Serway R. A., Jewett J. W., Física para ciencias e ingeniería, Vol. 2. 9ª Ed. México, Cengage Learning (2015) ISBN: 9786075191980.
6. Alonso M., Finn E., Física (campos y ondas) Vol. 2, México, Pearson Educación (1998) ISBN. 9684442246.

#### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

1. Purcell E., Berkeley Physics Course Vol. 2: Electricidad y Magnetismo, 2ª Ed., España, Reverté (2005). ISBN: 84-291-4319-X.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M., The Feynman Lectures on Physics Vol. II. ISBN: 9780805390476.
3. Eisberg R., Lerner L., Física: Fundamentos y aplicaciones, Vol. 2. McGraw-Hill (1990) ISBN: 9684516347.
4. Reitz J., Milford F., Christy R., Fundamentos de la Teoría Electromagnética, 4ª Ed., Pearson Educación (1999) ISBN: 9684444036.
5. Schey, H. M. Div, Grad, Curl and All That: An Informal Text on Vector Calculus, Fourth Edition. W.W. Norton & Company, New York, (2005) ISBN-13: 9780393925166.

#### SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Como antecedente de la asignatura es recomendable que el estudiante haya sido introducido a los conceptos de vectores y sus operaciones más elementales, así como también tener antecedentes en cálculo diferencial e integral. En la propuesta de esta asignatura antecede un curso de álgebra superior, de física en el área de mecánica y de cálculo de funciones de una variable, esto, muy probablemente, redundará en una presentación más ágil y en una mejor comprensión de los temas del curso. El curso está estructurado en unidades y en cada una de ellas el alumno deberá ser capaz de resolver problemas específicos y de aplicación relacionados con los temas.

#### FORMA DE EVALUAR

Se sugiere evaluar con exámenes parciales, un examen departamental y exámenes finales.

#### PERFIL PROFESIOGRÁFICO DE QUIENES PUEDEN IMPARTIR LA ASIGNATURA

Profesionales de la física y la química: Físicos, Químicos e Ingenieros con conocimientos en el campo de la química.



---

Acuerdos de clase:

Horarios

Asistencias

Exámenes

Tareas

Laboratorio

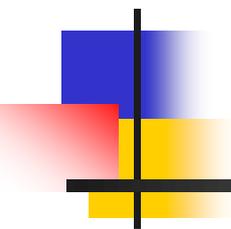
Exposiciones

Celulares

Calificación final

# Vectores

Presentación basada en el material contenido en: Serway, R.  
Physics for Scientists and Engineers. Saunders College Pub. 3rd  
edition.



---



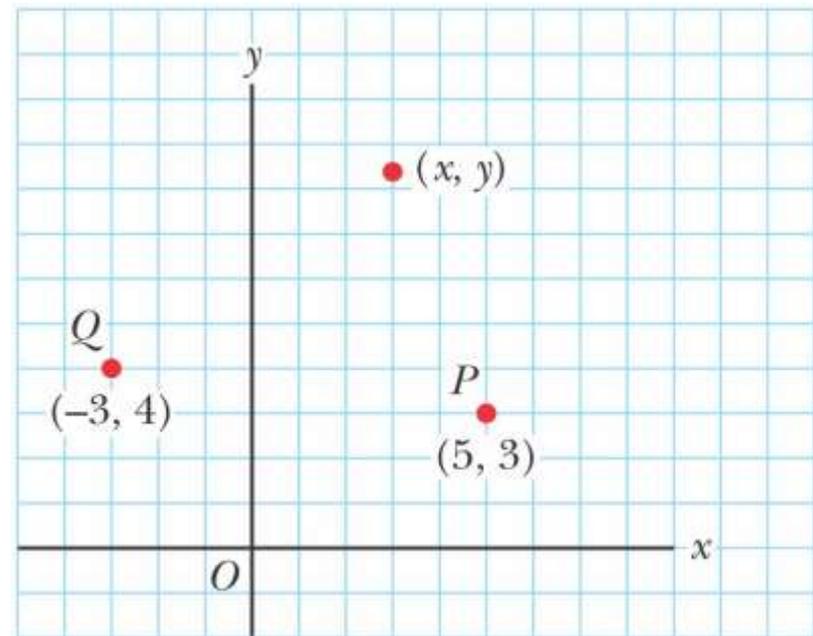
# Sistemas de Coordenadas

---

- Se usan para describir la posición de un punto en el espacio
- El sistema de coordenadas consiste de:
  - Un punto de referencias fijo que se llama origen
  - Ejes con una escala y denominación ( $x$ ,  $t$ ,  $T$ )
  - Instrucciones sobre como señalar un punto con respecto al origen y los ejes.

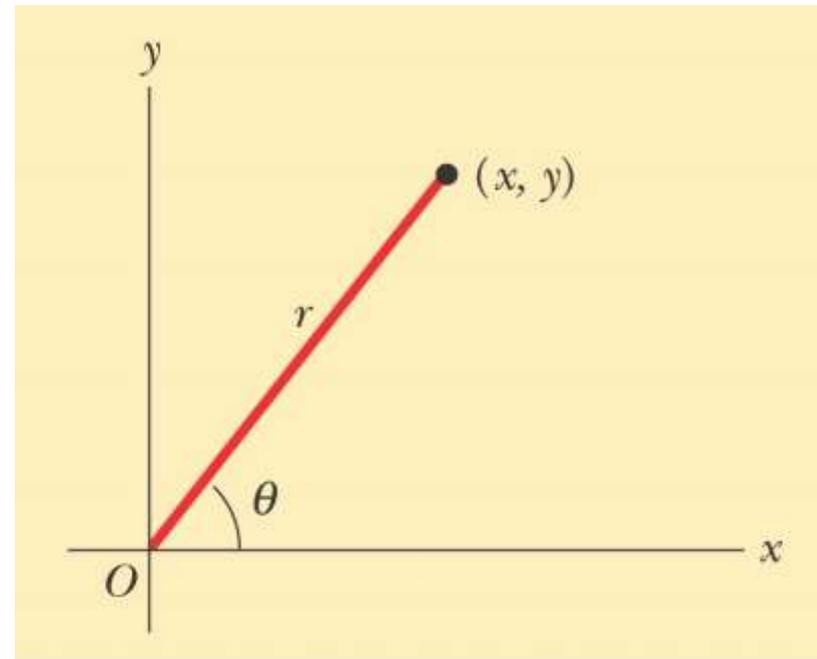
# Sistema cartesiano de coordenadas

- Sistema de coordenadas rectangulares
- Los ejes  $x$  y  $y$  se intersecan en el origen
- Los puntos se señalan mediante  $(x,y)$



# Sistemas de coordenadas Polares

- Hay que señalar el origen y la línea de referencia.
- Un punto señala la distancia  $r$  desde el origen en la dirección del ángulo  $\theta$ , medido desde la línea de referencia
- Los puntos han de señalarse por  $(r, \theta)$



(a)

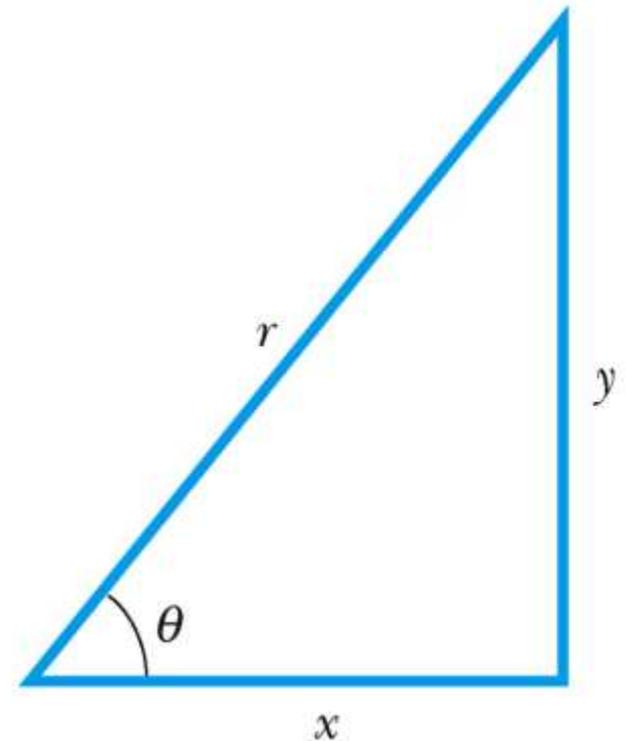
# Transformando coordenadas Polares a cartesianas

- Se forma haciendo un ángulo recto a partir de  $r$  y  $\theta$
- $x = r \cos \theta$
- $y = r \sin \theta$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



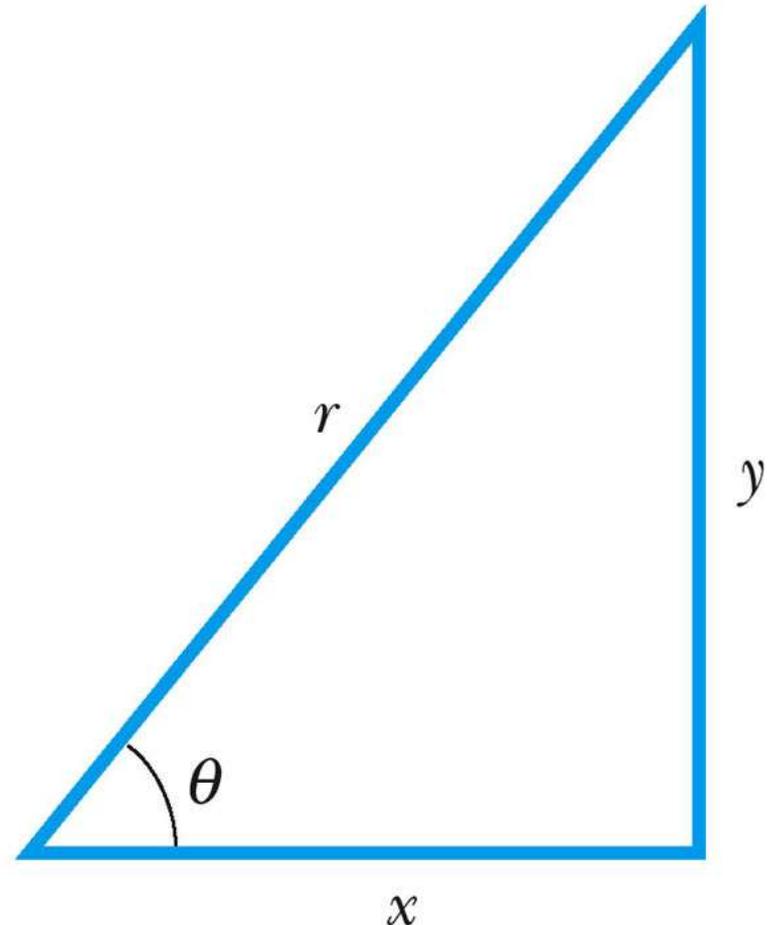
# Transformando coordenadas polares en Cartesianas

- $r$  es la hipotenusa y  $\theta$  es un ángulo

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $\theta$  ha de medirse desde el eje positivo de las  $x$  para que las ecuaciones sean válidas





# Vectores and Escalares

---

- Un ***escalar*** es una cantidad que está completamente especificada por un número (+ ó -) con sus unidades apropiadas y carece de dirección.
- Un ***vector*** es una cantidad física que debe ser descrita con base en una magnitud (número), sus unidades apropiadas y una dirección.



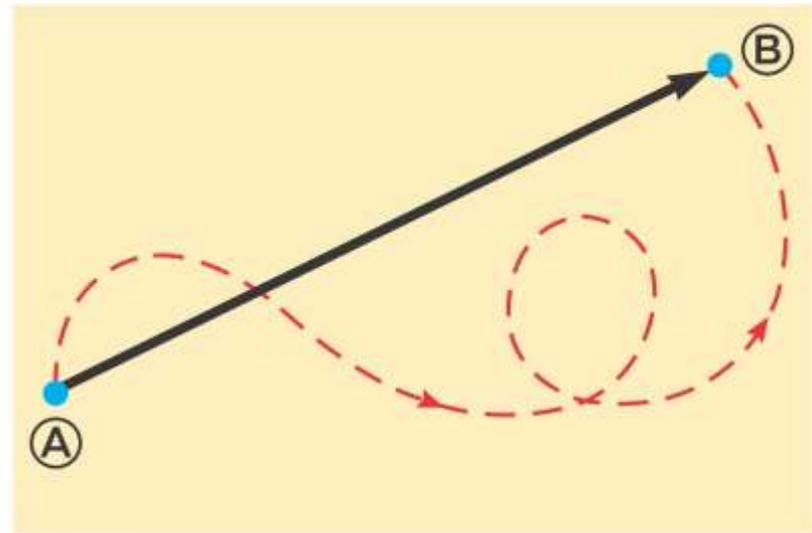
# Notas Sobre Escalares

---

- Algunos ejemplos
  - Temperatura
  - Volumen
  - Masa
  - Intervalos de tiempo
- Para manejar cantidades escalares se emplean las reglas ordinarias de la aritmética

# Ejemplo de Vectores

- Una partícula viaja desde **A** hasta **B**, a lo largo del camino mostrado por la línea discontinua roja
- Esta es la **distancia recorrida** y es un escalar
- El **desplazamiento** es la línea sólida que va desde A hasta B.
  - El desplazamiento es independiente del camino que se tome entre los dos puntos.
  - El desplazamiento es un vector





# Otros Ejemplos de Vectores

---

- Muchas otras cantidades son también vectores
- Algunas de éstas incluyen:
  - Velocidad
  - Aceleración
  - Fuerza
  - Momentum



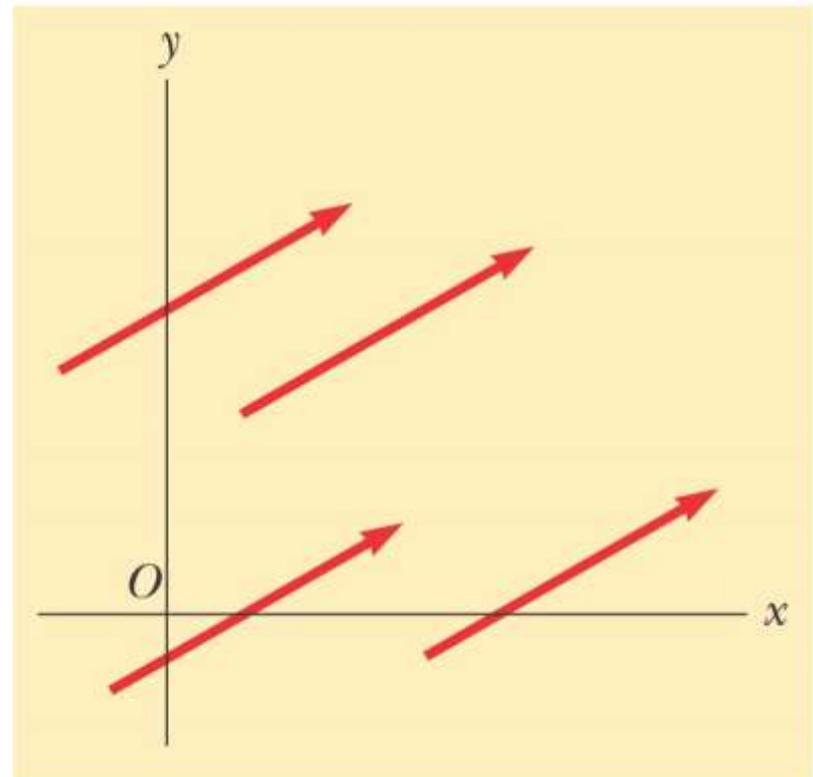
# Notación Vectorial

---

- $\vec{A}$
- Con “negritas”  $\vec{\mathbf{A}}$
- La magnitud de un vector se denota con barras o simplemente con una letra:  $A$  ó  $| \quad |$
- La magnitud (Norma) del vector tiene unidades físicas
- La magnitud de un vector es siempre una cantidad positiva

# Igualdad de dos vectores $\vec{A} = \vec{B}$

- Dos vectores son **iguales** sólo si ellos tienen la misma magnitud y dirección
- Si  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  y estos apuntan a lo largo de líneas paralelas
- Todos los vectores que se muestran son iguales





# Sumando Vectores

---

- Cuando se suman vectores, las direcciones de estos debe ser tomada en cuenta
- Deben tener las mismas unidades físicas
- Hay métodos gráficos
  - Dibujos a escala
- Métodos Algebraicos
  - Es más conveniente



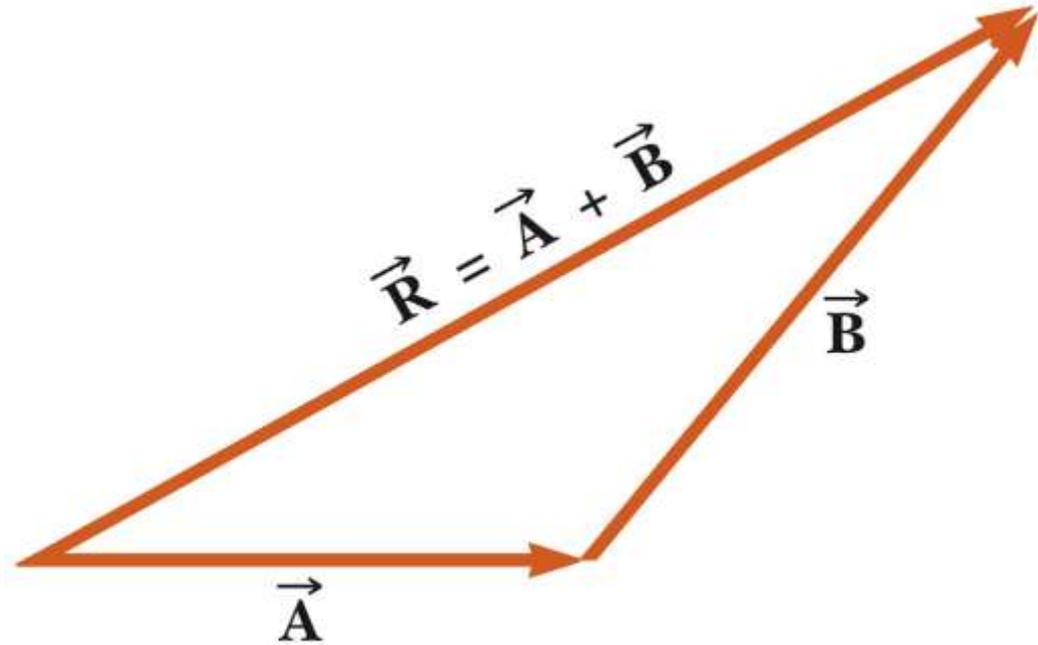
# Suma gráfica de Vectores

---

- Elija una escala
- Dibuje el primer vector con la longitud y dirección apropiadas, con respecto al sistema coordenado que ha elegido
- Dibule el siguiente vector con la magnitud y dirección apropiadas, con respecto al sistema de coordenadas cuyo origen es ahora la parte final de  $\vec{A}$  y paralelo al sistema de coordenadas usada para  $\vec{A}$

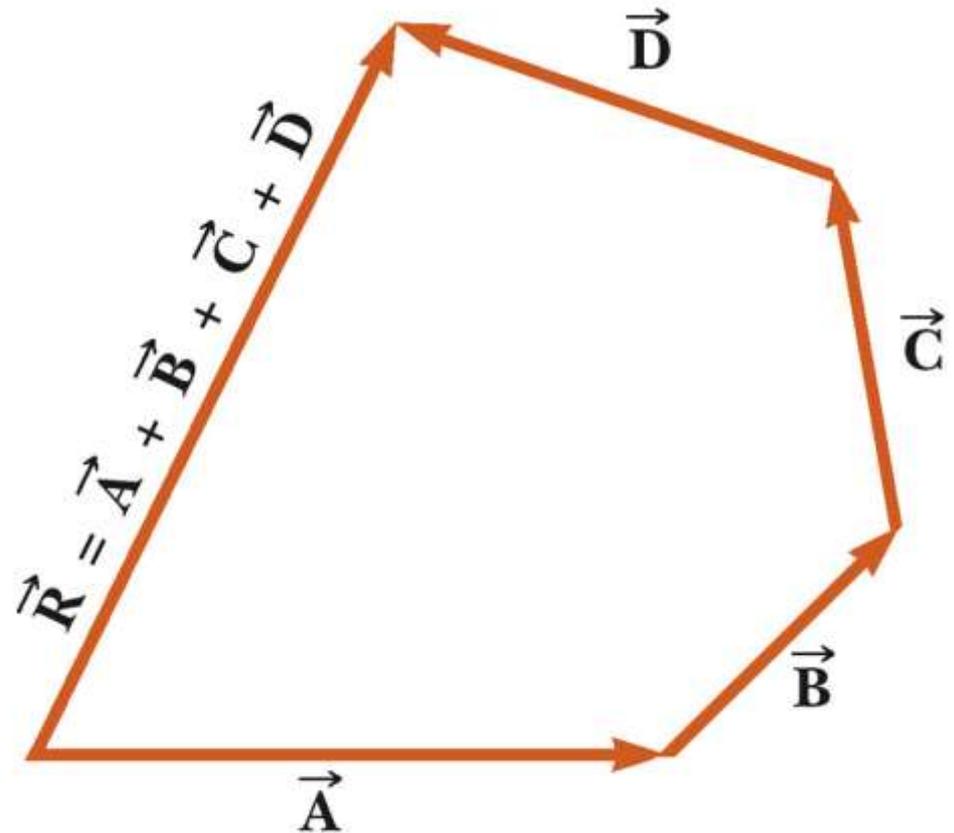
## Sumando vectores gráficamente, cont...

- Continúe dibujando los vectores “punta con cola”
- La resultante se obtiene uniendo la cola del primero con la punta del último
- Mida la longitud de la resultante y obtenga su ángulo
  - Utilice el factor de escala para convertir la longitud obtenida en la magnitud real del vector.



# Más de la suma gráfica de vectores

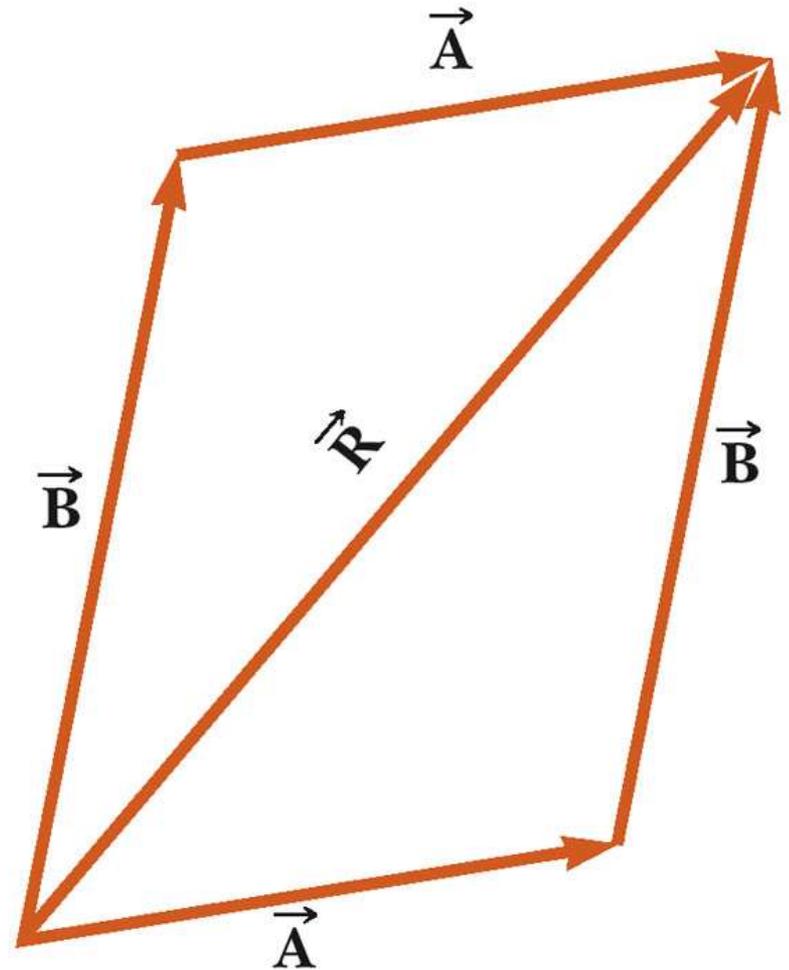
- Para sumar varios vectores, solamente repita el proceso hasta que el último esté incluido
- De manera semejante la resultante se obtiene como el vector que va de la “cola del primero a la punta del último”



# Reglas de la suma de vectores

- La suma de vectores **conmuta**.
  - Ley conmutativa de la adición

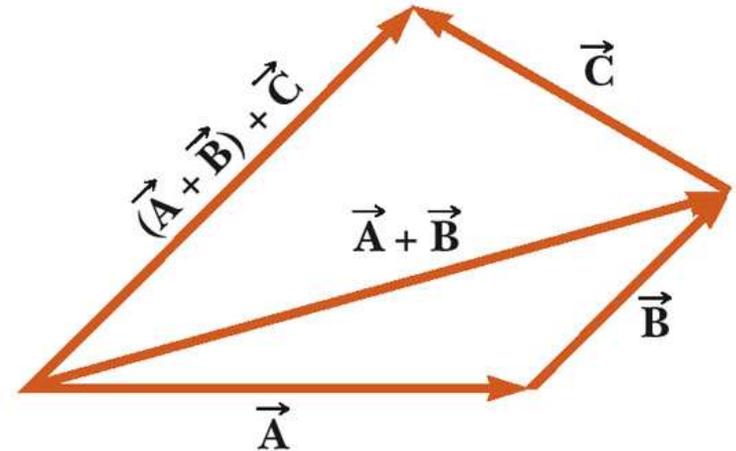
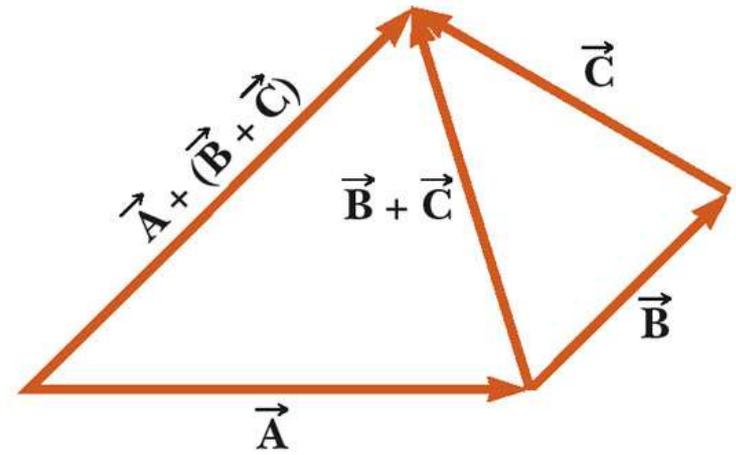
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



# Reglas de suma de vectores cont...

- El resultado de sumar vectores es independiente de la forma en la que se agrupan los vectores. Esta es la propiedad ***Asociativa de la adición***

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

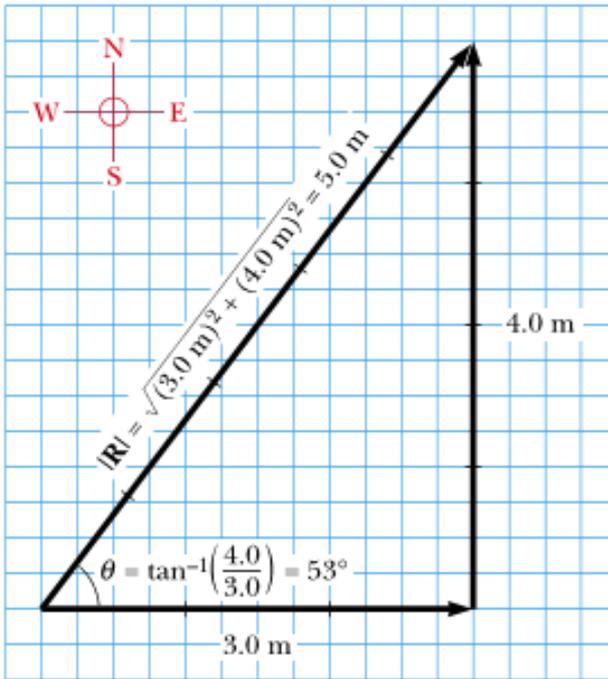




# Reglas para sumar vectores

---

- Cuando se suman vectores, todos deben tener las mismas unidades físicas
- Todos los vectores debe representar el mismo tipo de cantidades
  - No intente sumar desplazamientos con velocidades.





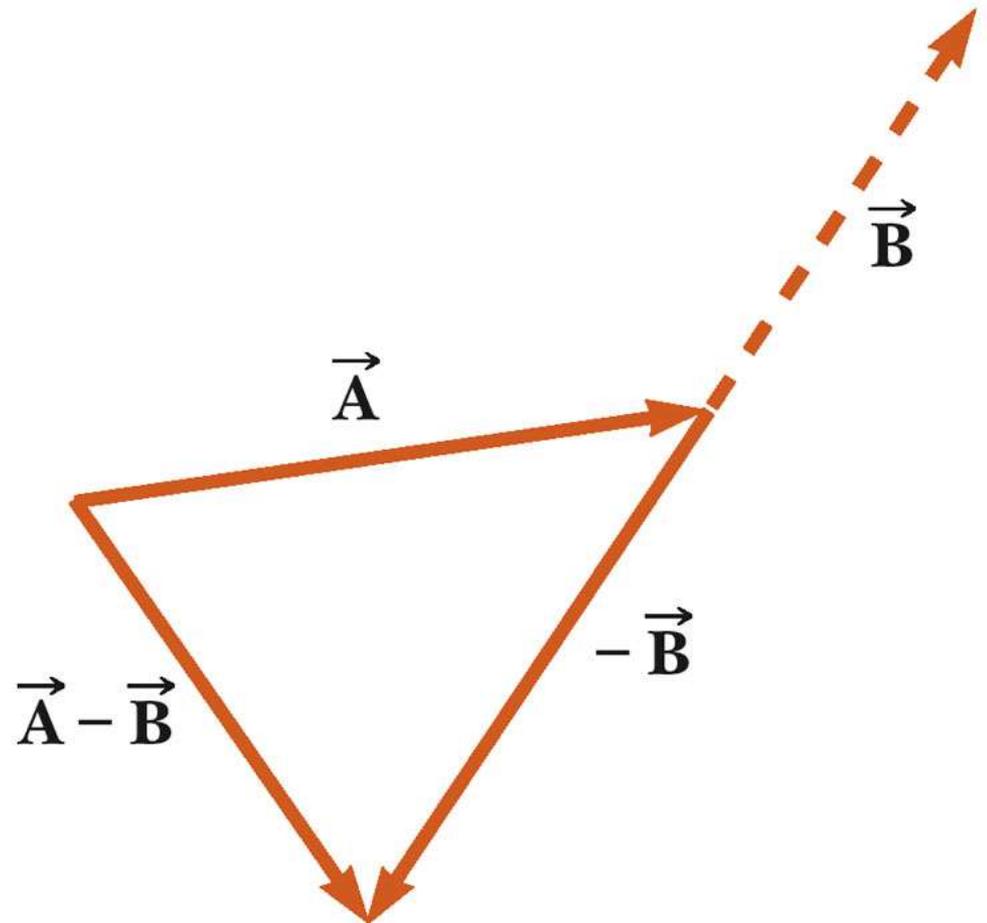
# Negativo de un Vector

---

- El negativo de un vector se define como el vector tal que cuando se suma al vector original, produce una resultante de cero
  - Se representa así,  $-\vec{\mathbf{A}}$
  - $\vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{A}}) = 0$
- El negativo de un vector tiene la misma magnitud que el vector original, pero apunta en dirección opuesta.

# Restando Vectores

- Es un caso especial de la suma de vectores
- $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
- Proceda como se hace con la suma de vectores





# Multiplicando o Dividiendo un Vector por un escalar

---

- El resultado de la multiplicación o división es un vector
- La magnitud del vector es multiplicada o dividida por un escalar
- Si el escalar es positivo, la dirección de la resultante es la misma que la del vector original
- Si el escalar es negativo, la dirección de la resultante es opuesta a la del vector original



# Multiplicando Vectores

---

- Dos vectores pueden ser multiplicados en dos diferentes maneras

- Una es el **producto escalar**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

- También llamado producto punto

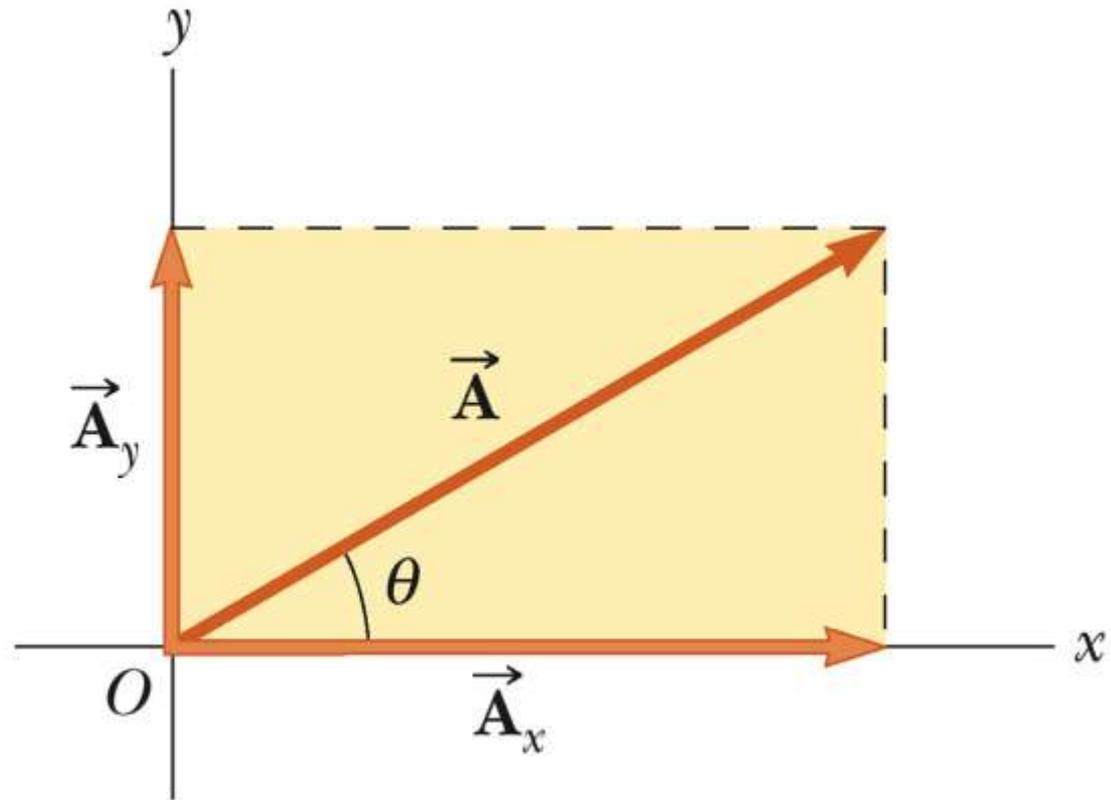
- El otro es el **producto vectorial**

- También llamado producto cruz

*magnitud de*  $\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \theta$

# Componentes de un Vector

- Una **componente** es una parte
- Es muy útil recurrir a l **componentes rectangulares**
  - Estas son las proyecciones de un vector a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$





# Terminología de las componentes de un vector

---

- $\vec{A}_x$  y  $\vec{A}_y$  son las **componentes vectoriales** en el eje  $x$  y  $y$  de un vector  $\vec{A}$
- Son vectores y cumplen con sus reglas y propiedades
- $A_x$  y  $A_y$  son escalares y serán llamadas las **componentes** de  $\mathbf{A}$
- La combinación de las componentes vectoriales es una sustitución válida para un vector real

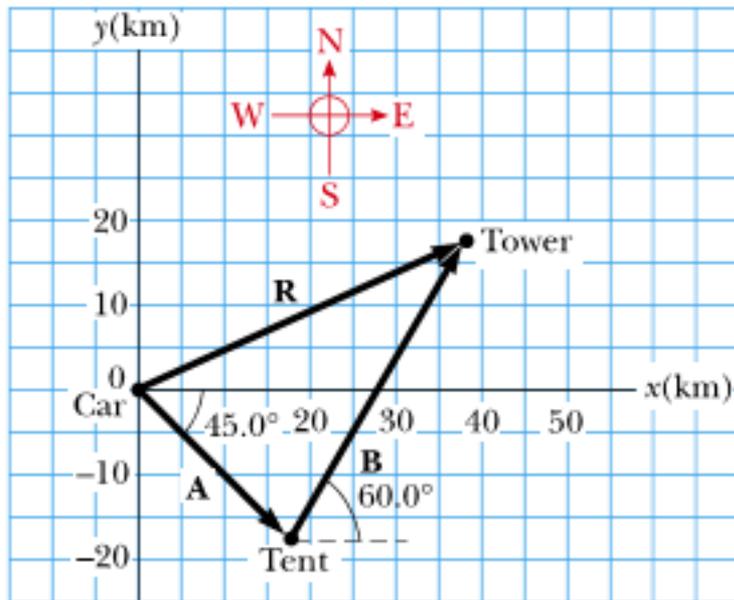


# Componentes de un Vector, 2

---

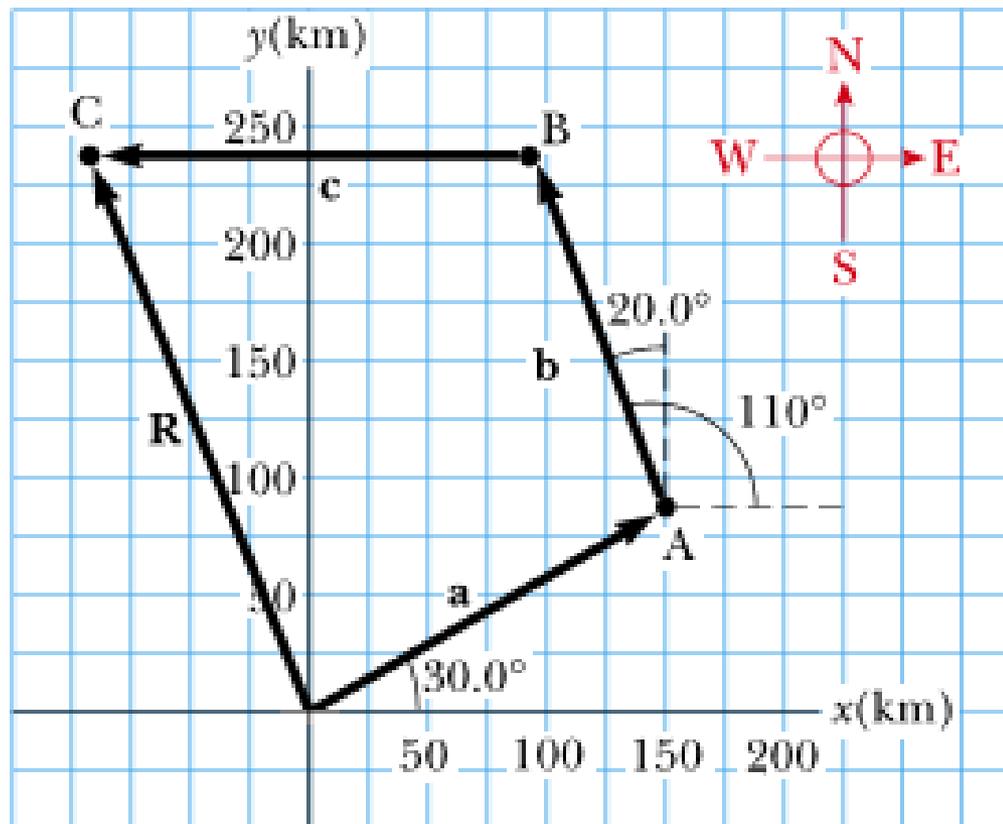
- La componente x es la proyección del vector en el eje x  $A_x = A \cos \theta$
- La componente y es la proyección del vector a lo largo del eje y  $A_y = A \sin \theta$
- Cuando se usa esta forma de las ecuaciones, el ángulo  $\theta$  debe medirse contra el avance de las manecillas del reloj desde el eje positivo de las x

A hiker begins a trip by first walking 25.0 km southeast from her car. She stops and sets up her tent for the night. On the second day, she walks 40.0 km in a direction  $60.0^\circ$  north of east, at which point she discovers a forest ranger's tower.



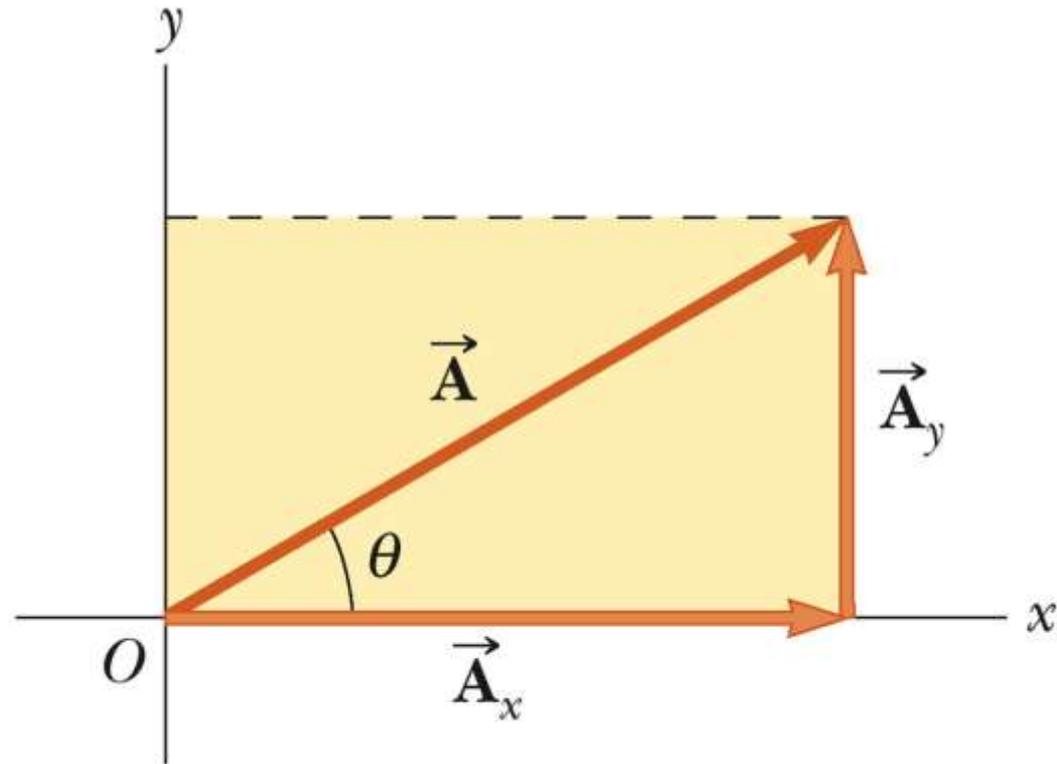
**Figure 3.19** (Example 3.5) The total displacement of the hiker is the vector  $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

A commuter airplane takes the route shown in Figure 3.20. First, it flies from the origin of the coordinate system shown to city A, located 175 km in a direction  $30.0^\circ$  north of east. Next, it flies 153 km  $20.0^\circ$  west of north to city B. Finally, it flies 195 km due west to city C. Find the location of city C relative to the origin.



# Componentes de un vector, 3

- La componente vectorial  $y$  se coloca en la punta de la componente  $x$
- Esto se debe al hecho de que un vector puede ser desplazado paralelamente sin que sea alterado su norma o su dirección. Esta operación completa el triángulo.





# Componentes de un Vector, 4

---

- Las componentes son los catetos del triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es  $\vec{A}$
- También se puede calcular el valor del ángulo  $\theta$ , con respecto al eje positivo de x; al hacerlo hay que utilizar los signos de  $A_x$  y  $A_y$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x}$$



# Componentes de una Vector, final

- Las componentes pueden ser positivas o negativa y tendrán las mismas unidades que el vector original
- El signo de las componentes dependerá del valor del ángulo  $\theta$

	$y$	
$A_x$ negative		$A_x$ positive
$A_y$ positive		$A_y$ positive
<hr/>		$x$
$A_x$ negative		$A_x$ positive
$A_y$ negative		$A_y$ negative



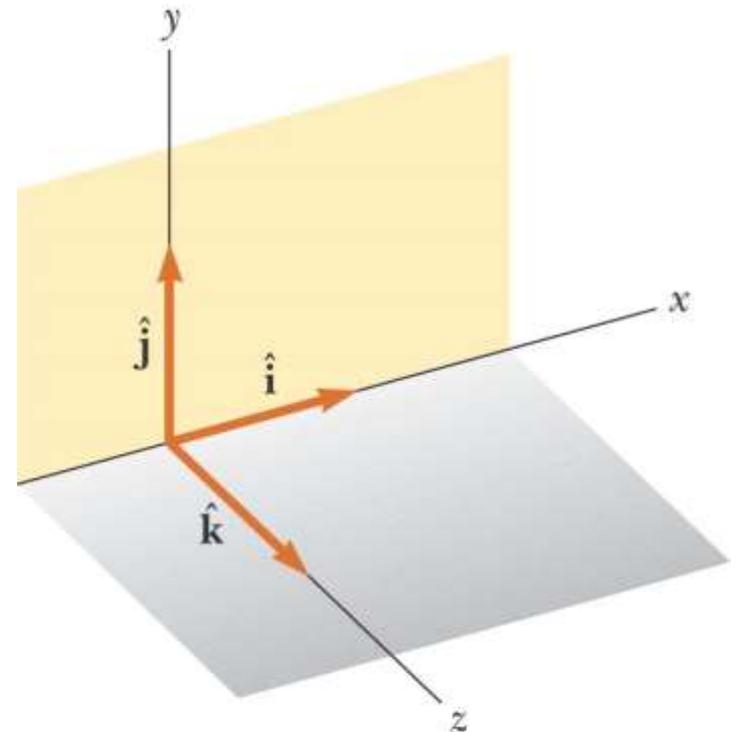
# Vectores unitarios

---

- Un ***vector unitario*** es un vector adimensional que tiene una norma (magnitud que es exactamente uno)
- Los vectores unitarios se utilizan para especificar una dirección y carecen de otro significado físico

# Vectores Unitarios, cont.

- Los símbolos  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , y  $\hat{k}$  representan vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$
- Forman un conjunto de vectores simultáneamente perpendiculares

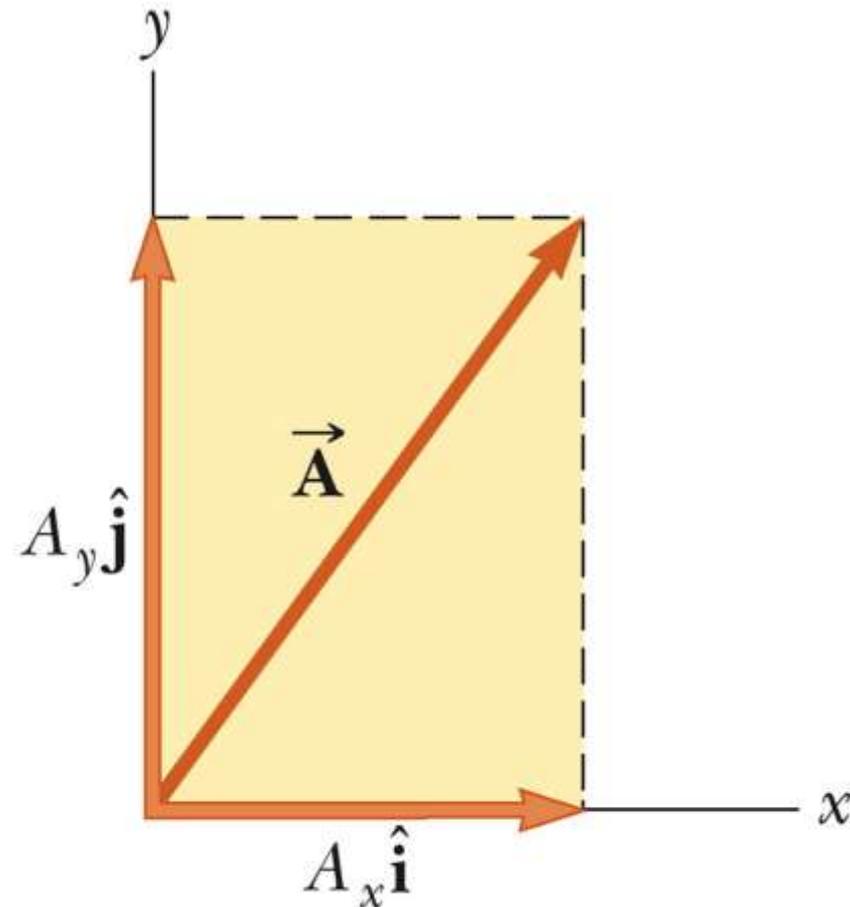


(a)

## Uso de los Vectores unitarios

- $\vec{A}_x$  significa lo mismo que  $A_x \hat{i}$
- Igual para  $A_y \hat{j}$ . De forma que un vector  $\mathbf{A}$  puede ser expresado como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$



# La suma a través de vectores unitarios

- Usando  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

- Entonces

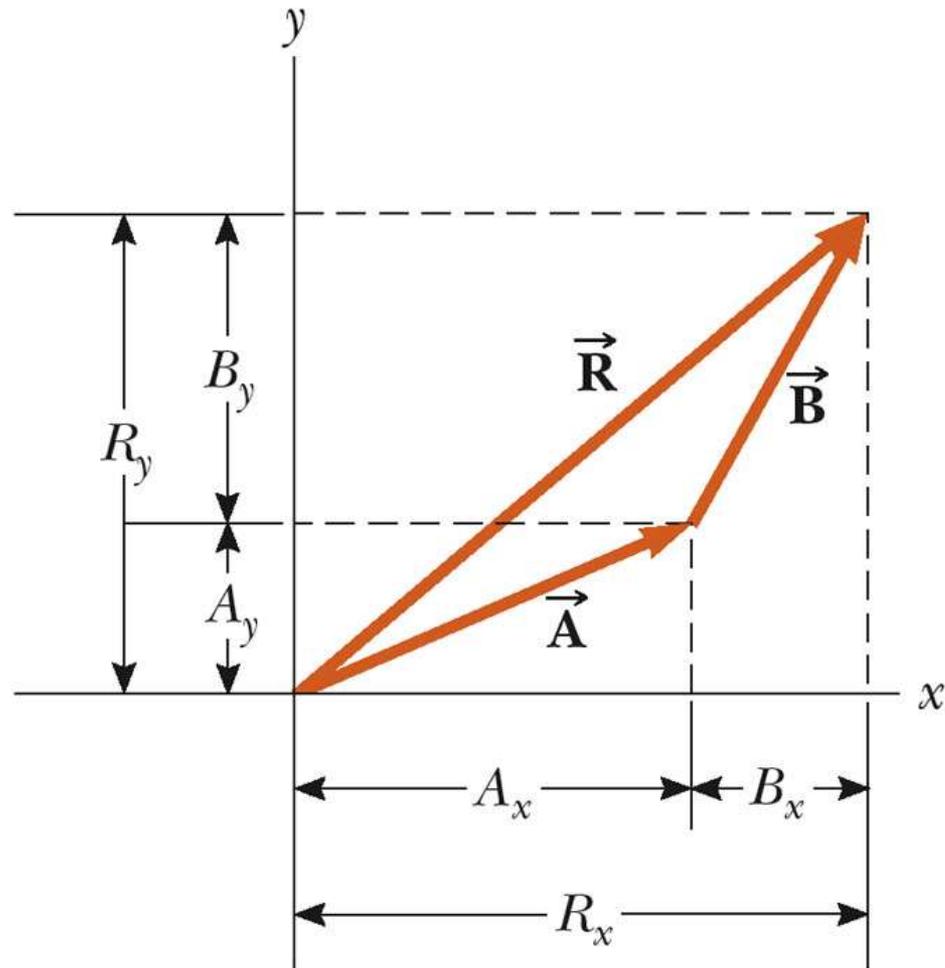
$$\vec{R} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}$$

- Así  $R_x = A_x + B_x$  y  $R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

# Diagrama





# Ahora en tres dimensiones

---

- usando  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{R} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

$$\vec{R} = R_x + R_y + R_z$$

- $R_x = A_x + B_x$ ,  $R_y = A_y + B_y$ ,  $R_z = A_z + B_z$

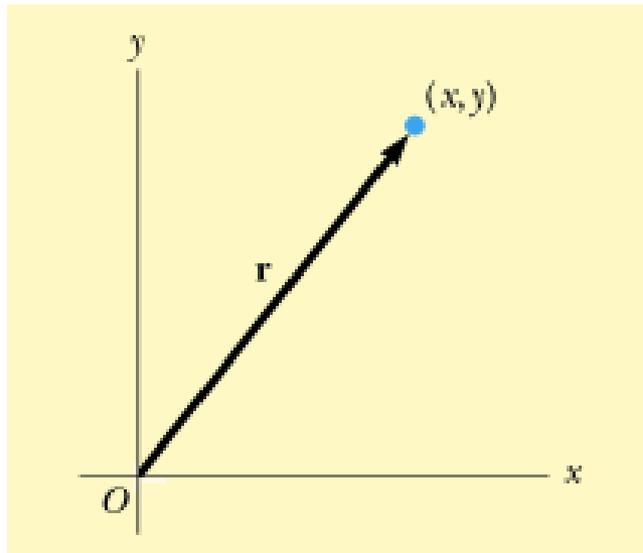
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \theta_x = \tan^{-1} \frac{R_x}{R} \text{ etc.}$$



# Recomendaciones

---

- Las ecuaciones para las componentes ( $A_x = A \cos \theta$  y  $A_y = A \sin \theta$ ) aplican solamente cuando el ángulo  $\theta$  se mide con respecto al eje x (+), preferiblemente tomando la dirección contra las manecillas del reloj como positiva
- El ángulo resultante ( $\tan \theta = A_y / A_x$ ) da el ángulo con respecto al eje x (+)



**Figure 3.17** The point whose Cartesian coordinates are  $(x, y)$  can be represented by the position vector  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ .



# Otras notas:

---

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\mathbf{A} = a A$$

Donde  $\mathbf{a}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

y la norma de  $\mathbf{A}$  es



# Sobre el producto escalar

---

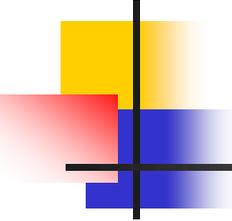
- **$A \cdot B = B \cdot A$**  El producto escalar conmuta. Geométricamente se puede entender como multiplicar la componente de **A** en la dirección de **B** por la norma de B. También es la componente de **B** en la dirección de **A** por la norma de **A**.
- El resultado es un escalar.
- También cumple con  **$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$** . Esto es se cumple la propiedad de **asociación**.
- También  **$i \cdot i = 1$   $j \cdot j = 1$   $k \cdot k = 1$**
- Y  **$i \cdot j = 0$   $i \cdot k = 0$   $j \cdot k = 0$**



# Sobre el producto vectorial

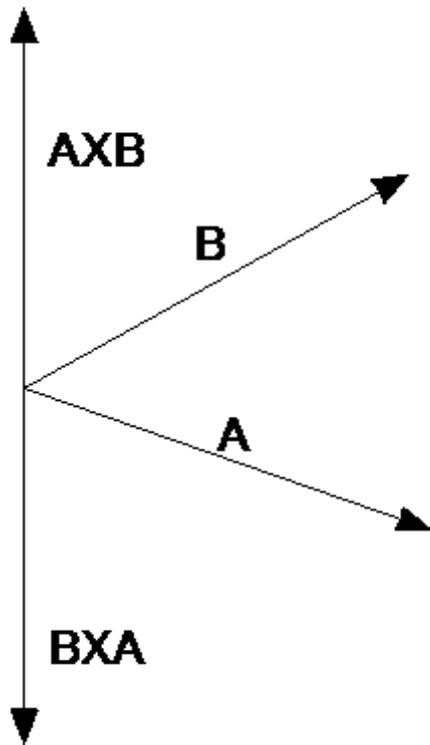
---

- **$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$**  Se obtiene un vector cuya magnitud (norma) es  $AB \sin \theta$ . Donde  $\theta$  es el ángulo (menor) entre los vectores **A** y **B**. La dirección de este vector resultante es tal que es perpendicular al plano que hacen **A** y **B**; esto es, **C** es simultáneamente perpendicular a **A** y **B**. La dirección de **C** la da la regla del tornillo derecho.
- El producto  **$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$**  tiene la dirección en la que un tornillo avanza si se gira desde A hasta B en la dirección del mínimo ángulo que los une
- El producto  **$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$**  no conmuta, sino que anticonmuta. Esto es  **$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$**



# Dirección de producto cruz

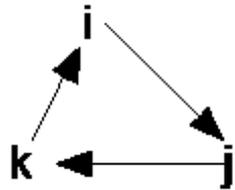
---



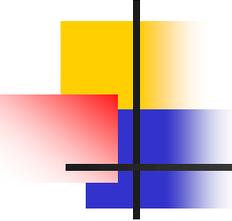
Regla del tornillo derecho

# Prod. vectorial

- También se asocia  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$
- También  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$   $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$   $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$   $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$   $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$   $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$



# El gradiente

---

- Sea una cantidad escalar que es una función continua y diferenciable de las coordenadas y que en cierto punto del espacio tiene un valor  $f$ . Si deseamos conocer ahora como cambia  $f$  a lo largo de un  $dl$  a partir de ese punto.

$$\bar{A} = \frac{dy}{dx} i + \frac{dy}{dx} j \quad d\bar{l} = dx i + dy j$$

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = A \bullet dl$$

Se tiene ahora que  $\mathbf{A}$ , cuyas componentes son la razón de cambio de  $f$  con la distancia a lo largo de cada una de las coordenadas, es el gradiente de una cantidad escalar llamada  $f$ .

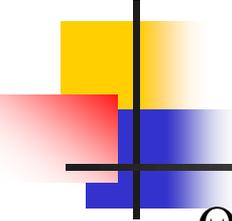
$$\mathbf{A} = \nabla f$$

Donde  $\nabla$  es el operador nabla

$$\nabla = \frac{d}{dx} \mathbf{i} + \frac{d}{dy} \mathbf{j} + \frac{d}{dz} \mathbf{k}$$

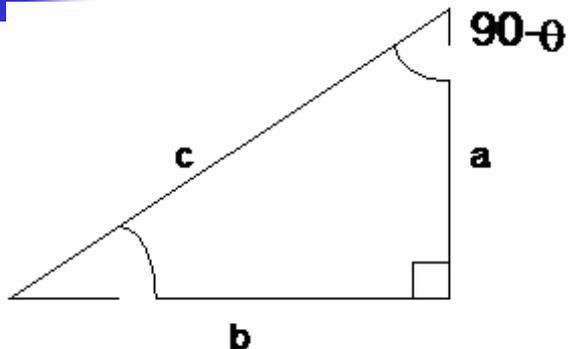
$$\nabla f = \frac{df}{dx} \mathbf{i} + \frac{df}{dy} \mathbf{j} + \frac{df}{dz} \mathbf{k}$$

$$|\nabla f| = \left[ \left( \frac{df}{dx} \right)^2 + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \left( \frac{df}{dz} \right)^2 \right]^{1/2}$$


$$df = \Delta f \cdot d\vec{l} = |\Delta f| |d\vec{l}| \cos \Theta$$

$\Theta$  es el ángulo entre los vectores  $\Delta f$  y  $d\vec{l}$ . Qué dirección debe elegir uno para  $d\vec{l}$  de forma que  $df$  sea máxima?. Cuando  $\theta=0$  o sea en la misma dirección que  $\Delta f$ . Se ve, pues, que el gradiente de  $f$  es un vector cuya magnitud y dirección son las de máxima variación espacial de  $f$ .

# Algunas relaciones utiles.

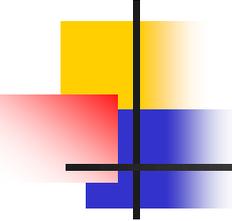


$$\begin{aligned}\text{sen}\theta &= a/c & \text{cos}\theta &= b/c \\ \text{tan}\theta &= a/b = \text{sen}\theta/\text{cos}\theta\end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{sen}^2\theta + \text{con}^2\theta = 1$$

$$\text{csc}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}; \quad \text{sec}\theta = \frac{1}{\text{cos}\theta}; \quad \text{cot}\theta = \frac{1}{\text{tan}\theta}$$



# También es útil saber que:

---

$$\text{sen} \theta = \frac{a}{c} = \cos(90 - \theta)$$

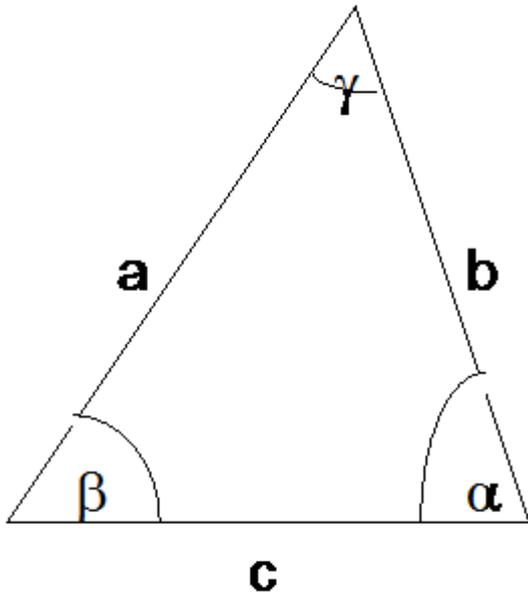
$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \text{sen}(90 - \theta)$$

$$\cot \theta = \frac{b}{a} = \tan(90 - \theta)$$

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen} \theta$$

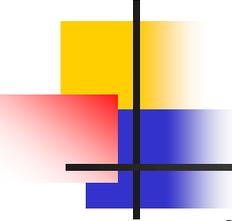
$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$



$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{array} \right\} \text{ ley de cosenos}$$

$$\frac{a}{\text{sen} \alpha} = \frac{b}{\text{sen} \beta} = \frac{c}{\text{sen} \gamma} \text{ es la ley de senos}$$



## ...de cálculo:

---

$$\frac{d(\text{sen} ax)}{dx} = a \cos ax$$

$$\frac{d(\cos ax)}{dx} = -a \text{sen} ax$$

$$\frac{d \tan ax}{dx} = a \sec^2 ax$$

$$\frac{d \cot ax}{dx} = -a \csc^2 ax$$

$$\int \text{sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \text{sen} ax$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\text{sen} ax)$$