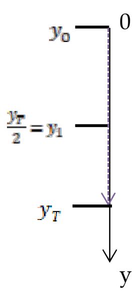
UNIDAD 3. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Ejercicio 1. Un cuerpo, partiendo del reposo, recorre la segunda mitad de su trayectoria, en caída libre, en un segundo. Encuentre:

a) El tiempo que tarda en caer.

b) La altura desde la que cayó.

Usando un sistema de referencia con el origen en el punto de partida, como se muestra en la figura.



Se sabe que: $a_y = g = cte;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t g dt$

Parte del reposo $v_{0y} = 0\ [{}^{m}/_{s}] \Longrightarrow v_y(t) = gt$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t gtdt = \frac{1}{2}gt^2$

Tomando la posición inicial $y_0 = 0\ [m] \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Sean: $y_1 = y(t_1) = \frac{y_T}{2};\ y_T = y(t_T);\ t_T = el\ tiempo\ que\ tarda\ en\ caer.$

Entonces: $y_1 = \frac{1}{2}gt_1{}^2 \ldots (1);\ y_T = \frac{1}{2}gt_T{}^2 \ldots (2)\ y\ \ t_T - t_1 = 1\ s \ldots (3)$

Restando (2) – (1) y sustituyendo de la ecuación (3): $t_T - 1 = t_1$

$$y_T - y_1 = \frac{y_T}{2} = \frac{1}{2}g(t_T{}^2 - t_1{}^2) = \frac{1}{2}g[t_T{}^2 - (t_T - 1)^2]$$

Desarrollando el binomio y simplificando

$$\frac{y_T}{2} = \frac{1}{2}g(2t_T - 1) \Rightarrow y_T = 2gt_T - g$$

Sustituyendo (2) $y_T = \frac{1}{2}gt_T{}^2 = 2gt_T - g \Rightarrow t_T{}^2 - 4t_T + 2 = 0$

$$t_T = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{Bmatrix} 3.41\ s \\ 0.59\ s \end{Bmatrix}$$

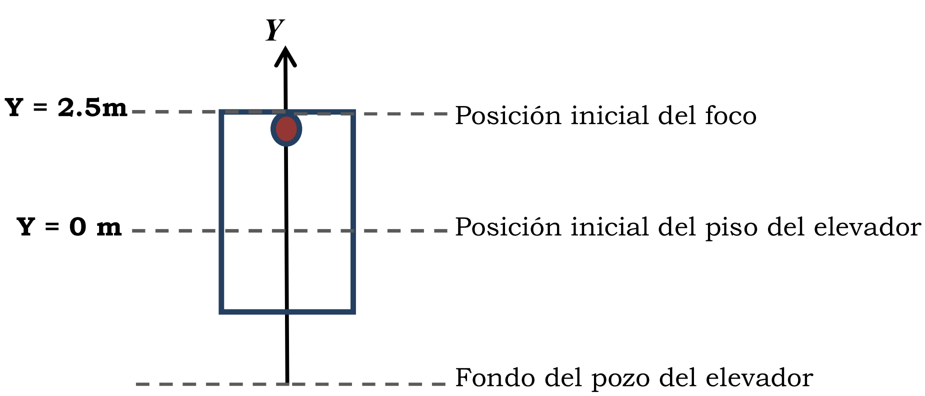
Como realiza la segunda mitad del recorrido en un segundo el tiempo total de recorrido debe ser mayor que 1 s, $\therefore t_T = 3.41\ [s]$. La altura desde la que cayó es igual a: y_T

$$y_T = y(t_T) = y(3.41) = \frac{1}{2}gt_T{}^2 = \frac{1}{2}(9.8)(3.41)^2 = 56.98\ [m]$$

Ejercicio 2. Un elevador asciende con aceleración vertical, hacia arriba de magnitud 0.5m/s². En el instante en que su velocidad ascendente es de 5.0m/s se cae el foco del techo, que estaba mal sujetado. La altura del piso al techo del elevador es de 2.5m. Calcule:

a) El tiempo en que el foco cae desde el techo hasta el piso del elevador.

b) La distancia que cayó con relación al pozo del elevador.



Hay dos objetos en movimiento en los que hay que poner atención: el piso del elevador y el foco, ambos se moverán con aceleración constante, pero de diferente valor.

Se sabe que: $a_y = cte$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Longrightarrow v_y(t) = v_{0y} + a_y t$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_{0y} + a_y t) dt \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$

Usando un sistema de referencia inercial fijo al fondo del pozo, como se muestra en la figura, las posiciones iniciales serán:
$del\ piso$: $y_{0P} = 0\ [m]$, $del\ foco$: $y_{0F} = 2.5\ [m]$.

El foco al soltarse lleva la velocidad del elevador, eso significa que ambos objetos, piso y foco, tienen la misma velocidad inicial:

$$v_{0yF} = v_{0yP} = 5.0\ \frac{m}{s}$$

En cuanto el foco se suelta, actúa sobre él la aceleración de la gravedad y el piso seguirá con la aceleración del elevador, esto significa que:

$$a_{yp} = 0.5 \frac{m}{s^2}\ y\ a_{yF} = -9.8 \frac{m}{s^2}$$

Nótese que las magnitudes de las aceleraciones, las tomamos positivas cuando el vector apunta en dirección del eje y negativas cuando apunta en dirección contraria al eje.

Por consiguiente, las funciones del tiempo para las componentes respectivas de posición y velocidad de cada objeto serán:

$$y_F(t) = 2.5 + 5.0t - 4.9t^2 [m];\ v_{yF}(t) = 5.0 - 9.8t \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$y_P(t) = 5.0t + \frac{t^2}{4} [m];\ v_{yP}(t) = 5.0 + 0.5t \left[\frac{m}{s}\right]$$

Para determinar el tiempo en que el foco llega al piso del elevador, se igualan sus componentes de posición:

$$y_F(t) = y_P(t)\ \Longrightarrow 2.5 + 5.0t - 4.9t^2 = 5.0t + \frac{t^2}{4}$$

Lo que resulta en la siguiente ecuación cuadrática para el tiempo:

$$10 - 20.6t^2 = 0$$

Resolviendo y tomando el valor positivo, el tiempo en que el foco cae desde el techo hasta el piso del elevador resulta t = 0.7 [s]. Sustituyendo este tiempo en las componentes de velocidad y posición se obtiene:

$$y_F(0.7) = 2.5 + 5.0(0.7) - 4.9(0.7)^2 [m];\ v_{yF}(t) = 5.0 - 9.8(0.7) \left[\frac{m}{s}\right]$$

Con los valores obtenidos, escribimos los vectores correspondientes:

$$\therefore\ \vec{r}_F(0.7) = 3.6\hat{\jmath}[m]\ \ y\ \ \vec{v}_F(0.7) = -1.9\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

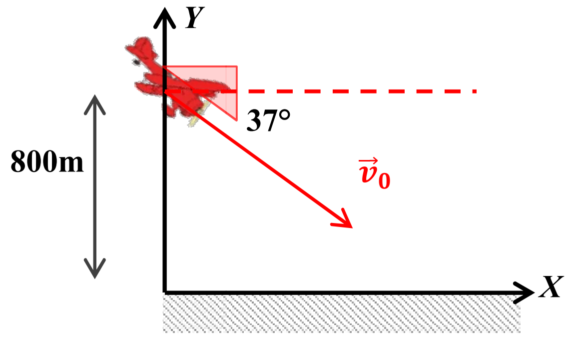
$$y_P(0.7) = 5.0(0.7) + \frac{(0.7)^2}{4} [m];\ v_{yP}(0.7) = 5.0 + 0.5(0.7) \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\therefore\ \vec{r}_P(0.7) = 3.6\hat{\jmath}[m]\ \ y\ \ \vec{v}_P(0.7) = 5.4\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Esto nos indica que el foco no baja con respecto al fondo del pozo del elevador, primero se mueve hacia arriba y luego hacia abajo mientras el piso se mueve hacia arriba continuamente. Cuando se encuentran ambos están 3.6 metros arriba del origen del sistema de referencia, y como al inicio el foco estaba en 2.5 m, esto significa que cuando el foco toca el piso del elevador está a 1.1 m de su posición inicial, por consiguiente, subió 1.1 m.

Ejercicio 3. Un bombardero en picada a un ángulo de 37º respecto a la horizontal, deja caer una bomba a una altura de 800.0m. La bomba choca con la tierra 5.0 s después de ser soltada. Calcule:

a) **La rapidez del bombardero.**
b) **La distancia horizontal recorrida por la bomba.**
c) **La velocidad de la bomba (magnitud y dirección) un instante antes de tocar el suelo.**



Cuando la bomba se suelta del bombardero tiene la velocidad de dicho bombardero, $\vec{v}_0$, y estará sujeta a la aceleración de la gravedad, que se considera constante, por consiguiente el movimiento que realiza la bomba ocurre en dos dimensiones, con aceleración constante y con las condiciones iniciales, acorde al sistema de referencia mostrado en la figura:

$$\vec{a} = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \vec{v}_0 = |\vec{v}_0|cos(37°)\hat{\imath} - |\vec{v}_0|sen(37°)\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right];\ \vec{r}_0 = 800\hat{\jmath}[m]$$

Como no hay componente de aceleración en la dirección X, significa que la componente X de velocidad no cambia durante el movimiento de la bomba,

$$v_x(t) = v_{0x} = |\vec{v}_0|cos(37°)$$

Para la componente Y de velocidad:

$$a_y = cte = -9.8\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Rightarrow \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t = -|\vec{v}_0|sen(37°) - 9.8t$$

Para las componentes de posición, con la condición inicial $\vec{r}_0 = 800\hat{\jmath}[m]$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{0x} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t = |\vec{v}_0|cos(37°)t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_{0y} + a_y t)dt$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 800 - |\vec{v}_0|sen(37°)t - 4.9t^2$$

Las funciones correspondientes para posición, velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)t\}\hat{\imath} + \{800 - |\vec{v}_0|sen(37°)t - 4.9\,t^2\}\hat{\jmath}[m]$$

$$\vec{v}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)\}\hat{\imath} - \{|\vec{v}_0|sen(37°) + 9.8\,t\}\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{a}(t) = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que la bomba llega al piso en 5 segundos, entonces la función de la posición de la bomba al final de recorrido puede escribirse así:

$$\vec{r}(5) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)5\}\hat{\imath} + \{800 - |\vec{v}_0|sen(37°)5 - 4.9\,(5)^2\}\hat{\jmath}[m]$$

Y el valor explícito del vector puede escribirse así:

$$\vec{r}(5) = x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}[m]$$

Como es el mismo vector, sus componentes deben ser iguales, lo que deja el siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$x = |\vec{v}_0|cos(37°)5$$

$$0 = 800 - |\vec{v}_0|sen(37°)5 - 4.9\,(5)^2$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$|\vec{v}_0| = \frac{800 - 4.9\,(5)^2}{5sen(37°)} = 225.15\left[\frac{m}{s}\right]$$

Que corresponde a la rapidez del bombardero, inciso a).

Usando este resultado en la ecuación para x se obtiene:

$$x = 5(225.15)cos(37°) = 899\,m$$

Que corresponde a la componente horizontal de la posición al llegar al piso y es la distancia horizontal recorrida por la bomba, inciso b).

Para determinar la velocidad de la bomba un instante antes de tocar el suelo, se evalúa $\vec{v}(t)$, para $t = 5[s]$, obteniéndose:

$$\vec{v}(5) = \{225.15cos(37°)\}\hat{\imath} - \{225.15sen(37°) + 9.8\,(5)\}\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] = 179.81\hat{\imath} - 184.50\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Para obtener la magnitud:

$$|\vec{v}(5)| = \sqrt{(179.81)^2 + (-184.50)^2} = 257.63\left[\frac{m}{s}\right]$$

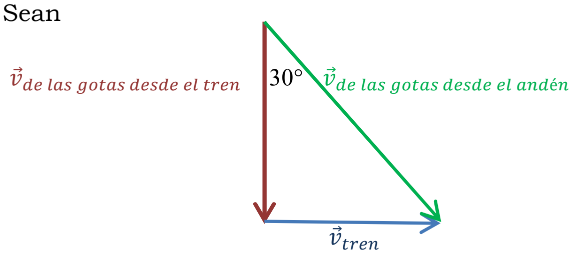
Para obtener el ángulo:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-184.50}{179.81}\right) = -45.74\,°\,con\ la\ horizontal$$

Que es la respuesta al inciso c).

Ejercicio 4. Un tren viaja hacia el este con rapidez de 100.0km/h (respecto al piso), bajo la lluvia desviada hacia el este por el viento. Las trayectorias de las gotas de lluvia forman ángulos de 30° con la vertical, medido por un observador que permanece en el andén. Un pasajero sentado en el tren ve las gotas de agua caer verticalmente. Calcule la rapidez de las gotas de agua con respecto al andén.

Sean



$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{de\ las\ gotas\ desde\ el\ tren}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{de\ las\ gotas\ desde\ el\ andén}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{tren}$$

Usando ley de senos y las magnitudes de los vectores de velocidad: $\frac{|\vec{v}_2|}{sen\ 30°} = \frac{|\vec{v}|}{sen\ 90°} = \frac{|\vec{v}_1|}{sen\ 60°}$

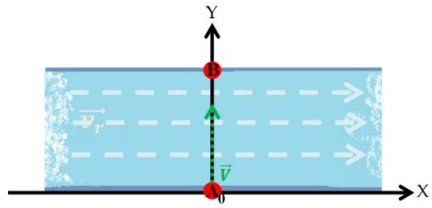
Entonces:

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{v}_2|}{sen\ 30°} = \frac{100.0\frac{km}{h}}{0.5} = 200.0\frac{km}{h}$$

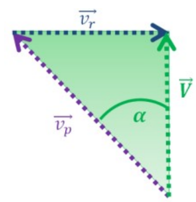
La rapidez de las gotas de agua con respecto al andén es 200.0 km/h.

Ejercicio 5. Una persona puede remar en un bote con rapidez constante de 2.0m/s en aguas tranquilas.

- **a) Si está cruzando un río donde la corriente es de 0.5m/s a partir del punto A ¿En qué dirección deberá dirigir su bote si quiere alcanzar un punto que está directamente enfrente al lugar de salida, punto B?**
- **b) Si el río tiene 50.0m de ancho ¿cuánto tardará en atravesarlo?**
- **c) ¿Cuánto tardará en recorrer 50.0m a favor de la corriente?**
- **d) ¿Cuánto tardará en recorrer 50.0m en contra de la corriente?**
- **e) ¿En qué dirección deberá dirigir el bote si quiere cruzar en el menor tiempo posible?**



a) Se quiere calcular el ángulo con que debe remar la persona, para que la velocidad resultante sea en la dirección AB. La velocidad resultante será, $\vec{V} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$



- $\vec{v_r} = velocidad\ del\ río,\ |\vec{v_r}| = 0.5\,\frac{m}{s}$
- $\vec{v_p} = velocidad\ de\ la\ persona.\ |\vec{v_p}| = 2.0\,\frac{m}{s}$

$$sen\,\alpha = \frac{|\vec{v_r}|}{|\vec{v_p}|} \therefore \alpha = sen^{-1}\frac{|\vec{v_r}|}{|\vec{v_p}|}.$$

Sustituyendo los valores de rapidez, se obtiene:

$$\alpha = sen^{-1}\frac{0.5\,\frac{m}{s}}{2.0\,\frac{m}{s}} = 14.5\,°$$

b) Al trabajar con el vector resultante, $\vec{V}$, el problema que originalmente se planteó en dos dimensiones, ahora se simplifica en un ejercicio de una sola dimensión (de acuerdo al marco de referencia se trabajará sobre el eje y). Se usará $v_y = |\vec{V}|$ y para calcular $|\vec{V}|$, se puede hacer uso del teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v_p}|^2 = |\vec{v_r}|^2 + |\vec{V}|^2$$

Al despejar $|\vec{V}|$, y sustituir se obtiene

$$v_y = |\vec{V}| = \sqrt{|\vec{v_p}|^2 - |\vec{v_r}|^2} = \sqrt{\left(2.0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(0.5\tfrac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{3.75} = 1.94\,\frac{m}{s}$$

Como:

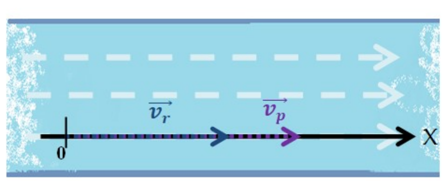
$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_i}^{y_f} dy = \int_0^t v_y dt \Rightarrow y_f - y_i = v_y t$$

$$y_f = y_i + v_y t \ \Rightarrow t = \frac{y_f - y_i}{v_y}$$

Donde $y_f = Punto\ B$ y $y_i = Punto\ A$; de acuerdo con el marco de referencia planteado: $y_i = 0\,m$ y el planteamiento del problema menciona que el ancho del río mide 50.0 m entonces, $y_f = 50.0\,m\ \therefore\ y_f - y_0 = 50.0\,m - 0\,m = 50.0\,m.$

$$\therefore t = \frac{50.0\,m}{1.94\,\frac{m}{s}} = 25.82\,s$$

c) Ahora la situación cambia, el navegante no intenta cruzar el río, se moverá a favor de la corriente, esto significa que los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_p}$son paralelos.



La velocidad resultante es: $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p} = 2.0\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] + 0.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] = 2.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$

Nuevamente el movimiento ocurre en una dimensión, X, ahora se usará $v_x = 2.5\left[\frac{m}{s}\right]$

Como:

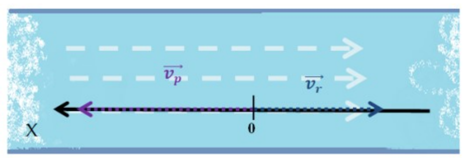
$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow x_f - x_i = v_x t$$

$$x_f = x_i + v_x t \Rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$$

De acuerdo con el marco de referencia planteado: $x_f = 50.0\ m$ y $x_i = 0\ m$; $\Delta x = x_f - x_i = 50.0\ m - 0\ m = 50.0\ m$.

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{50.0\ m}{2.5\frac{m}{s}} = 20.0\ s$$

d) Ahora el navegante se moverá en contra de la corriente, esto significa que los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_p}$ son antiparalelos.

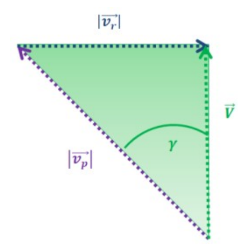


La velocidad resultante es: $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p} = 2.0\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] - 0.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] = 1.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$

Nuevamente el movimiento ocurre en una dimensión, X, ahora se usará $v_x = 1.5\left[\frac{m}{s}\right]$

Del inciso anterior tenemos que: $x_f = x_i + v_x t \Rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$, de acuerdo al marco de referencia planteado: $x_f = 50.0\ m$ y $x_i = 0\ m$; $\Rightarrow \Delta x = 50.0\ m - 0\ m = 50.0\ m$.

$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{50.0\ m}{1.5\frac{m}{s}} = 33.3\ s$

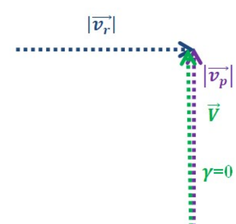


e) Regresando al problema en dos dimensiones, para determinar en qué dirección deberá dirigir el bote si quiere cruzar en el menor tiempo posible, como el ancho del río no cambia entonces lo que modificará el tiempo de cruce es la magnitud de la velocidad $|\vec{V}|$, de tal forma que se busca la mayor $|\vec{V}|$ posible; como $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p}$ de la figura se tiene: $\cos\gamma = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{v_p}|}$; como se desea maximizar $|\vec{V}|$ como función del ángulo, se despeja $|\vec{V}| = |\vec{v_p}|\cos\gamma$ y se utilizan los criterios del cálculo diferencial:

$$\frac{d|\vec{V}|}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma}\left(|\vec{v_p}|\cos\gamma\right) = -|\vec{v_p}|sen\gamma$$

Se iguala a cero para obtener el punto crítico $0 = -|\vec{v_p}|sen\,\gamma$, esto implica que:

1. $|\vec{v_p}| = 0$ m/s, lo que es físicamente imposible pues de ser así significaría que la persona está en reposo y no es congruente con la situación,
2. $sen\,\gamma = 0$, entonces, $\gamma = 0$



Usando el criterio de la segunda derivada: $\frac{d^2|\vec{V}|}{d\gamma^2} = \frac{d^2}{d\gamma^2}\left(|\vec{v_p}|\cos\gamma\right) = \frac{d}{d\gamma}\left(-|\vec{v_p}|sen\,\gamma\right) = -|\vec{v_p}|\cos\gamma$

Al sustituir el valor obtenido de $\gamma = 0$

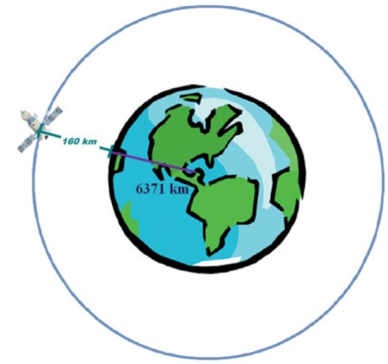
$$-|\vec{v_p}|\cos 0 < 0 \ \therefore es\ un\ máximo$$

Es decir: $\vec{V}$ y $\vec{v_p}$ son paralelos lo que implica que la dirección en la que debe navegar la persona es perpendicular a la corriente del río, para tardar el menor tiempo posible en cruzarlo, aunque al final de su recorrido no llegará al punto B.

Ejercicio 6. Un satélite artificial gira en una órbita circular a una altura de 160.0 km sobre la superficie de la Tierra, dando una vuelta en 90.0 min, calcule:

a) La rapidez del satélite, medida desde el centro de la Tierra.

b) La magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta el satélite.



a) Para poder resolver el ejercicio es necesario conocer el radio de la circunferencia de la órbita del satélite, se conoce solo una fracción de este y el resto corresponde al radio de la Tierra; si bien el radio de la Tierra difiere dependiendo de que parte de la misma estemos midiendo, se supondrá que la Tierra es una esfera perfecta y se tomará como valor el radio medio: 6371.0 km. Por lo tanto $r = 160.0\ km + 6371.0\ km = 6531.0\ km$

Se sabe que tarda 90.0 minutos en dar una vuelta, es decir: $\frac{2\,\pi\, rad}{90.0\ min}$

$$\Rightarrow\ \omega = \frac{2\,\pi\, rad}{90.0\ min} \times \frac{1\ min}{60.0\ s} = 1.16\ \times 10^{-3}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\therefore\ |\vec{v}| = \omega\, r = 1.16\ \times 10^{-3}\frac{rad}{s} \times 6531.0\ km \times \frac{1000.0\ m}{1.0\ km} = 7575.96\left[\frac{m}{s}\right]$$

b) Se sabe que $|\overrightarrow{a_c}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$

$$\therefore |\overrightarrow{a_c}| = \frac{\left(7575.96\,\frac{m}{s}\right)^2}{6.531\ \times 10^6\ m} = 8.79\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ejercicio 7. Un cuerpo gira en un círculo de radio 50.0 cm, la línea imaginaria que une al cuerpo con el centro, tiene rapidez angular dada por la expresión

$$\boldsymbol{\omega(t) = At - Bt^2\left[\frac{rad}{s}\right]}$$

Donde A = 5.0rad/s² y B = 0.25rad/s³. Tomando como positivo el giro en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj calcule, para el instante t = 3.0s.

a) La rapidez del cuerpo. [Medida desde el centro del círculo]

b) La magnitud de la aceleración que experimenta el cuerpo.

Se evalúa $\omega(3.0) = \left(5.0\frac{rad}{s^2}\right)(3.0\ s) - \left(0.25\ \frac{rad}{s^3}\right)(3.0\ s)^2 = 12.75\ \left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\therefore |\vec{v}(3.0)| = \ r\omega(3.0)\ \ = \left(12.75\,\frac{rad}{s}\right)(50.0\ cm)\left(\frac{1\ m}{100.0\ cm}\right) = 6.38\left[\frac{m}{s}\right]$$

Se sabe que la celeridad angular es: $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = A - 2Bt\left[\frac{rad}{s^2}\right]$. Se evalúa para t = 3.0 s.

$$\alpha(3.0) = \left(5.0\frac{rad}{s^2}\right)\ - 2\left(0.25\,\frac{rad}{s^3}\right)(3.0\ s) = 3.5\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Usando

$$|\overrightarrow{a_c}(3.0)| = \frac{|\vec{v}(3.0)|^2}{r} = \frac{\left(6.38\ \frac{m}{s}\right)^2}{0.5\ m} = 81.41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$|\overrightarrow{a_t}(3.0)| = r\alpha(3.0) = (0.5\ m)\left(3.5\frac{rad}{s^2}\right) = 1.75\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que la aceleración total es $\vec{a} = \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_t}$, como se quiere calcular solo la magnitud de $\vec{a}$ ylos vectores $\overrightarrow{a_c}\ y\ \overrightarrow{a_t}$ son ortogonales:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\overrightarrow{a_c}|^2 + |\overrightarrow{a_t}|^2}$$

$$|\vec{a}(3.0)| = \sqrt{|\overrightarrow{a_c}(3.0)|^2 + |\overrightarrow{a_t}(3.0)|^2} = \sqrt{(81.41)^2 + (1.75)^2}\left[\frac{m}{s^2}\right] = 81.41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ejercicio 8. Un electrón que gira con rapidez constante alrededor de un núcleo, describiendo una órbita circular de radio 5.29x10⁻¹² [m], tarda 1.53x10⁻¹⁸ [s] en cumplir un ciclo. Determine, en [m/s²], la magnitud de la aceleración del electrón.

Se sabe que el electrón tarda $1.53\text{x}10^{-18}$ [s] en cumplir un ciclo, es decir:

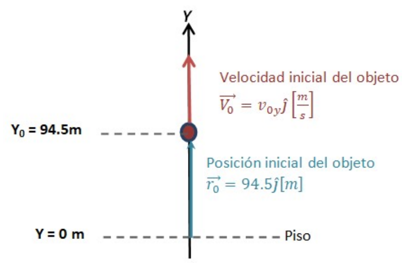
$$\frac{2\,\pi\, rad}{1.53\times 10^{-18}[\text{s}]} \Rightarrow\ \omega = \frac{2\,\pi\, rad}{1.53\times 10^{-1}\ \ [\text{s}]} = 4.1\ \times 10^{18}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Se sabe que $|\overrightarrow{a_c}| = r\omega^2$

$$\therefore |\overrightarrow{a_c}| = (5.29\times 10^{-12})(4.1\ \times 10^{18})^2 = 8.9\times 10^{25}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ejercicio 9. Determine la velocidad, en [m/s], con la que debe lanzarse verticalmente hacia arriba, un objeto desde una altura de 94.5 [m] para que llegue al piso con rapidez de 70.0 [m/s].

Usando un marco de referencia inercial fijo al piso, como se muestra en la figura, se establecen la posición y la velocidad iniciales:



En cuanto el objeto se lanza, actúa sobre él la aceleración de la gravedad, esto significa:

$$\vec{a} = a_y\hat{\jmath} = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que: $a_y = cte;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Longrightarrow v_y(t) = v_{0y} + a_y t$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \left(v_{0y} + a_y t\right)dt \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

Sustituyendo los valores de $\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0}\ y\ \vec{a}$, se obtiene:

$$y(t) = 94.5 + v_{0y}t - 4.9t^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} - 9.8t$$

Como se quiere que el objeto llegue al piso con rapidez 70.0 [m/s]. Esto significa que debe cumplirse simultáneamente que: $y = 0\ [m]\ y\ v_y = -70.0\ \left[\frac{m}{s}\right]$. Acorde al marco de referencia empleado, el signo de v_y indica que el objeto viaja hacia abajo.

Usando estos valores en las ecuaciones correspondientes, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$0 = 94.5 + v_{0y}t - 4.9t^2$$

$$-70.0 = v_{0y} - 9.8t$$

De la segunda ecuación se despeja v_{oy}

$$v_{oy} = 9.8t - 70.0$$

Se sustituye en la segunda y se despeja el tiempo,

$$0 = 94.5 + (9.8t - 70.0)t - 4.9t^2$$

$$0 = 94.5 + 9.8t^2 - 70.0t - 4.9t^2$$

$$0 = 94.5 - 70.0t + 4.9t^2$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para el tiempo se obtiene

$$t = \frac{70.0 \pm \sqrt{(70.0)^2 - 4(94.5)(4.9)}}{2(4.9)} = \frac{70.0 \pm \sqrt{3047.8}}{9.8} = \begin{Bmatrix} 12.8\ s \\ 1.5\ s \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores para el tiempo en:

$$v_{oy} = 9.8t - 70.0$$

Resulta

$$v_{oy} = 9.8(12.8) - 70.0 = 55.4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_{oy} = 9.8(1.5) - 70.0 = -55.4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Los dos resultados son correctos desde el punto de vista de la física, el primero representa la situación planteada en el problema, el objeto se lanza verticalmente hacia arriba y entonces la respuesta correcta es:

$$\vec{v_0} = 55.4\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

El segundo resultado representa la situación cuando el objeto es lanzado verticalmente hacia abajo, en cuyo caso

$$\vec{v_0} = -55.4\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Que no es la respuesta del problema, pero puede notarse que cuando el objeto se lanza verticalmente hacia arriba, tarda más tiempo en llegar al piso, porque primero va a subir hasta llegar a su altura máxima y después viajará hacia abajo hasta llegar al piso. Cuando se lanza verticalmente hacia abajo viaja directamente hacia el piso, por eso tarda menos tiempo en llegar.

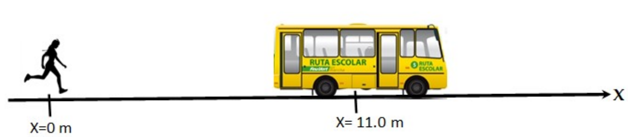
Ejercicio 10. Una mujer corre en línea recta con velocidad de magnitud 5.1 [m/s] para tomar un autobús que se encuentra estacionado. Cuando ella está a 11.0 [m] del autobús, éste deja la parada con aceleración de magnitud 1.0 [m/s²] (alejándose de la mujer). Cuando la mujer alcanza al autobús, ¿qué velocidad tiene el autobús?

Hay dos objetos en movimiento en los que hay que poner atención: la mujer y el autobús, la mujer se mueve con velocidad constante y por consiguiente su aceleración es cero, el autobús se mueve partiendo del reposo con aceleración constante.

Se sabe que: $a_x = cte$; $a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t a_x dt \Longrightarrow v_x(t) = v_{0x} + a_x t$

Como: $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (v_{0x} + a_x t)dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

Usando un marco de referencia inercial, como se muestra en la figura, las posiciones iniciales respectivas serán:
de la mujer: $x_{0M} = 0\ [m]$, *del autobús*: $x_{0A} = 11.0\ [m]$.



De igual forma se establecen velocidad inicial y aceleración para la mujer y al autobús:

$$de\ la\ mujer:\ v_{0xM} = 5.1\left[\frac{m}{s}\right]\ y\ a_{xM} = 0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$del\ autobús: v_{0x}\ \ = 0\left[\frac{m}{s}\right]\ y\ a_{xA} = 1.0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Por consiguiente, las funciones del tiempo para las componentes respectivas de posición y velocidad de cada uno serán:

$$x_M(t) = 5.1t[m];\ v_{xM}(t) = 5.1\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$x_A(t) = 11.0 + \frac{t^2}{2}[m];\ v_{xA}(t) = t\left[\frac{m}{s}\right]$$

Para determinar la velocidad que tiene el autobús cuando la mujer lo alcanza, primero se igualan las posiciones de ambos para determinar el tiempo que tardan en alcanzarse:

$$x_M(t) = x_A(t) \Longrightarrow 5.1t = 11.0 + \frac{t^2}{2}$$

Lo que resulta en la siguiente ecuación cuadrática para el tiempo:

$$\frac{t^2}{2} - 5.1t + 11.0 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos tiempos, t_1 = 3.1 [s] y t_2 = 7.1 [s]. Los dos resultados son correctos desde el punto de vista de la física, el primero representa el tiempo que tarda la mujer en alcanzar al autobús. Sustituyendo este tiempo en la componente de velocidad del autobús:

$$v_{xA}(t) = t\left[\frac{m}{s}\right] = 3.1\left[\frac{m}{s}\right]$$

La velocidad que tiene el autobús cuando la mujer lo alcanza es:

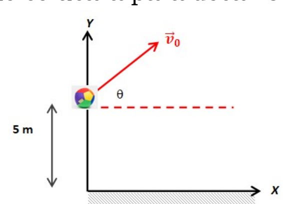
$$\therefore\ \vec{v}_A(3.1) = 3.1\,\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Que es la respuesta correcta.

Si la mujer no se sube al autobús, sino que continúa corriendo, rebasaría al autobús, pero como la velocidad del autobús está aumentando, el segundo tiempo representaría el tiempo que tarda el autobús en alcanzar a la mujer.

Ejercicio 11. Un objeto es lanzado, describiendo un movimiento de proyectil, desde una altura de 5 [m]. Si el objeto recorre horizontalmente 3 [m] llegando al piso y el tiempo de vuelo es 2 [s]; determine, en grados, el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal

En la figura se muestra el marco de referencia que se usará para desarrollar la solución.



Cuando se lanza el objeto tiene la velocidad, $\vec{v}_0$, y estará sujeta a la aceleración de la gravedad, que se considera constante, por consiguiente el movimiento que realiza el objeto ocurre en dos dimensiones, con aceleración constante y con las condiciones iniciales, acorde al sistema de referencia mostrado en la figura:

$$\vec{a} = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \vec{v}_0 = |\vec{v}_0|cos(\theta)\hat{\imath} + |\vec{v}_0|sen(\theta)\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right];\ \vec{r}_0 = 5\hat{\jmath}[m]$$

Como no hay componente de aceleración en la dirección X, significa que la componente X de velocidad no cambia durante el movimiento del objeto,

$$\Rightarrow v_x(t) = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos(\theta)$$

Para la componente Y de velocidad:

$$a_y = cte = -9.8\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Rightarrow\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t = |\vec{v}_0|sen(\theta) - 9.8t$$

Para las componentes de posición, con la condición inicial $\vec{r}_0 = 5\hat{j}[m]$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{0x}dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t = |\vec{v}_0|\cos(\theta)\, t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \left(v_{0y} + a_y t\right)dt \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 5 + |\vec{v}_0|sen(\theta)t - 4.9\, t^2$$

Las funciones correspondientes para posición, velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(\theta)t\}\hat{\imath} + \{5 + |\vec{v}_0|sen(\theta)t - 4.9\, t^2\}\hat{j}[m]$$

$$\vec{v}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(\theta)\}\hat{\imath} + \{|\vec{v}_0|sen(\theta) - 9.8\, t\}\hat{j}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{a}(t) = -9.8\hat{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que el objeto recorre horizontalmente 3 [m] y el tiempo de vuelo es 2 [s]; entonces la función de la posición del objeto al final del recorrido puede escribirse así:

$$\vec{r}(2) = \{|\vec{v}_0|cos(\theta)(2)\}\hat{\imath} + \{5 + |\vec{v}_0|sen(\theta)(2) - 4.9\,(2)^2\}\hat{j}[m]$$

Y el valor explícito del vector puede escribirse así:

$$\vec{r}(2) = 3\hat{\imath} + 0\hat{j}[m]$$

Como es el mismo vector, sus componentes deben ser iguales, lo que deja el siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$3 = 2|\vec{v}_0|cos(\theta)$$

$$0 = 5 + 2|\vec{v}_0|sen(\theta) - 4.9\,(2)^2 = 2|\vec{v}_0|sen(\theta) - 14.6$$

Rescribiendo la segunda ecuación:

$$14.6 = 2|\vec{v}_0|sen(\theta)$$

Despejando $|\vec{v}_0|$ de la primera se obtiene:

$$|\vec{v}_0| = \frac{3}{2cos\theta}$$

Sustituyendo en la segunda

$$14.6 = 2|\vec{v}_0|sen(\theta) = 2\left(\frac{3}{2cos\theta}\right)sen(\theta)$$

Simplificando

$$14.6 = 3tan(\theta)$$

Para obtener el ángulo:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{14.6}{3}\right) = 78.4.°\ con\ la\ horizontal$$