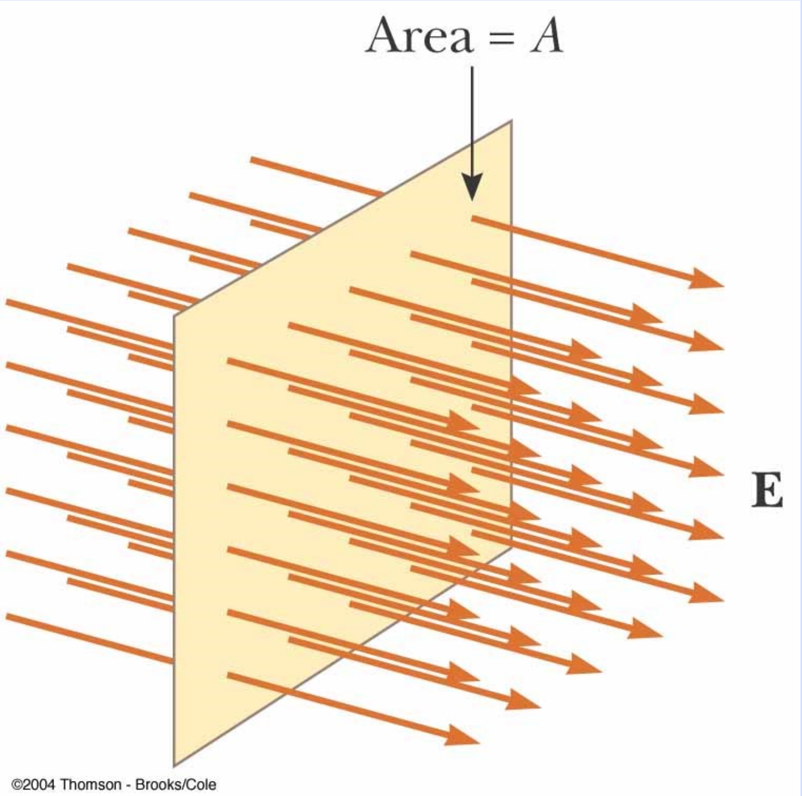
Presentación basada en el material contenido en: Serway, R. Physics for Scientists and Engineers. Saunders College Pub. 3rd edition.

Física II. La ley de Gauss

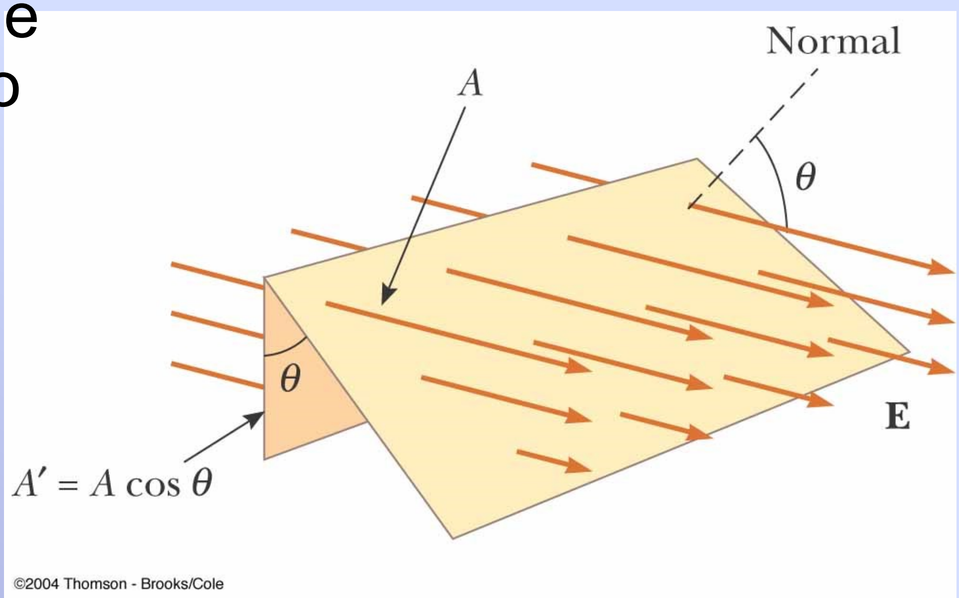
Flujo del vector campo eléctrico

- ***El flujo eléctrico*** *(más correctamente, flujo del vector campo eléctrico)* es el producto de la magnitud del campo eléctrico y el área superficial, A, que es perpendicular al campo
- $\Phi_E = EA_{perp}$

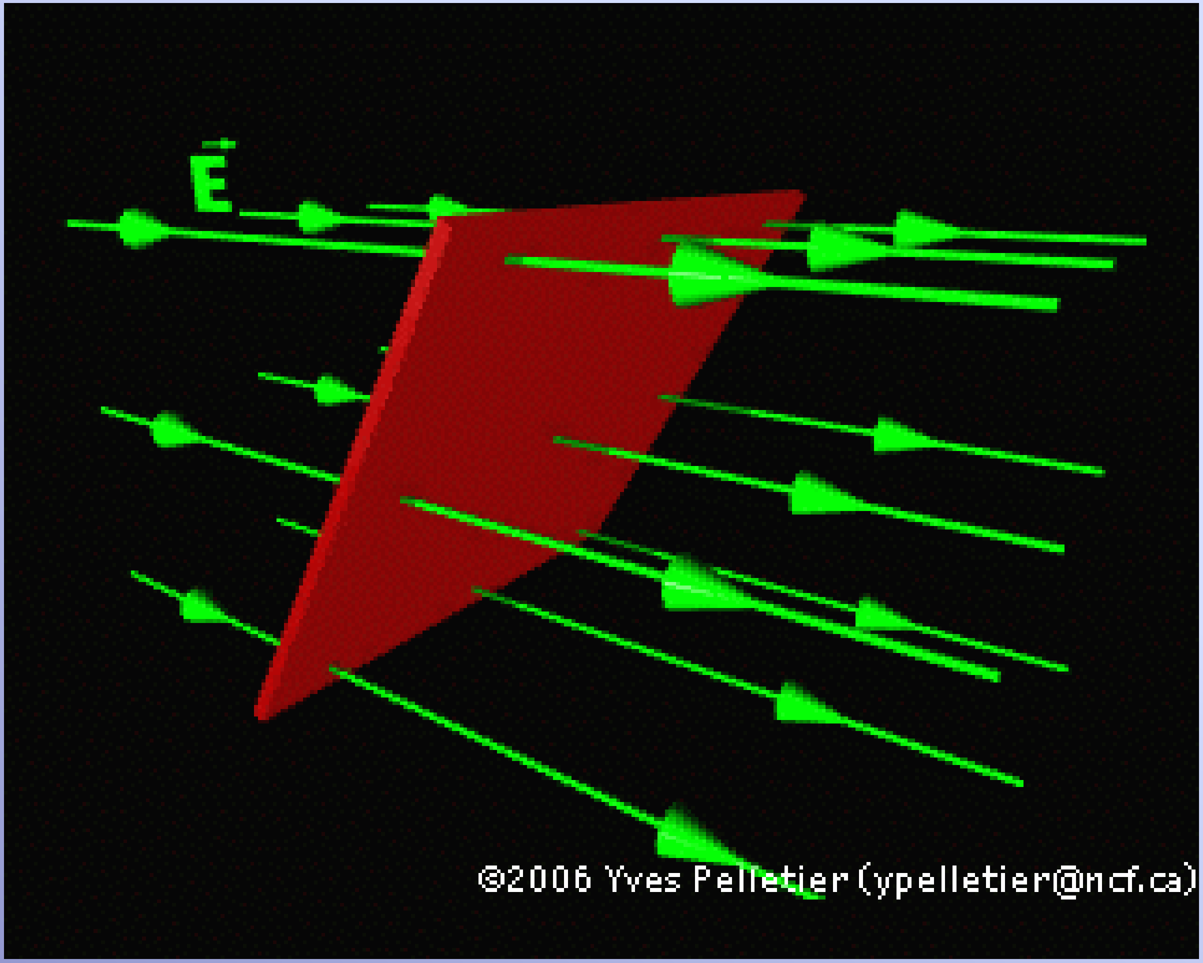


Flujo eléctrico, Área general

- El flujo eléctrico (flujo del vector campo eléctrico) es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran alguna superficie
- Las líneas de campo pueden hacer algún ángulo θ con la perpendicular a la superficie
- Entonces $\Phi_E = EA \cos \theta$



Flujo del vector campo eléctrico:



El flujo eléctrico, interpretando la ecuación del flujo

- El flujo es máximo cuando la superficie es perpendicular al campo
- El flujo es cero cuando la superficie y el campo son paralelos
- Si en campo cambia en la superficie, la ecuación, $\Phi = EA \cos \theta$, aplica sólo para pequeños elementos de área

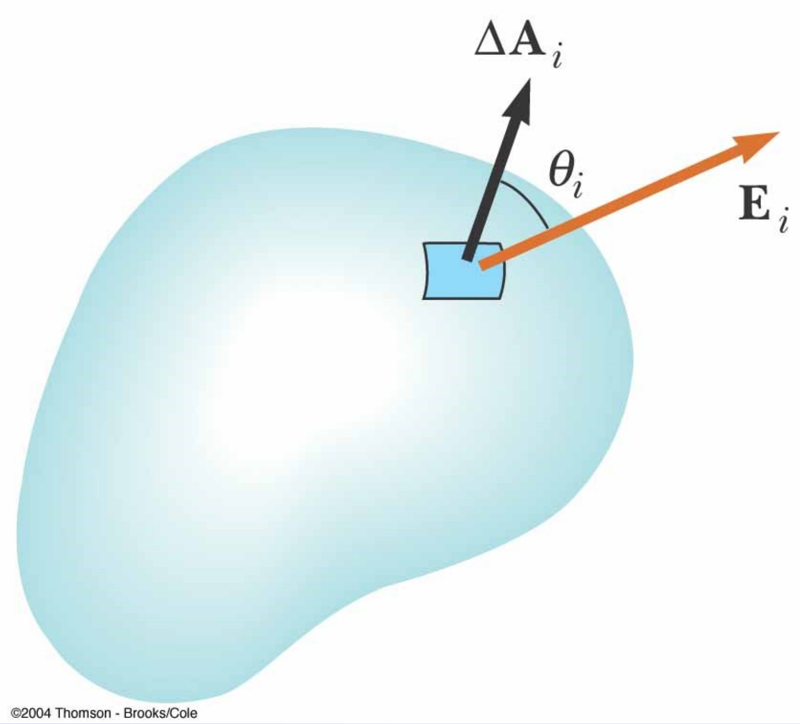
Flujo eléctrico, ecuación general

- En el caso más general, observe el pequeño elemento de área

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$$

- En general, el problema ahora se plantea:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i = \int_{\text{superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



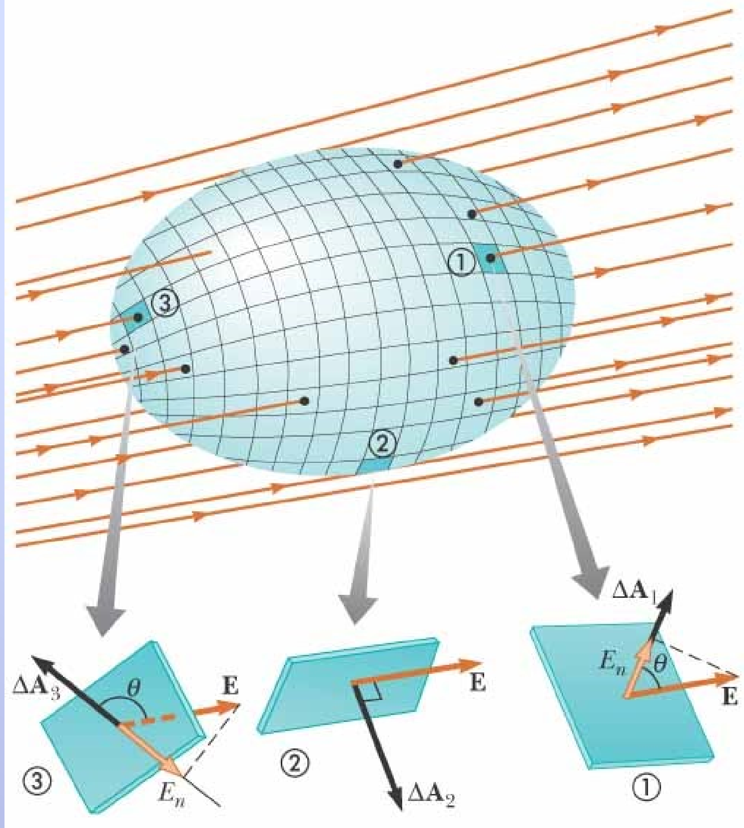
Note usted el carácter de vector que tiene **A**

Flujo Eléctrico, notas finales

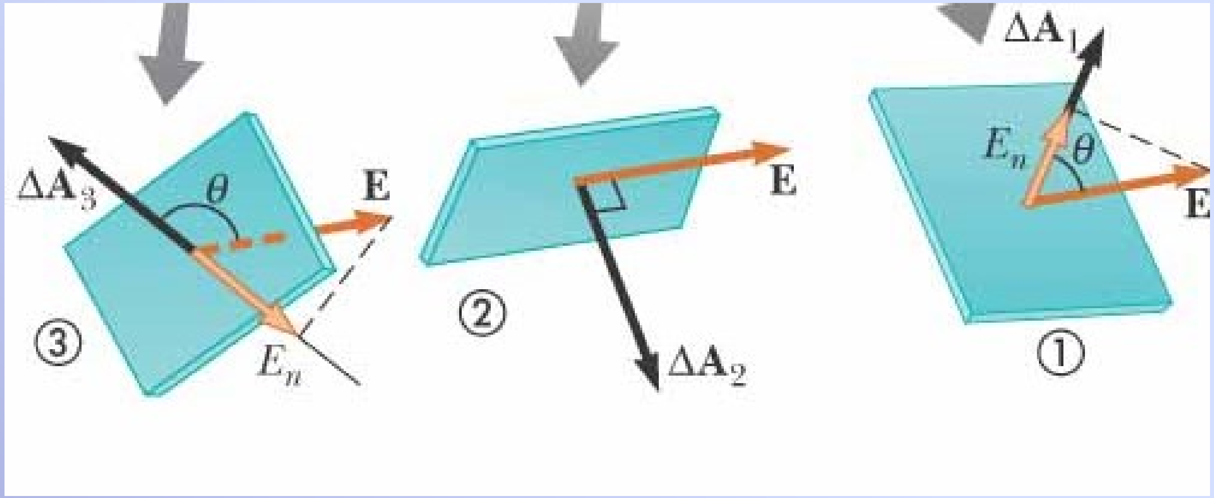
- La integral de superficie significa que tal integral ha de ser evaluada sobre toda la superficie en cuestión.
- En general, el valor del flujo dependerá tanto del patrón de líneas de campo como de la superficie misma.
- Las unidades del flujo eléctrico serán $N{\cdot}m^2/C$

Flujo eléctrico en superficies cerradas

- Suponga una superficie cerrada
- Los vectores $\Delta \boldsymbol{A}_i$ apuntan en diferentes direcciones
  - En cada punto, estos elementos $\Delta\mathbf{A}$ son perpendiculares a la superficie
  - Por convención tales vectores apuntarán hacia afuera.



Flujo a través de sup. Cerradas, cont…



- En (1), las líneas de campo están cruzando la superficie de adentro hacia afuera; θ < 90º, Φ es positivo
- En (2), las líneas de campo pasan "rozando" la superficie; θ = 90º, Φ = 0
- En (3), las líneas de campo están cruzando la superficie de afuera hacia adentro;180º > θ > 90º, Φ es negativo

Flujo en superficies cerradas

- El flujo neto a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas de campo que emergen de la superficie.
  - Este número neto debe entenderse como el número de aquéllas que emergen de la superficie , menos el número de ellas que entra hacia ella.
- Si E_n es la componente de **E** que es perpendicular a la superficie, entonces

$$\Phi_E = \oint \qquad\qquad \oint$$

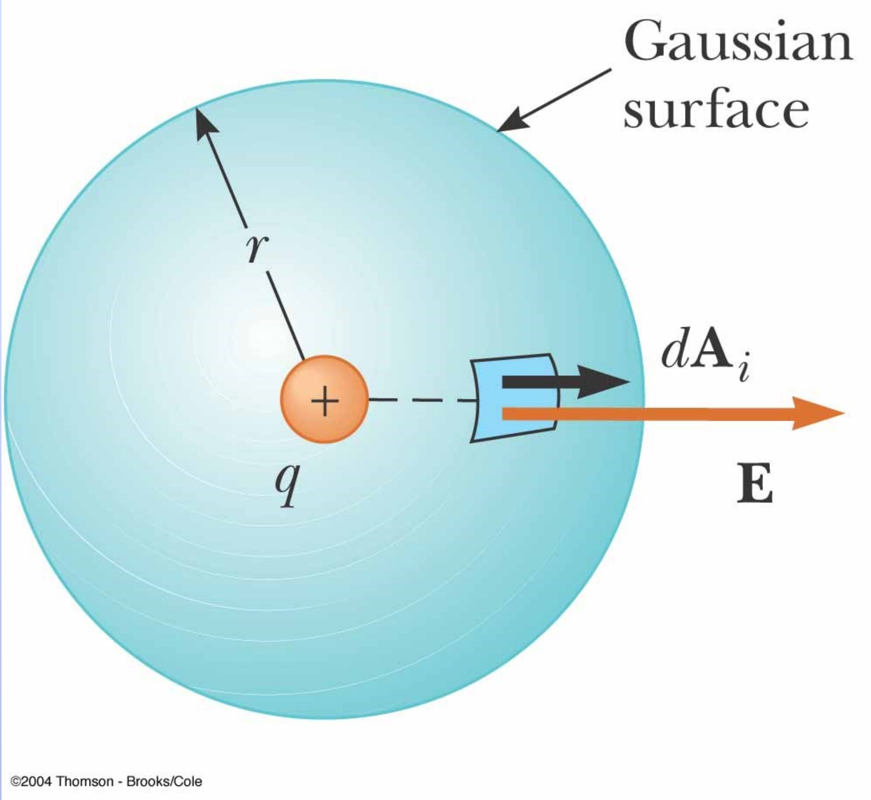
La ley de Gauss

- La ley de Gauss es una expresión de la relación general que existe entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada y la carga eléctrica encerrada dentro de la superficie
  - A la superficie cerrada se le llama frecuentemente superficie gaussiana.
- La ley de Gauss es de importancia fundamental en el estudio del campo eléctrico

Ley de Gauss's

- Una carga positiva, *q*, se coloca en el centro de una esfera de radio *r*
- La magnitud del campo eléctrico en cualquiera lugar sobre la superficie de la esfera es:

  $E = k_e q / r^2$



- Las líneas de campo se dirigen radialmente a partir del centro y todas son perpendiculares a la superficie en todos los puntos

$$\Phi_E = \bigcirc \qquad \bigcirc$$

- Este será el flujo neto a través de la superficie gaussiana de un esfera de radio r

- Sabemos que $E = k_e q/r^2$, y que $A_{esfera} = 4\pi r^2$,

$$\Phi_E = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

notas

- El flujo neto a través de cualquiera superficie cerrada que rodea a una carga puntual, q, esta dado por q/ε_o y este valor es independiente de la forma de la superficie
- El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no encierra carga eléctrica neta es cero
- Dado que el campo eléctrico debido a un conjunto de cargas es una suma vectorial de los campos eléctricos que cada una de ellas produce, el flujo a través de una superficie cerrada de este conjunto de cargas, puede expresarse como:

- La ley de Gauss establece que:

$$\Phi_E = \bigcirc$$

- *Donde* q_{in} es la carga neta encerrada por la gaussiana
- **E** representa el campo eléctrico en cualquiera punto sobre la superficie
  - **E** es el campo eléctrico total y éste puede tener contribuciones tanto de cargas dentro de la gaussiana como de aquéllas fuera de la gaussiana.
- Aun cuando la Ley de Gauss puede, en teoría, ser resuelta para proporcionar en valor de **E** para cualesquiera configuraciones de cargas, en la práctica sólo se limita a situaciones que son bastante simétricas

Al aplicar la ley de Gauss recuerde que:

- Para usar la ley de Gauss usted debe elegir una superficie sobre la cual la integral de superficie pueda ser simplificada y el campo eléctrico pueda ser calculado de manera más simple.
- Tome las ventajas de la simetría
- Recuerde que la superficie gaussa es una superficie que usted escogió (matemáticamente definida) y <u>puede no coincidir</u> con la superficie real del problema.

Condiciones para elegir una gaussiana

- Trate de elegir una superficie que cumpla con una o más de las siguientes condiciones:
  - Que el valor del campo eléctrico pueda ser asumido constante (a partir de condiciones de simetría) en cada uno de los puntos de la superficie
  - El producto escalar **E**·*d***A** pueda ser expresado como un simple producto algebraico *EdA* ya que **E** y *d***A** son paralelos
  - El producto escalar es 0 cuando **E** y *d***A** son perpendiculares
  - El campo eléctrico pueda ser cero sobre toda la superficie

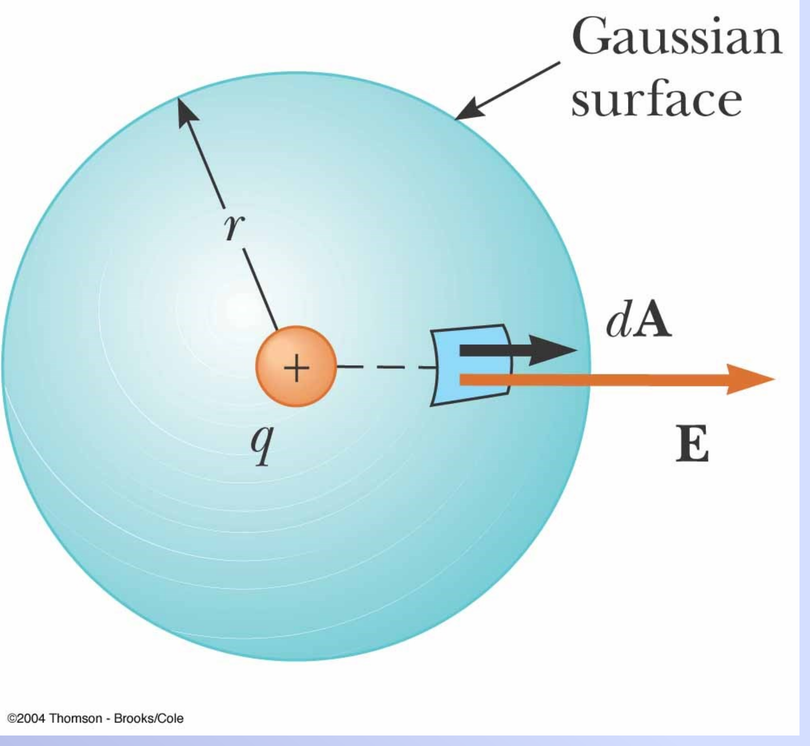
El campo de una carga puntual

- Elija una esfera a ser su gaussiana
  - **E** es paralelo a *d***A** en cda punto sobre la superficie

$$\Phi_E = \oint \qquad \oint$$

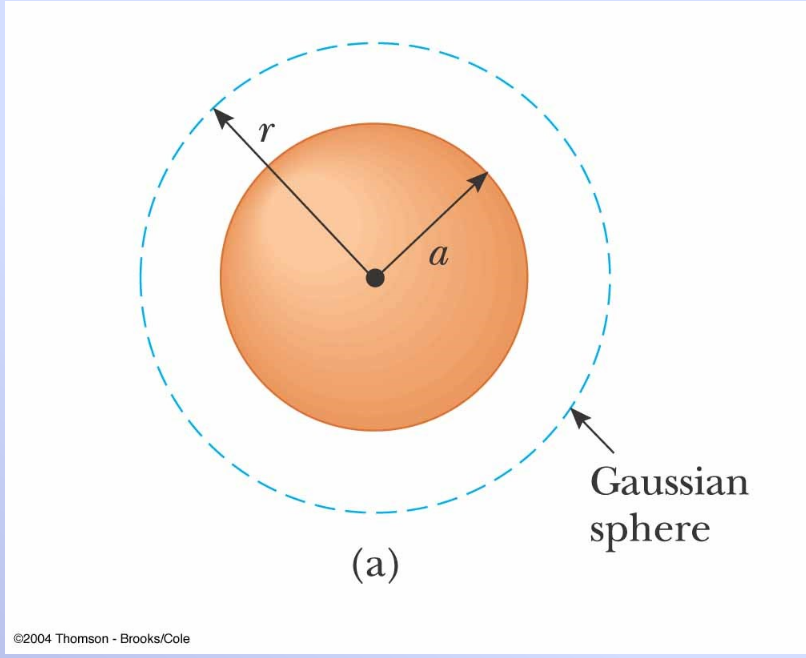
$$= E\oint \qquad)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$



Campo eléctrico debido a una distribución de carga esféricamente simétrica

- Selecciones una esfera como su gaussiana
- Para $r > a$

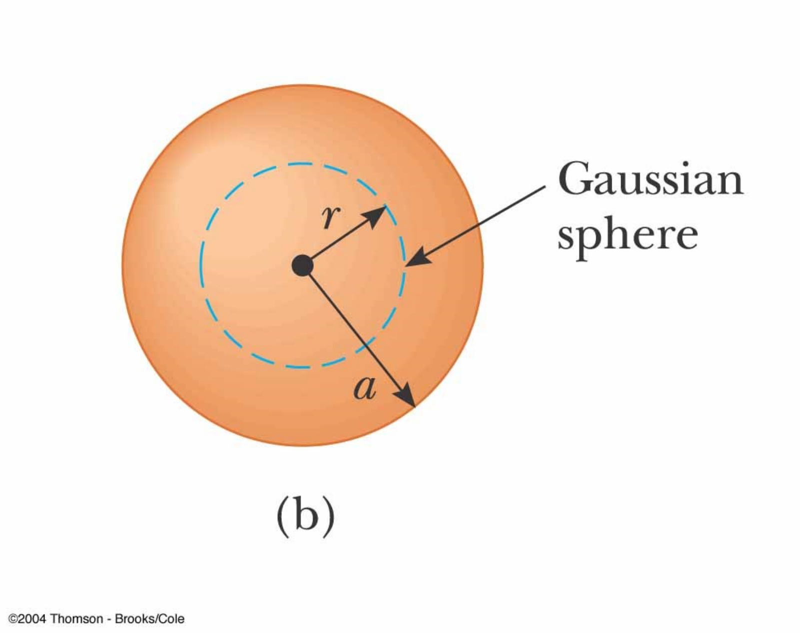


$$\Phi_E = \bigcirc \qquad \bigcirc$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

cont…

- Elija una esfera como su superficie gaussiana, tal que $r < a$
- $q_{\text{in}} < Q$
- $q_{\text{in}} = r\,(4/3\pi r^3)$

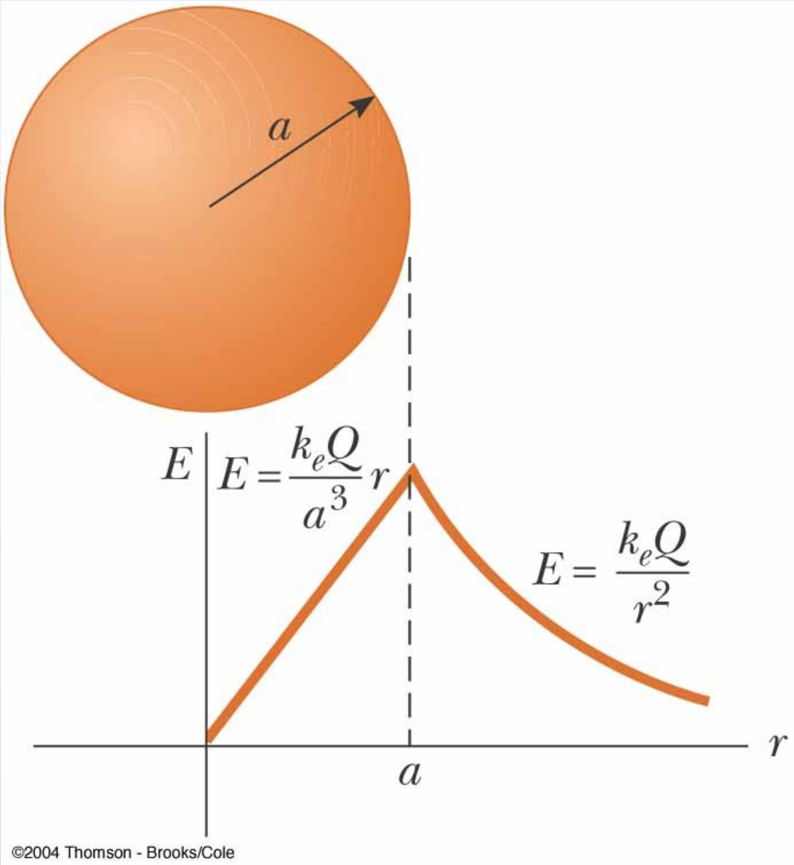


$$\Phi_E =$$

$$E = \frac{q_{\text{in}}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

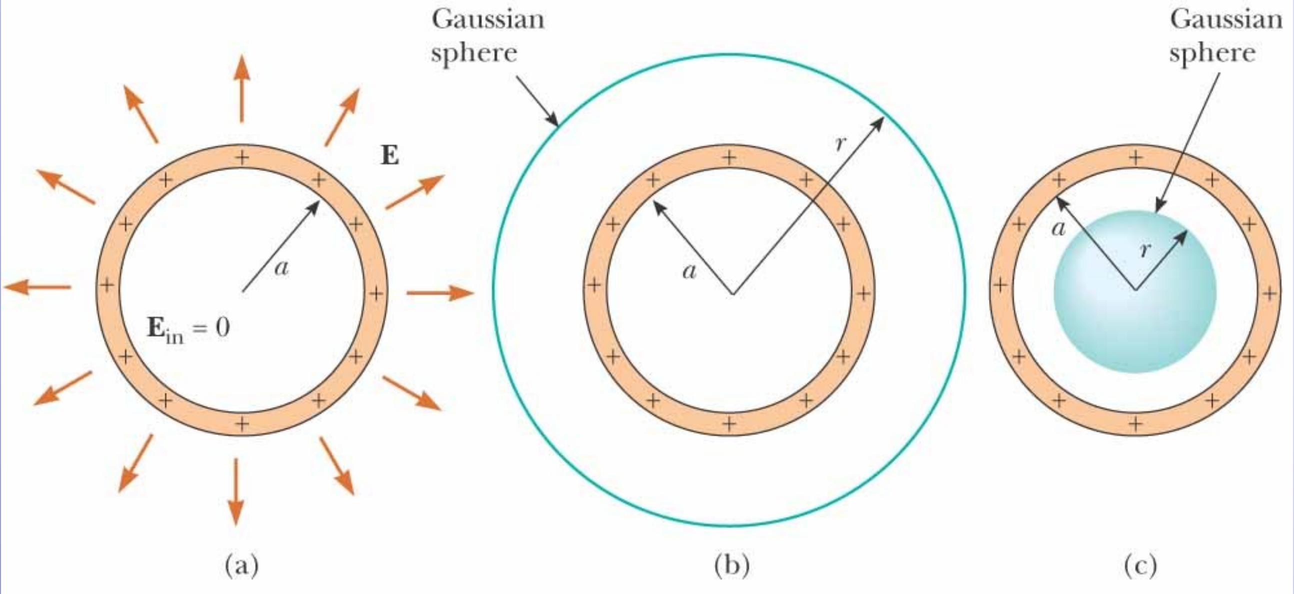
final

- Dentro de la esfera que tiene una distribución uniforme de carga ρ, *E* cambia linealmente con *r*
  - *E* → 0 cuando *r* → 0
- El campo fuera de la esfera es el equivalente al de una carga puntual que se colocara al centro de la esfera



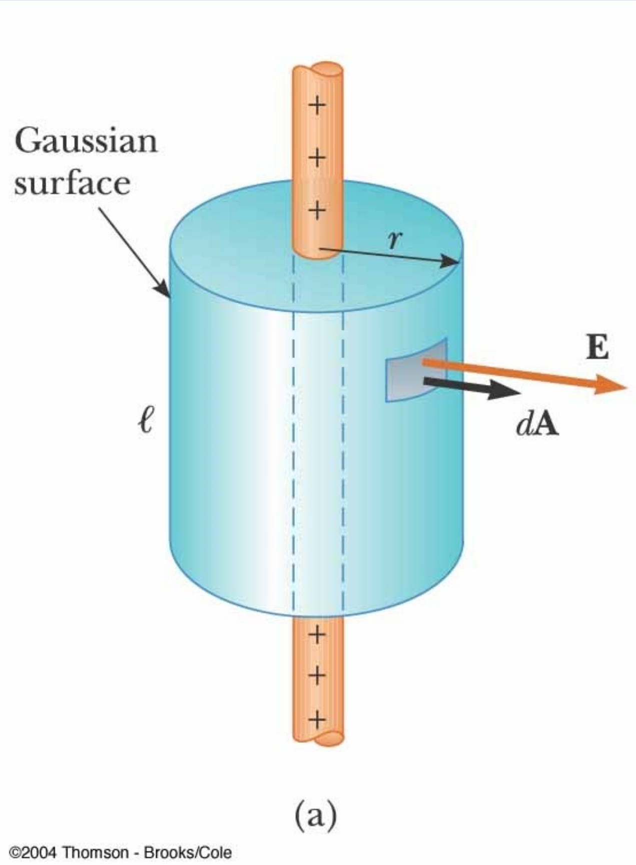
Campo eléctrico debido a una coraza (cáscara) esférica

- Use esferas como superficies gaussianas
- Cuando *r* > *a*, la carga encerrada por la gaussiana es Q
  $E = k_e Q / r^2$
- Cuando *r* < *a*, la carga dentro de la superficie gaussiana es 0 and *E* = 0



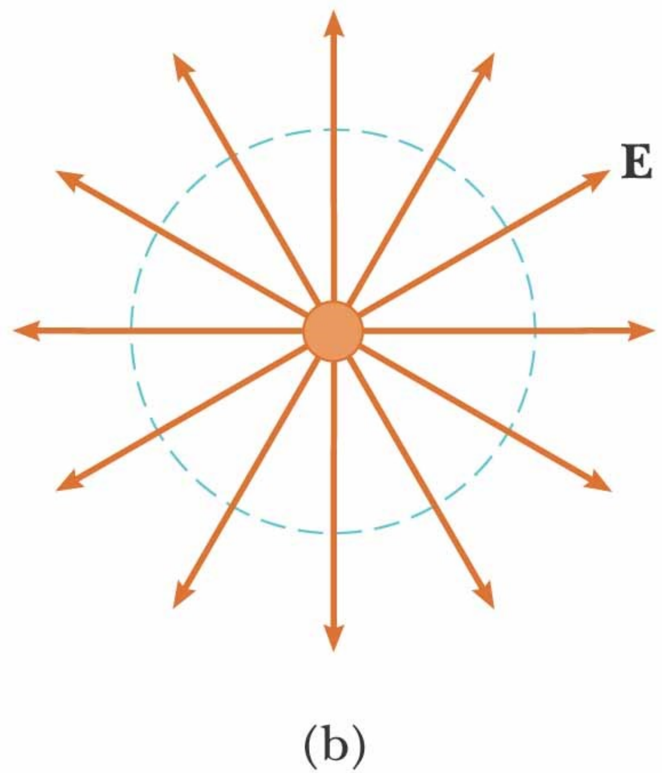
El campo a cierta distancia de una línea de carga

- Piense en una en una distribución de carga cilíndrica
  - El cilindro tiene un radio r u una longitud ℓ
- **E** es constante en magnitud y perpendicular a la superficie en todos los puntos sobre la parte curvad de la superficie



cont…

- Vista desde sus extremos, el campo es perpendicular a la superficie curvada
- El flujo del campo eléctrico, **E**·d**A**, a través de las tapas del cilindro es cero, ya que el campo es paralelo a estas superficies



final

- Use la ley de Gauss para encontrar el campo

$$\Phi_E = \oint \qquad \oint$$

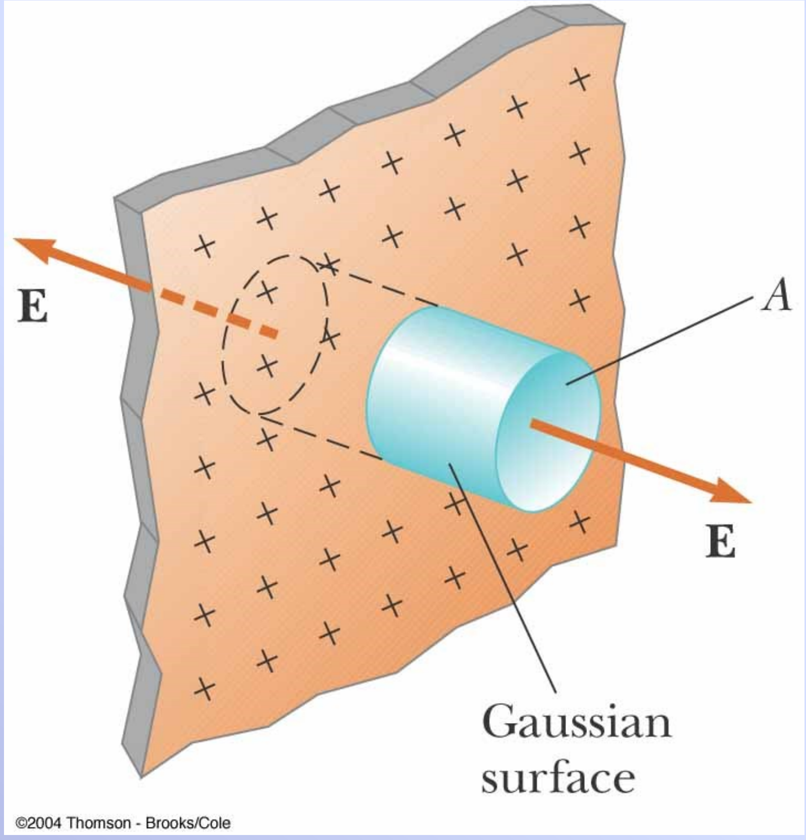
$$E\left(2\pi r\ell \qquad \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_o}\right.$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = 2k_e\frac{\lambda}{r}$$

El campo debido a un plano de carga

- **E** debe ser perpendicular al plano y debe tener la misma magnitud en todos los puntos que equidisten

- Elija un cilindro pequeño como su superficie gaussina; el eje del cilindro es perpendicular al plano de la superficie cargada.



Cont…

- **E** es paralelo a la superficie curvada y, por lo tanto, la contribución al flujo del vector campo eléctrico es nula.
- El flujo a través de cada una de las tapas del cilindro es *EA*, y así el flujo total es 2*EA*

final

- La carga total en la superficie es σA
- Aplicando la ley de Gauss

$$\Phi_E = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

- Note que este valor no depende de r, la distancia al plano cargado
- Por lo anterior, el campo eléctrico es uniforme en cualquiera punto por encima (y abajo) del plano cargado.

Equilibrio electrostático

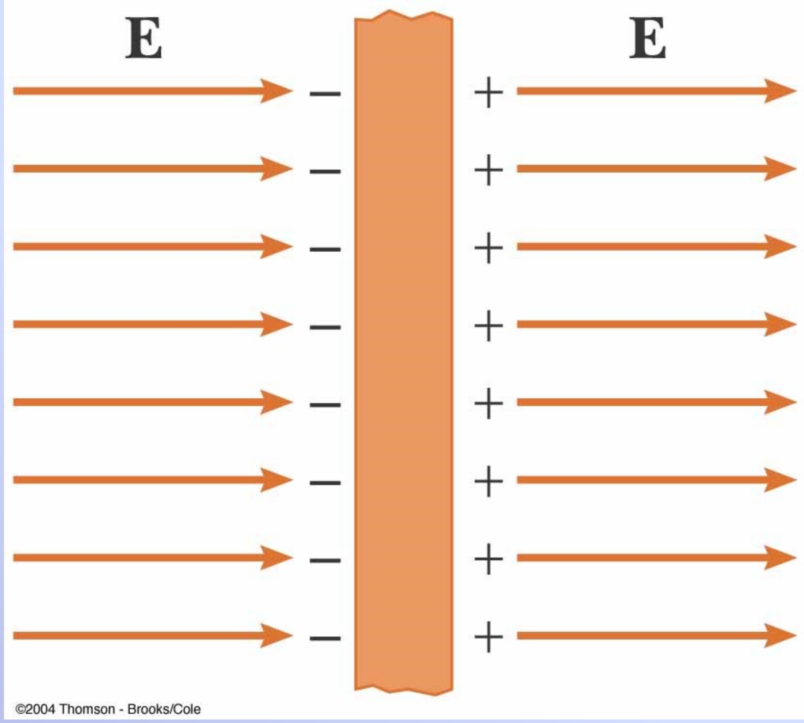
- Cuando no hay un movimiento neto de carga dentro de un conductor, se dice que tal conductor esta en una condición de ***equilibrio electrostático***

Propiedades de un conductor que se encuentra en equilibrio electrostático.

- El campo eléctrico es cero en cualquiera punto dentro del conductor (si éste es eléctricamente neutro).
- Si un conductor aislado es portador de una carga, esta carga reside en la superficie del conductor
- El campo eléctrico justo afuera del conductor cargado es perpendicular a su superficie y tiene una magnitud de σ/ε_o
- Sobre un conductor de forma irregular, la densidad superficial de carga es mayor en aquellas regiones en las que se puede asociar un menor radio de curvatura
- Para mostrar esos puntos, ser mas fácil una vez que tengamos el conceto de potencial eléctrico

Propiedad 1: $E_{dentro} = 0$

- Considere una rebanada de un conductor que se encuentra en un campo eléctrico externo **E**
- Si el campo dentro del conductor no fuera cero, los electrones libres dentro de él experimentarían una fuerza eléctrica
- Estos electrones se acelerarían
- Estos electrones no estarían en equilibrio electrostático
- Por lo tanto, no puede existir campo eléctrico dentro de un conductor

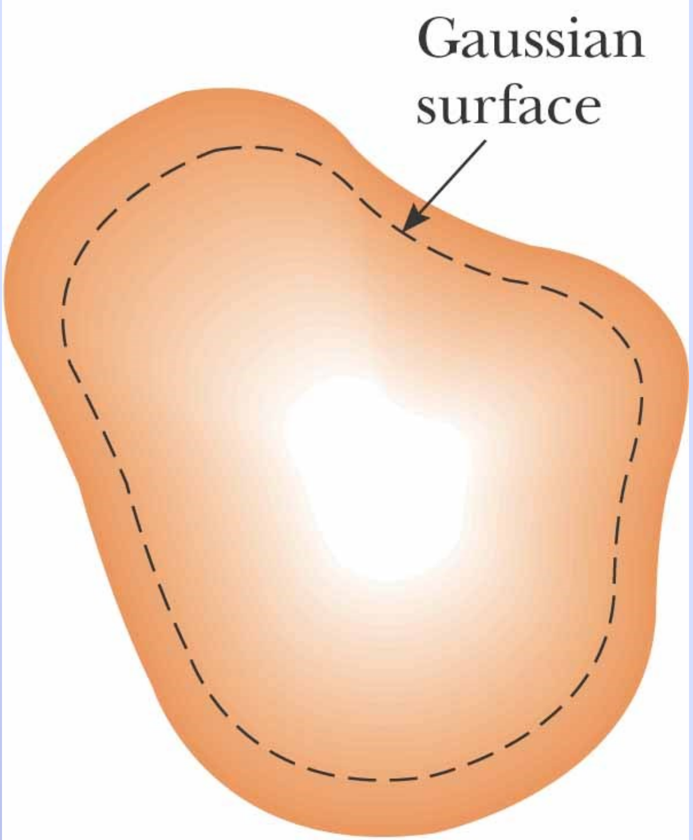


Propiedad 1: $\mathbf{E}_{dentro}= 0$, cont...

- Antes de que el campo eléctrico se aplique, los electrones libres se distribuyen a través de todo el conductor
- Cuando se aplica el campo eléctrico, los electrones libres migran, se reacomodan, de forma que la magnitud del campo eléctrico “externo” se iguala con la magnitud del campo eléctrico “interno”
- Existe un campo neto que es nulo dentro del conductor
- Esta redistribución de la carga dentro del conductor es muy rápida, toma alrededor de 10^{-15}s y puede, por lo tanto, ser considerada como instantánea.

Propiedad 2: la carga reside en la superficie

- Elija una superficie gaussiana que este dentro, pero muy cerca de la superficie real del conductor
- El campo eléctrico es cero dentro del conductor (prop. 1)
- No existe, por lo tanto, flujo neto a través de la superficie gaussiana que usted eligió
- Ya que la superficie gaussiana puede estar tan cerca de la superficie real como se desee, no podrá haber carga dentro de la superficie del conductor

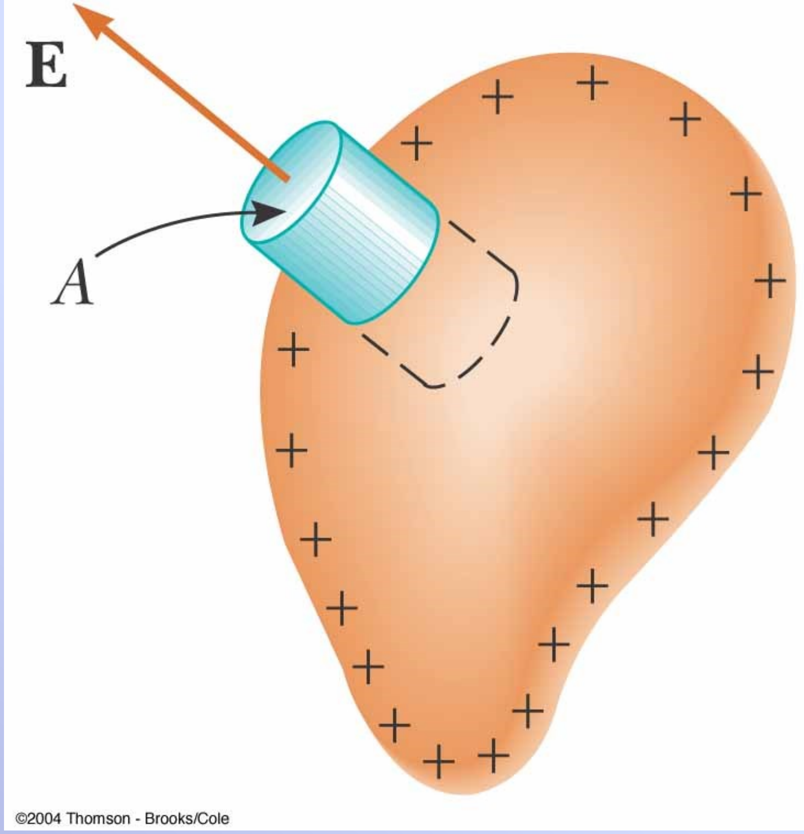


Propiedad 2: la carga reside en la superficie, cont…

- Como no puede haber carga neta dentro de la superficie del conductor, si esta existe debe residir **sobre** su superficie
- La ley de Gauss no indica la distribución detallada de estas cargas, solamente podemos saber que, como no pueden estar dentro del conductor o dentro de su superficie, residen **sobre** la superficie del conductor (en su borde más externo)

Propiedad 3: magnitud del campo y su dirección

- Elija a un cilindro como su superficie gaussiana
- El campo debe ser perpendicular a la superficie
  - Si existiera una componente paralela del campo **E**, las cargas experimentarían una fuerza y se acelerarían a lo largo de la superficie, implicando que no está en equilibrio electrostático



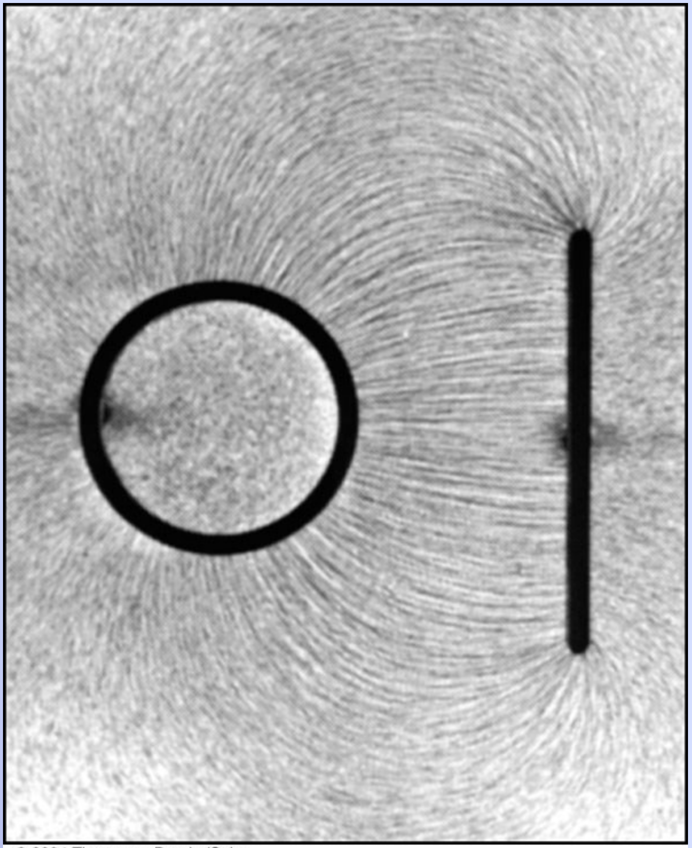
Propiedad 3: magnitud del campo y su dirección, cont...

- El flujo neto a través de la superficie gaussiana puede ser pensado como aquél asociado con una superficie plana fuera del conductor (por la condición límite de que la superfiie sea muy pequeña)
  - El campo aquí es perpendicular a la superficie
- Aplicando la ley de Gauss

$$\Phi_E = EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \text{ and } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Conductores en equilibrio, un ejemplo

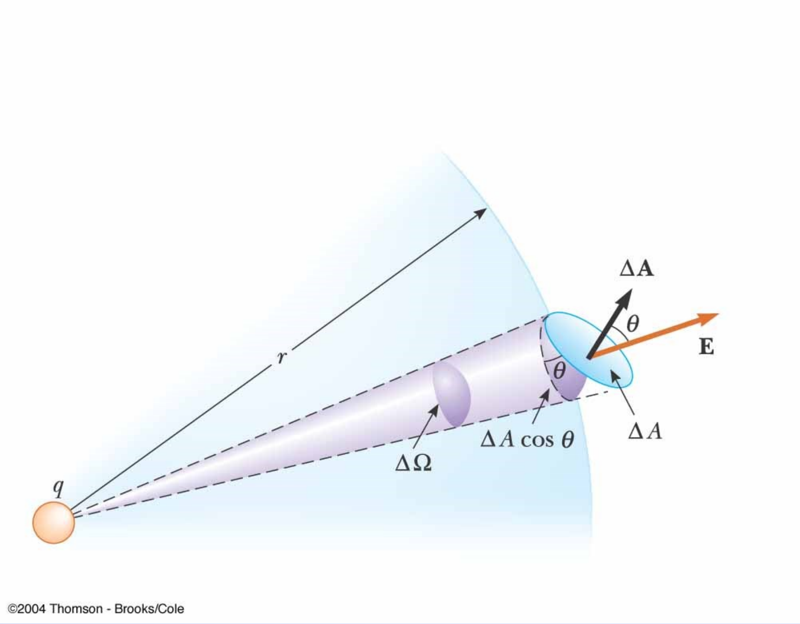
- Las líneas de campo son perpendiculares a ambos conductores
- No existen líneas de campo dentro del cilindro



Obtención de la ley de Gauss

- Se usaran ángulos sólidos, Ω
- Una superficie esférica de radio r contiene un elemento de área ΔA
- El ángulo sólido subtendido en el centro de la esfera se define como

$$\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

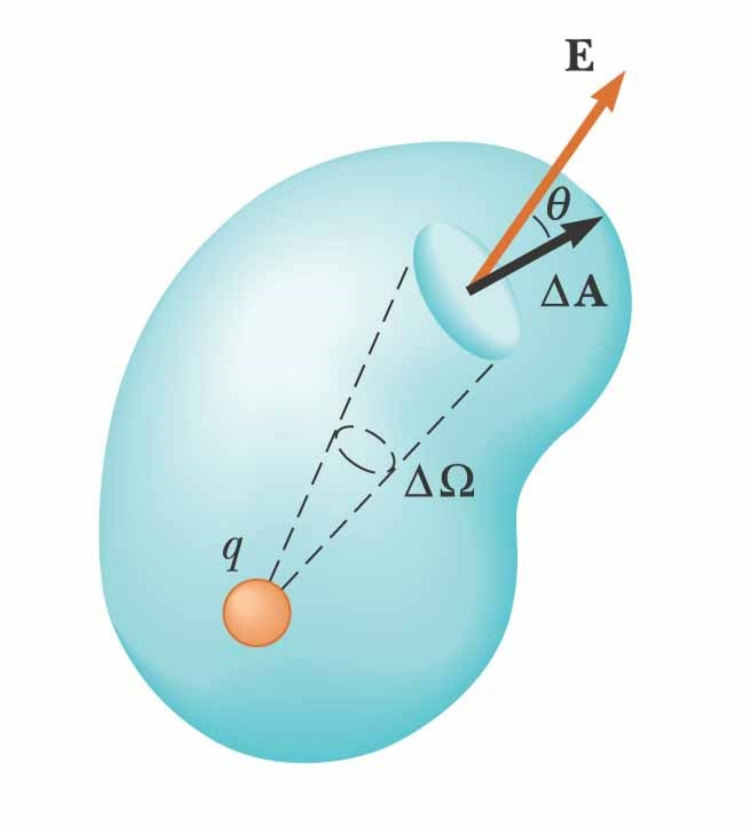


Sobre ángulos sólidos

- *A* y r^2 tienen las mismas unidades, así Ω es un cociente carente de dimensiones
- A este cociente adimensional se le llama ***esterorradián***
- El angulo sólido total que es subtendido por una esfera es de 4π esterorradianes

La ley de Gauss, cont…

- Considere una carga puntual, *q*, rodeada por una superficie cerrada de forma arbitraria
- El flujo total a través d est superficie puede ser evaluado al claclular **E**·Δ**A** para cada uno de los pequeños elementos de área y haciendo la suma para todos los elementos que forman la superficie cerrada.



Ley de Gauss, final

- El flujo a través de cada uno de estos pequeños elementos es

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A} = \left(E\cos\theta\right)\Delta A = k_e q \frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

- Relacionando esta ecuación con la del ángulo sólido

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

  - Donde este es el ángulo sólido subtendido por ΔA
- El flujo total es:

$$\Phi_E = k_e q$$

Notas de esta obtención

- Se ha obtenido la expresión de la ley de Gauss, que se ha aplicado antes
- En esta obtención no se ha hecho exigencia alguna sobre la forma de la superficie cerrada (solamente se pide que sea una buena gaussiana…sup. continua, cuyos límites, integrable)
- En esta obtención, la posición de la carga dentro de la superficie gaussiana no fue un factor importante en su expresión final.