UNIDAD 6. ENERGÍA MECÁNICA

Ejercicio 1. Un carro con masa $m = 300\text{ kg}$ de una montaña rusa se encuentra inicialmente en reposo sobre la cúspide más alta de su trayectoria. Despreciando cualquier efecto de fricción, calcule:

a) La rapidez mínima necesaria del carro para que pueda pasar por un anillo de 10 m de altura sin caer.

b) La altura h a la cual debe estar el carro sobre las vías para que logre completar la vuelta por el anillo.

c) La rapidez del carro en la parte más baja del anillo antes del ascenso.

a) Puesto que en este caso la fuerza centrípeta es la responsable de mantener en movimiento circular al carro por el anillo, entonces en la parte más alta de éste su magnitud debe corresponder con la magnitud de la aceleración de la gravedad; en consecuencia:

$$g = a_c = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{rg} = \sqrt{(5.0\,m)(9.8 m/s^2)} \rightarrow v = 7.0\frac{m}{s}$$

b) En este caso se aplicará el principio de conservación de la energía mecánica en dos puntos: el primero corresponde a la parte más alta de la trayectoria donde inicialmente está en reposo el carro, por lo que ahí la energía cinética inicial es cero; el segundo punto es la parte más alta del anillo, donde tanto la energía cinética como la potencial son distintas de cero. En consecuencia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgH \rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + H \rightarrow h = \left(\frac{1}{2}\frac{7.0^2}{9.8} + 10\right)\text{m} \rightarrow h = 12.5\text{ m}$$

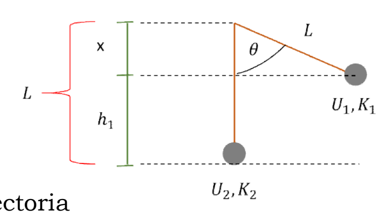
c) Similarmente al inciso previo, se aplicará el principio de conservación de la energía mecánica en el punto más alto de la trayectoria, donde el carro inicialmente está en reposo y en otro que corresponde a la parte más baja del anillo antes del ascenso. Por lo que:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(12.5)}\frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow v = 15.7\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Obsérvese que en la parte más baja del anillo se consideró que la energía potencial del sistema es cero.

Ejercicio 2. Se forma un péndulo vertical con un segmento de cuerda de 3 m al cual se le ata por un extremo una piedra con una masa de 500 g. Si se deja caer la piedra partiendo del reposo y con la cuerda formando un ángulo de 55° con la vertical, ¿cuál será la rapidez que experimentará la piedra en el punto más bajo de la trayectoria?

Consideremos que:



U_1 = Energía potencial en el punto más alto del péndulo (de donde se deja caer la roca)
K_1 = Energía cinética en el punto más alto del péndulo (de donde se deja caer la roca)
U_2 = Energía potencial en el punto más bajo de la trayectoria
K_2 = Energía cinética en el punto más bajo de la trayectoria
L = longitud de la cuerda del péndulo
h_1 = altura medida desde el punto más bajo de la trayectoria al punto más alto de la trayectoria

Por conservación de la energía mecánica se puede afirmar que:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \qquad \ldots (1)$$

Si consideramos que la piedra parte del reposo, entonces en el punto más alto de la trayectoria la rapidez es cero, por lo que K_1 tendrá un valor también de cero. Por otra parte, en el punto más bajo de la trayectoria de un péndulo vertical se puede considerar que toda la energía mecánica se encuentra en forma cinética, por lo que U_2 puede considerarse cero. Y la ecuación 1 puede reducirse a:

$$U_1 = K_2 \qquad \ldots (2)$$

Si consideramos que la única fuerza que genera trabajo es el peso el cual es constante, entonces la energía potencial puede expresarse como:

$$U_1 = mgh_1 \qquad \ldots (3)$$

Por otra parte, la energía cinética se relaciona con la rapidez como:

$$K_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 \qquad \ldots (4)$$

Sustituimos 3 y 4 en la ecuación 2

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 \qquad \ldots (5)$$

Para encontrar el valor de h_1, al observar la figura anterior, se aprecia que:

$$L = x + h_1 \qquad \ldots (6)$$

Donde x se puede considerar como el cateto adyacente del triángulo rectángulo que se forma con el punto más alto del péndulo:

$$x = L\cos\theta \qquad \ldots (7)$$

Sustituimos la ecuación 7 en 6 y despejamos h_1:

$$h_1 = L - L\cos\theta = L[1 - \cos\theta] \qquad \ldots (8)$$

Finalmente sustituimos la ecuación 8 en 5 y despejamos V_2:

$$mgL[1 - \cos\theta] = \frac{1}{2}mV_2^2$$

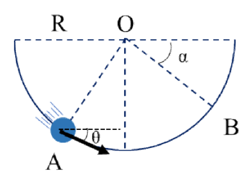
$$V_2 = \pm\sqrt{2gL[1 - \cos\theta]}$$

Observa que el valor de la rapidez es independiente de la masa m y que no estamos considerando la fricción del aire.

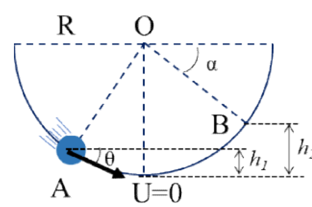
Sustituimos nuestros valores en unidades del Sistema Internacional y al hablar de la magnitud de un vector tomamos el valor positivo:

$$V_2 = \sqrt{2(9.81\ m/s^2)(3\ m)[1 - \cos 55°]} = 5\ \frac{m}{s}$$

Ejercicio 3. Un collarín de 10 g se desliza por el alambre circunferencial de centro O y radio R = 1 m. Si cuando pasa por el punto A su velocidad tangencial forma un ángulo de 37° con la horizontal como se ilustra en la figura, ¿en cuánto habrá incrementado su energía potencial, en el punto B, donde α = 53°?



Primero debemos establecer un sistema de referencia, donde la energía potencial sea cero e identificar los cambios de altura con respecto a U=0 J, la cual será establecida en la parte más baja de la curva, tal que:



$U_1 = mgh_1 = mgR(1 - cos\theta)$

$U_2 = mgh_2 = mgR(1 - cos\alpha)$

Realizando la diferencia entre ambas energías potenciales, $\Delta U = U_2 - U_1$, tenemos:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgR(1 - cos\alpha) - mgR(1 - cos\theta)$$

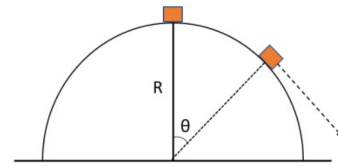
$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgR[1 - cos\alpha - 1 + cos\theta]$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgR[cos\theta - cos\alpha]$$

Sustituyendo los valores proporcionados por el ejercicio tenemos:

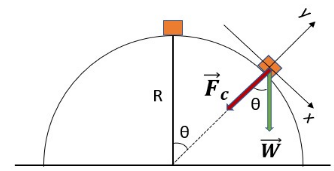
$$\Delta U = (0.010)(9.81)(1)[cos37 - cos53] = 0.0193\ \text{J} = 19.3\ \text{mJ}$$

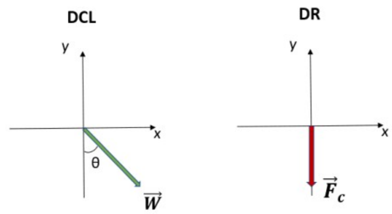
Ejercicio 4. **Un objeto de masa *m* se encuentra sobre un iglú. Si el objeto resbala por la superficie del hielo hasta caer al suelo. Calcula el ángulo θ cuando el objeto deja la superficie del iglú, como se muestra en la figura. Considera que no hay rozamiento entre el objeto y la superficie del iglú.**



Para resolver este problema se debe utilizar los temas de conservación de energía mecánica y dinámica rotacional.

El primer paso a seguir, es escoger como el sistema físico al objeto que se encuentra sobre el iglú. Enseguida debemos hacer un diagrama de cuerpo libre del sistema cuando el objeto deja el iglú (observe la figura). La clave del ejercicio es observar en el diagrama de cuerpo libre, que las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son: el peso y la fuerza centrípeta, ya que el objeto describe una trayectoria circular. En este caso la fuerza normal vale cero, pues estamos tomando en cuenta al objeto cuando se libera de la superficie del iglú.





El siguiente paso por seguir, es hacer la suma de fuerzas en ambas componentes cartesianas, para conocer cuáles son las variables involucradas en el problema.

$$\Sigma F_y = -m|\vec{g}|cos\theta = -m|\vec{a}_c| \quad \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = -m|\vec{g}|sen\theta = m|\vec{a}_t| \quad \dots (2)$$

Se puede sustituir en la ecuación uno, la expresión para calcular la magnitud del vector de aceleración centrípeta en un movimiento circular.

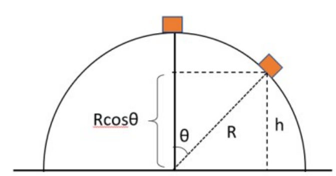
$$\Sigma F_y = -m|\vec{g}|cos\theta = -\frac{m|\vec{V}|^2}{R} \quad \dots (3)$$

Eliminando la masa del objeto así como el signo negativo en la ecuación.

$$|\vec{g}|cos\theta = \frac{|\vec{V}|^2}{R} \quad \dots (4)$$

La ecuación queda en función de la magnitud del vector velocidad tangencial, la magnitud del vector aceleración de la gravedad, el radio de la trayectoria circular que es constante y del ángulo θ que nos interesa conocer. Es decir, tenemos una ecuación con tres incógnitas que no podemos resolver por el momento.

Para minimizar el número de incógnitas en nuestra ecuación vamos a echar mano de la conservación de la energía mecánica. Si aplicamos conservación de energía e igualamos la energía mecánica del bloque en cuanto comienza a deslizarse y cuando el objeto deja la superficie del iglú tenemos:



$$m|\vec{g}|R = m|\vec{g}|h + \frac{m|\vec{V}|^2}{2} \quad \dots (5)$$

Volvemos a notar que la ecuación tres no depende de la masa y además podemos sustituir el valor de h.

$$|\vec{g}|R = |\vec{g}|Rcos\theta + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \quad \dots (6)$$

Despejamos el cuadrado de la magnitud del vector velocidad tangencial de la ecuación 6.

$$2|\vec{g}|R(1 - cos\theta) = |\vec{V}|^2 \quad \dots (7)$$

Sustituyendo la ecuación 7 en la ecuación 4 podemos eliminar el término R y la magnitud de la aceleración de la gravedad, tal que:

$$|\vec{g}|cos\theta = \frac{2|\vec{g}|R(1-cos\theta)}{R} \quad \Rightarrow \quad cos\theta = 2(1-cos\theta)$$

El último paso es despejar el ángulo θ, el cual era el objetivo del problema.

$$cos\theta = 2 - 2cos\theta$$

$$3cos\theta = 2$$

$$cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \quad \theta = 48.19°$$

Ejercicio 5. Un bloque de 3.0 kg es lanzado con rapidez de 3.0 m/s en dirección a un resorte, inicialmente en estado relajado, cuya constante de restitución 5.0 N/m. Si la distancia del punto de lanzamiento al resorte es 2.0 m, determina la máxima compresión que experimenta el resorte por efecto del bloque en el caso de que el resorte sea horizontal y en el caso de que el resorte sea vertical.

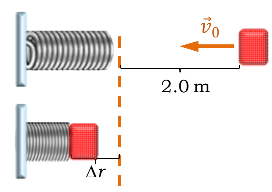
Para resolver el ejercicio es requerido definir que la máxima compresión que experimenta el resorte, por efecto del bloque, sucede cuando el bloque se detiene.

A) Primer caso. (Resorte horizontal)

Considerando el balance de energía: $E_{k_0} + U_{s_0} + U_{g_0} = E_k + U_s + U_g$

Como el movimiento del bloque y la compresión del resorte sucede en la horizontal, podemos asumir que los términos asociado a la energía potencial gravitacional, al inicio y al final, son iguales pues el valor de y y y_0 son los mismos.

En el punto inicial, punto de lanzamiento, el bloque tiene una rapidez inicial así que podemos decir que existe energía cinética inicial. En el punto final, máxima compresión del resorte, la velocidad del bloque es cero. En este punto ya no existe energía cinética pero como ya está comprimido el resorte, entonces, existe energía potencial elástica asociada al sistema resorte-bloque.



De esta forma, el balance de energía es: $E_{k_0} = U_s$

Sustituyendo los términos y despejando $|\Delta\vec{r}|$, tendremos la máxima compresión del resorte por efecto del bloque:

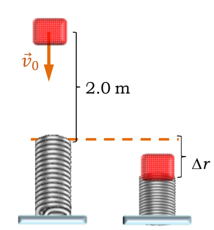
$$E_{k_0} = U_s \quad \ldots \quad \frac{m|\vec{v}_0|^2}{2} = \frac{k|\Delta\vec{r}|^2}{2} \quad \ldots \quad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\frac{m|\vec{v}_0|^2}{k}} = \sqrt{\frac{(3.0)(3.0)^2}{(5.0)}} = 2.32 \text{ m}$$

B) Segundo caso. (Resorte vertical)

Considerando el balance de energía: $E_{k_0} + U_{s_0} + U_{g_0} = E_k + U_s + U_g$

En esta ocasión existe un cambio de posición en la vertical, por lo que debemos de colocar un punto de referencia. Se elegirá y = 0 m en el punto de máxima compresión, por lo tanto Ug = 0 J.

En el punto inicial, punto de lanzamiento, el bloque tiene una rapidez inicial así que podemos decir que existe energía cinética inicial además de una energía potencial gravitacional inicial debido a nuestro punto de referencia. El valor para y_0 corresponde a 2.0 m más lo que se comprima el resorte, $y_0 = 2.0 + |\Delta\vec{r}|$.



En el punto final, máxima compresión, ya no se puede asociar energía cinética pues el bloque está detenido. Ya no se puede establecer la existencia de un término de energía potencial gravitacional porque ahí esta nuestro punto de referencia, y = 0 m. Sólo existirá energía potencial elástica.

De esta forma, el balance de energía es: $E_{k_0} + U_{g_0} = U_s$

Sustituyendo los términos obtendremos una ecuación cuadrática que será resuelta para determinar la máxima compresión del resorte por efecto del bloque.

$$E_{k_0} + U_{g_0} = U_s \quad \ldots \quad \frac{m|\vec{v}_0|^2}{2} + mgy_0 = \frac{k|\Delta\vec{r}|^2}{2} \quad \ldots \quad \frac{(3.0)(3.0)^2}{2} + (3.0)(9.81)(2.0 + |\Delta\vec{r}|) = \frac{(5.0)|\Delta\vec{r}|^2}{2}$$

$$13.5 + 58.86 + 29.43|\Delta\vec{r}| = 2.5|\Delta\vec{r}|^2 \quad \ldots \quad 72.36 + 29.43|\Delta\vec{r}| - 2.5|\Delta\vec{r}|^2 = 0$$

$$|\Delta\vec{r}|_1 = 13.86 \text{ m} \qquad |\Delta\vec{r}|_2 = -2.09 \text{ m}$$

Tomaremos como respuesta el valor positivo debido a que el objeto recorre en la vertical una distancia mayor a dos metros, recuerda que y_0 = 2.0 + $|\Delta\vec{r}|$. Observa que si tomamos como respuesta el valor negativo, el bloque recorrería un valor de –0.9 m, lo cual carece de todo sentido.

Ejercicio 6. Un resorte de constante de fuerza k = 300N/m, se comprime 0.50 m por un bloque de 1.00 kg. Posteriormente, el bloque se suelta y este se mueve por una superficie horizontal sin fricción, hasta llegar y subir por una rampa elevada 40°. Determina, en metros, la altura que alcanza el bloque antes de pararse y regresar por la rampa.

Para calcular la altura máxima alcanzada en la rampa por el bloque, emplearemos el principio de conservación de la energía.

La figura 1 muestra los dos instantes de interés en el problema. Instante 1, cuando el resorte está comprimido y el bloque está a punto de ser empujado a la derecha por el resorte. Instante 2, cuando el bloque se encuentra en la altura máxima de la rampa.

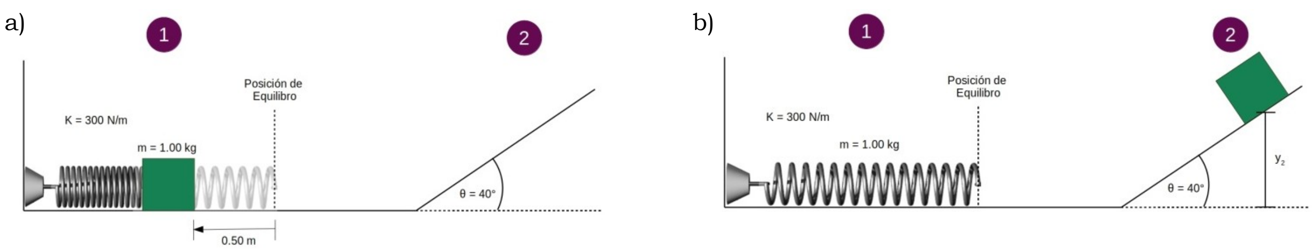


Figura1. Planteamiento del sistema de estudio, a) bloque en el punto inicial antes de dirigirse hacia la rampa, b) bloque en el punto más alto de la rampa.

Análisis de la energía del sistema

Podemos calcular la energía mecánica, E_m del sistema en cada uno de los instantes de interés, considerando el suelo como y_1= 0.0 m. Así, podemos representas U_g como energía potencial gravitacional, U_e como potencial elástica y K como cinética.

a) Instante 1	**b) Instante 2**
$U_{g,1} = mgy_1$	$U_{g,2} = mgy_2$
$U_{e,1} = \frac{1}{2}kx_1^2$	$U_{e,2} = \frac{1}{2}kx_2^2$
$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$	$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$
$E_{m,1} = U_{g,1} + U_{e,1} + K_1$	$E_{m,2} = U_{g,2} + U_{e,2} + K_2$

Posteriormente, analizamos los componentes de energía para cada instante. Instante 1: sabemos que y_1= 0.0 m, entonces U_{g1}= 0.0 J, y el bloque al estar en reposo presenta v_1=0.0 m/s, por tanto K_1=0.0 J. Para el instante 2: el resorte no está ejerciendo fuerza sobre el bloque, entonces U_{e1}= 0.0 J, y se encuentra en un punto de retorno sin rapidez, por lo tanto K_2=0.0 J.

Simplificando obtenemos:

a) Instante 1	**b) Instante 2**
$U_{g,1} = 0$	$U_{g,2} = mgy_2$
$U_{e,1} = \frac{1}{2}kx_1^2$	$U_{e,2} = 0$
$K_1 = 0$	$K_2 = 0$
$E_{m,1} = U_{e,1}$	$E_{m,2} = U_{g,2}$

Principio de conservación de la energía

La energía en el sistema se conserva, por lo tanto podemos enunciar que:

$$E_{m,1} = E_{m,2}$$

Ahora bien, sustituimos las expresiones de energía del análisis anterior y obtenemos el siguiente desarrollo:

$$U_{e,1} = U_{g,2}$$

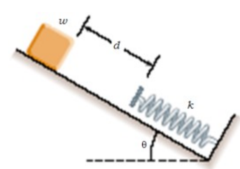
$$\frac{1}{2}kx_1^2 = mgy_2$$

Para obtener la altura y_2 despejamos la última expresión, obteniendo

$$y_2 = \frac{kx_1^2}{2mg}$$

Resolviendo numéricamente:

$$y_2 = \frac{(300\,N/m)(0.5m)^2}{2(1.00kg)(9.81\,m/s^2)} = 3.82\,m$$



Ejercicio 7. Un objeto de peso 30 lb$_{fuerza}$, se lanza por un plano inclinado θ = 30˚ con una rapidez inicial de 10 ft/s. A 12.5 ft de distancia del punto de lanzamiento existe un resorte que sufrirá una deformación máxima de 0.5 ft por efecto del bloque. Sabiendo que el coeficiente de fricción cinética entre el objeto y la superficie es μ_k = 0.20 determina:

- **a) ¿Cuál es el valor de la rapidez del cuerpo un instante antes de chocar con el resorte?**
- **b) ¿Cuál debe ser el valor de la constante k del resorte?**

a) La resolución del ejercicio requiere de un balance de energía entre dos puntos. El primero de ellos será el instante en el que el objeto fue lanzado en dirección al resorte mientras que el segundo punto será justo antes de tocar al resorte, es decir, una vez que el objeto ha recorrido los 12.5 ft de distancia sobre la superficie del plano inclinado.

Si analizamos las energías y los trabajos implicados en este proceso, podemos establecer que en el punto inicial y final habrá energía cinética, Ec_A y Ec_B, respectivamente, además del trabajo asociado con el peso del objeto y la fuerza de fricción, tal que:

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = W_{|\vec{w}|} + W_{|\vec{f}|} \qquad \ldots (1)$$

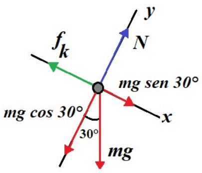
Si recurrimos al cambio del trabajo asociado con el peso por el menos cambio en la energía potencial gravitacional:

$$W_{|\vec{w}|} = -\Delta U_g = -[U_{g_B} - U_{g_A}] \qquad \ldots (2)$$

Y sustituimos la ecuación 2 en la ecuación 1, tenemos:

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = -[U_{g_B} - U_{g_A}] + W_{|\vec{f}|} \qquad \ldots (3)$$

Para determinar el trabajo de la fuerza de fricción, es necesario recurrir al diagrama de cuerpo libre para determinar la magnitud de esta fuerza.



$$\Sigma F_y = N - wcos30 = 0 \qquad \ldots (4)$$

$$\Sigma F_x = wsen\theta - f_k = ma \qquad \ldots (5)$$

Recurriendo a que la magnitud de la fuerza de fricción se obtiene de multiplicar la magnitud de la fuerza normal por el coeficiente de fricción, tenemos:

$$|\vec{f}| = \mu_k N = \mu_k wcos30$$

Dado que la fuerza de fricción es constante, entonces podemos establecer que el trabajo de esta es:

$$W_{|\vec{f}|} = |\vec{f}|dcos\alpha \quad \Rightarrow \quad W_{|\vec{f}|} = (\mu_k wcos30)dcos\alpha \qquad \ldots (6)$$

En donde α representa el ángulo que forma la fuerza de fricción y el desplazamiento del objeto, d, que en esta situación es de 180.0°, tal que:

$$W_{|\vec{f}|} = (\mu_k wcos30)dcos180.0 \quad \Rightarrow \quad W_{|\vec{f}|} = -(\mu_k wcos30)d \qquad \ldots (7)$$

Sustituyendo la ecuación 7 en la ecuación 3 tenemos:

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = -[U_{g_B} - U_{g_A}] - (\mu_k wcos30)d \qquad \ldots (8)$$

Cambiando los términos de energía cinética y energía potencial gravitacional:

$$\frac{wv_B^2}{2g} - \frac{wv_A^2}{2g} = -wy_B + wy_A - (\mu_k wcos30)d \qquad \ldots (9)$$

Eliminando el peso en la ecuación 9:

$$\frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g} = -y_B + y_A - (\mu_k cos30)d \qquad \ldots (10)$$

El término $-y_B + y_A$ representa el cambio en la altura del objeto cuando el objeto se desliza por el plano inclinado, el cual puede analizarse como el cateto opuesto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es d, tal que:

$$\frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g} = dsen30 - (\mu_k cos30)d \qquad \ldots (11)$$

Si despejamos de la ecuación 11 el término v_B y sustituimos los valores correspondientes en la ecuación resultante, tendremos la rapidez del bloque un instante antes de chocar con el resorte.

$$v_B = \sqrt{2gd[sen30 - (\mu_k cos30)] + v_A^2}$$

$$v_B = \sqrt{2(32.2ft/s^2)(12.5ft)[sen30 - (0.20)(cos30)] + (10ft/s)^2}$$

$$v_B = 19.1\ ft/s$$

b) Para conocer el valor de la constante k del resorte, retomaremos la ecuación 1 e incluiremos un término del trabajo que realiza el resorte, W_e, para detener el bloque que está en movimiento, pero ahora el punto A será en el instante en el que se comienza a comprimir el resorte y el punto B estará referido en la máxima compresión.

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = W_{|\vec{w}|} + W_{|\vec{f}|} + W_e \qquad \dots (12)$$

Conservamos el trabajo del peso y de la fuerza de fricción porque estas fuerzas siguen actuando sobre el bloque.

Si sustituimos las expresiones encontradas en la ecuación 2 y 7 en la ecuación 12, tenemos:

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = -[U_{g_B} - U_{g_A}] - (\mu_k w cos30)d + W_e \qquad \dots (13)$$

Dado que el trabajo asociado con la fuerza ejercida por el resorte puede verse como:

$$W_e = -\Delta U_e = -\frac{k\Delta x^2}{2}$$

En donde el término Δx representa la compresión que experimentará el resorte por efecto del bloque.

Ahora podemos cambiar el término de trabajo asociado con la fuerza del resorte de la ecuación 13:

$$\mathrm{Ec_B} - \mathrm{Ec_A} = -[U_{g_B} - U_{g_A}] - (\mu_k w cos30)d - \frac{k\Delta x^2}{2} \qquad \dots (14)$$

Cambiando los términos de energía cinética y energía potencial gravitacional, tenemos:

$$\frac{wv_B^2}{2g} - \frac{wv_A^2}{2g} = -wy_B + wy_A - (\mu_k w cos30)d - \frac{k\Delta x^2}{2} \qquad \dots (15)$$

Si consideramos que la máxima compresión del resorte sucede cuando el bloque se detiene, entonces la v_B será igual a cero.

$$-\frac{wv_A^2}{2g} = -wy_B + wy_A - (\mu_k w cos30)d - \frac{k\Delta x^2}{2} \qquad \dots (16)$$

En la ecuación 16 podemos asumir que el término $-y_B + y_A$, que representa el cambio en la altura del objeto cuando se da la compresión del resorte (Δx), es el cateto opuesto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es Δx. Además, el desplazamiento asociado al trabajo de la fuerza de fricción, d, coincide con la longitud de compresión del resorte, tal que:

$$-\frac{wv_A^2}{2g} = w(\Delta x sen30) - (\mu_k w cos30)\Delta x - \frac{k\Delta x^2}{2} \qquad \dots (17)$$

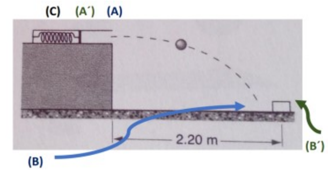
Si despejamos de la ecuación 17 el término k y sustituimos los valores correspondientes en la ecuación resultante, tendremos el valor de la constante del resorte.

$$k = \frac{2}{\Delta x^2}\left[\frac{wv_A^2}{2g} + w(\Delta x sen30) - (\mu_k w cos30)\Delta x\right]$$

$$k = \frac{2}{(0.5ft)^2}\left[\frac{(30lb_{fuerza})(19.1ft/s)^2}{2(32.2\ ft/s^2)} + (30lb_{fuerza})(0.5ft)(sen30) - (0.20)(30lb_{fuerza})(cos30)(0.5ft)\right]$$

$$k = 1398.75\ \frac{lb_{fuerza}}{ft}$$

Ejercicio 8. Un niño y una niña participan en un juego en que tratan de "encestar" en una pequeña caja colocada en el piso, una canica de masa m = 100 g, lanzada desde un juguete que se carga con un resorte de constante k = 15 N/cm y que está montado sobre un gran bloque (ver Figura).



La caja está a 2.20 m horizontalmente desde el borde del bloque. En su turno, el niño comprime el resorte 1.10 cm, pero la canica cae 27.0 cm antes del blanco [ver punto (B) en la Figura]. ¿Cuánto debe comprimir la niña el resorte, para dar en el blanco [punto B´]?

El ejercicio propone encontrar la magnitud adecuada del desplazamiento del resorte (compresión del resorte), para que la canica alcance una velocidad inicial de lanzamiento horizontal tal que, le permita describir una trayectoria parabólica que finalice adentro de la caja.

En la presente propuesta de resolución, que desde luego no es la única forma de abordar este problema, se hará uso de la ecuación (i) conocida como el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, en combinación con las ecuaciones de cinemática que describen el tiro parabólico (ecuaciones ii , iii y iv).

ECUACIONES EMPLEADAS EN ESTA RESOLUCIÓN:

Principio de Conservación de la Energía Mecánica:

$$K_f + U_{sf} + U_{gf} = K_i + U_{si} + U_{gi} \qquad \dots \quad (i)$$

Las formas de energía mecánica se evalúan para un estado final f y uno inicial i

donde

la energía cinética: $K = \frac{1}{2}mv^2$

la energía potencial del resorte: $U_s = \frac{1}{2}kx^2$

la energía potencial gravitacional: $U_g = mgy$.

Empleando un sistema coordenado cartesiano con el eje cartesiano x horizontal y creciente a la derecha mientras que el eje cartesiano y es vertical y creciente hacia arriba, las ecuaciones del movimiento proyectil serán:

$$x_f - x_i = \Delta \mathrm{x} = v_{ix}\, t \qquad \dots (ii)$$

$$y_f - y_i = \Delta \mathrm{y} = v_{iy}\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \dots (iii)$$

$$v_{fy} = v_{iy} - gt \qquad \dots (iv)$$

En la Figura 1, se han señalado los puntos (A) y (A´) para las posiciones de compresión del resorte que logran el niño y la niña, respectivamente. Así mismo, se incluyen los puntos (B) y (B´), para el alcance del tiro parabólico logrado por el niño y por la niña, también respectivamente.

Intuitivamente podemos pensar qué, si la niña comprime más el resorte, habrá almacenado mayor energía potencial, lo que dará como resultado una mayor velocidad inicial de lanzamiento y por lo tanto un mayor alcance horizontal. Esta hipótesis la comprobaremos al resolver el problema.

Iniciaremos con el análisis de Conservación de Energía Mecánica entre el punto (C) donde el resorte se encuentra comprimido y el punto (A) de lanzamiento de la canica (donde el resorte vuelve a su estado relajado).

$$K_C + U_{sC} + U_{gC} = K_A + U_{sA} + U_{gA} \qquad \dots (1)$$

Note que cuando el resorte se comprime, la energía cinética de la canica es nula $K_C = \frac{1}{2}mv^2 = 0$; una vez que el resorte se relaja, la energía potencial es nula $U_{sA} = \frac{1}{2}kx^2 = 0$, y las energías potenciales gravitacionales inicial y final son iguales, $U_{gC} = U_{gA}$. La expresión resultante queda:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \ldots (2)$$

La cual se puede resolver para la velocidad inicial de lanzamiento que logra el niño en su intento,

$$v_A = \sqrt{\frac{k}{m}}\ x = \sqrt{\frac{15\frac{kg\ m}{s^2 cm}\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right)}{100x10^{-3}kg}}(1.10x10^{-2}m) = 1.347\ \frac{m}{s} \qquad \ldots (3)$$

Aunque pudiéramos continuar el análisis con el Principio de Conservación de Energía Mecánica, optaremos por hacer un repaso de tiro parabólico. El que logra el niño con la canica, que va del punto inicial (A) hasta el punto final (B) tiene un alcance horizontal (2.20 – 0.27) m = 1.93 m

Es de notar que ambos tiros parabólicos, el del niño y el de la niña, parten de la misma altura, por lo que $y_A = y_{A'}$. Las ecuaciones de tiro parabólico nos permitirán conocer el tiempo de vuelo y la altura del bloque, y_A. Recuerde que la velocidad inicial v_A sólo es horizontal.

$$x_B - x_A = \Delta x = v_A\, t \qquad \ldots (4)$$

$$t = \frac{(2.20 - 0.27)\ m}{1.347\ \frac{m}{s}} = 1.433\ s \qquad \ldots (5)$$

$$y_B - y_A = \Delta y = v_{iy}\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots (6)$$

$$y_A = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.81\ \frac{m}{s^2})(1.433\ s)^2 = 10.07\ m \qquad \ldots (7)$$

¡Vaya altura a la que están jugando estos niños! Como ambos tiros parabólicos parte de la misma altura, y están sujetos a la misma aceleración de la gravedad g (ver ecuación *iv*), tienen por lo tanto el mismo tiempo de vuelo. Por lo tanto:

$$x_{B'} - x_{A'} = \Delta x' = v_{A'}\, t \qquad \ldots (8)$$

$$v_{A'} = v_{Bx'} = \frac{2.20\ m}{1.433\ s} = 1.535\ \frac{m}{s} \qquad \ldots (9)$$

Un procedimiento de análisis de Conservación de Energía Mecánica (similar al de las ecuaciones 1 y 2) para la compresión del resorte que hace la niña, nos conduce a:

$$K_C + U_{sC} + U_{gC} = K_{A'} + U_{sA'} + U_{gA'} \qquad \ldots (10)$$

Y a la ecuación donde está el desplazamiento adecuado para comprimir el resorte

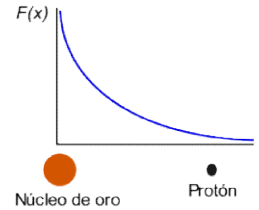
$$\frac{1}{2}mv_{A'}^2 = \frac{1}{2}kx'^2 \qquad \ldots (11)$$

Resolviendo para esta incógnita

$$\boldsymbol{x'} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_{A'} = \sqrt{\frac{100x10^{-3}kg}{15\frac{kg\ m}{s^2 cm}\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right)}}\left(1.535\frac{m}{s}\right) = 0.0125\ m = 1.25\ cm \qquad \ldots (12)$$

Con esta respuesta corroboramos nuestra hipótesis inicial: la niña debe llevar a cabo una mayor compresión del resorte para "encestar" a la caja que se encuentra a una distancia horizontal de 2.20 m del punto de lanzamiento.

Ejercicio 9. Un protón con masa de 1.67×10^{-27} kg es impulsado inicialmente a 3×10^{5} m/s hacia un núcleo de oro que está a 1 m de distancia. En concordancia con la ley de Coulomb, el protón es repelido por el núcleo con una fuerza de magnitud:



$$F(x) = c/x^2$$

donde x es la distancia del núcleo de oro al protón y c = 1.82×10^{-26} N m². Calcula:

a) La energía potencial, E_p, del protón cuando está a 5 nm de distancia. Considera que $E_p \to 0$ cuando $x \to \infty$.

b) La rapidez que tiene el protón cuando está a 8Å del núcleo.

c) La distancia mínima de aproximación del protón al núcleo.

a) La fuerza es conservativa y se relaciona con la energía potencial mediante:

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \ldots (1)$$

Entonces

$$E_p(x) = -\int F(x)dx = \int \frac{c}{x^2}dx = -c\frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{c}{x} + k$$

donde k es la constante de integración. Ésta se obtiene tomando en cuenta el valor de la energía potencial cuando x tiende a infinito, a distancias grandes:

$$lim_{x\to\infty}E_p(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{c}{x} + k\right] = 0$$

por lo que c = 0. Para cualquier valor de x, la energía potencial del protón es:

$$E_p(x) = \frac{c}{x} \qquad \ldots (2)$$

Cuando x = 0 5 nm = $5x10^{-9}$ m:

$$E_p(5x10^{-9}\text{m}) = \frac{1.82x10^{-26}\,\text{Nm}^2}{5x10^{-9}\,\text{m}} = 3.64x10^{-18}\text{J}$$

(b) Por el teorema del trabajo y la energía, el trabajo W se relaciona con los cambios de energía cinética entre los estados inicial (i) y final(f) mediante:

$$\text{W} = \Delta E_c = E_{c,f} - \text{E}_{\text{c,i}} = \frac{1}{2}\text{mv}_\text{f}^2 - \frac{1}{2}\text{mv}_i^2 \qquad \ldots (3)$$

Es decir:

$$W = \int_{1\text{m}}^{8x10^{-10}\text{m}} F(x)dx = \frac{1}{2}\text{mv}_\text{f}^2 - \frac{1}{2}\text{mv}_i^2$$

donde la rapidez inicial es $3x10^5$ m.

$$\int_{1\text{m}}^{8x10^{-10}\text{m}} F(x)dx = \frac{c}{8x10^{-10}\text{m}} - \frac{c}{1\text{ m}} = -2.28x10^{-17}\text{ J} \qquad \ldots (4)$$

Por lo tanto:

$$-2.28x10^{-17}\text{J} = \frac{1}{2}(1.67x10^{-27}\,kg)\left[v_f^2 - (3x10^5\text{m/s})^2\right]$$

de donde

$$v_f = 250508\,\text{m/s}$$

Nota: Dado que la fuerza es conservativa, también se cumple que el trabajo es igual a menos el cambio de la energía potencial:

$$W = -\Delta E_p \qquad \ldots (5)$$

por lo que, de (3) y (5), se llega a:

$$-\Delta E_p = \Delta E_c \qquad \ldots (6)$$

Al calcular $-\Delta E_p$ con la ecuación (2) se obtiene nuevamente (4) y al sustituir en (6) se obtiene el mismo valor que antes, $v_f = 250508\,\mathrm{m/s}$.

(c) Este problema se puede resolver tomando en cuenta que la energía mecánica es constante durante el proceso cuando las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas. A partir de (6):

$$-E_{p,f} + E_{p,i} = E_{c,f} - Ec,i$$

$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,i}$$

La energía mecánica se define como la suma de la energía cinética más la energía potencial, $E = E_c + E_p$, y se conserva pues

$$E_i = E_f \qquad \ldots (7)$$

Cuando $x = 1$ m y usando (2):

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + E_p(1\mathrm{m}) = 7.52x10^{-1}\ \mathrm{J}$$

Cuando $x = x_{min}$, el valor mínimo de la posición, la velocidad vale cero pues allí cambia de signo porque el protón se regresa y empieza a alejarse del núcleo, y $v_{min} = 0$ m/s:

$$E_f = \underbrace{E_{c,f}}_{0} + E_p(x_{min}) = \frac{c}{x_{min}}$$

Al sustituir E_i y E_f en (7) y despejar x_{min}, se obtiene:

$$x_{min} = 2.42\ \text{Å}$$

Ejercicio 10. Una partícula está sujeta a la fuerza $\vec{F} = (x^2 - y^2, 4xy)$ donde la posición x, y está en metros y la fuerza está en newton.

a) Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, cuando ésta se mueve del punto (0, 1) m al punto (3, 4) m siguiendo alguna de las siguientes trayectorias:

Trayectoria 1) Se mueve paralela al eje y, del punto (0,1) m al punto (0,4) m, y posteriormente se mueve paralela al eje x, del punto (0,4) m al punto (3,4) m.

Trayectoria 2) Se mueve paralela al eje x, del punto (0,1) m al punto (3,1) m, y posteriormente se mueve paralela al eje y, del punto (3,1) m al punto (3, 4) m.

b) Con base en esta información, indique si la fuerza es no conservativa.

a) Puede ser muy útil graficar las trayectorias como apoyo para hacer la parametrización. Ambas trayectorias se muestran a continuación:

La trayectoria 1 se separa en dos segmentos para su estudio: el primer tramo, que es una trayectoria vertical, y el segundo tramo, que es una trayectoria horizontal.

La parametrización del primer tramo de la trayectoria es:

(x, y) m = (0, s) m donde el parámetro s va de s = 1 m a s = 4 m.

La parametrización del segundo tramo de la trayectoria es:

(x, y) m = (s, 4) m donde el parámetro s va de s = 0 m a s = 3 m.

El trabajo del primer tramo resulta:

$$W_{tramo1} = \int_{S=1}^{S=4} (x^2 - y^2, 4xy) \cdot d\vec{r} = \int_{S=1}^{S=4} \big((0)^2 - (s)^2, 4(0)(s)\big) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$W_{tram} \quad = \int_{S=1}^{S=4} (-s^2, 0) \cdot \left(\frac{d}{ds}0, \frac{d}{ds}s\right) ds = \int_{S=1}^{S=4} (-s^2, 0) \cdot (0,1) ds$$

$$W_{tramo1} = \int_{S=1}^{S=4} \big((-s^2)(0) + (0)(1)\big)\, ds = \int_{S=1}^{S=4} 0\, ds = 0 \text{ J}$$

Mientras que el trabajo del segundo tramo da como resultado lo siguiente:

$$W_{tra} \quad = \int_{S=0}^{S=3} (x^2 - y^2, 4xy) \cdot d\vec{r} = \int_{S=0}^{S=3} \big((s)^2 - (4)^2, 4(s)(4)\big) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$W_{tramo2} = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 16, 16s) \cdot \left(\frac{d}{ds}s, \frac{d}{ds}4\right) ds = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 16, 16s) \cdot (1,0) ds$$

$$W_{tramo2} = \int_{S=0}^{S=3} \big((s^2 - 16)(1) + (16s)(0)\big)\, ds = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 16)\, ds = \left(\frac{s^3}{3} - 16s\right)\Bigg|_{s=0}^{s=3} = -39 \text{ J}$$

Y el trabajo que ejerce esta fuerza sobre la partícula en la trayectoria global, está dado por

$$W_{global,trayectoria1} = W_{tram} \quad + W_{tr} \quad = 0 + (-39 \text{ J}) = -39 \text{ J}$$

De una manera análoga, la trayectoria 2 se separa en dos segmentos para su estudio: el primer tramo, que es una trayectoria horizontal, y el segundo tramo, que es una trayectoria vertical.

La parametrización del primer tramo de la trayectoria es:

(x, y) m = (s, 1) m donde el parámetro s va de s = 0 m a s = 3 m.

La parametrización del segundo tramo de la trayectoria es:

(x, y) m = (3, s) m donde el parámetro s va de s = 1 m a s = 4 m.

El trabajo del primer segmento resulta:

$$W_{tramo1} = \int_{S=0}^{S=3} (x^2 - y^2, 4xy) \cdot d\vec{r} = \int_{S=0}^{S=3} \big((s)^2 - (1)^2, 4(s)(1)\big) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$W_{tram} \quad = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 1, 4s) \cdot \left(\frac{d}{ds}s, \frac{d}{ds}1\right) ds = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 1, 4s) \cdot (1,0) ds$$

$$W_{tr} \quad = \int_{S=0}^{S=3} \big((s^2 - 1)(1) + (4s)(0)\big)\, ds = \int_{S=0}^{S=3} (s^2 - 1)\, ds = \left(\frac{s^3}{3} - s\right)\Bigg|_{s=0}^{s=3} = 6 \text{ J}$$

Mientras que el trabajo del segundo segmento da como resultado lo siguiente:

$$W_{tramo2} = \int_{S=1}^{S=4} (x^2 - y^2, 4xy) \cdot d\vec{r} = \int_{S=1}^{S=4} \big((3)^2 - (s)^2, 4(3)(s)\big) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$W_{tram} \quad = \int_{S=1}^{S=4} (9 - s^2, 12s) \cdot \left(\frac{d}{ds}3, \frac{d}{ds}s\right) ds = \int_{S=1}^{S=4} (9 - s^2, 12s) \cdot (0,1) ds$$

$$W_{tram} \quad = \int_{S=1}^{S=4} \big((9 - s^2)(0) + (12s)(1)\big)\, ds = \int_{S=1}^{S=4} 12s\, ds = 6s^2|_{S=1}^{S=4} = 90\ \mathrm{J}$$

Y el trabajo que ejerce esta fuerza sobre la partícula en la trayectoria global, está dado por

$$W_{global,trayectori} \quad = W_{tramo1} + W_{tram} \quad = 6\ \mathrm{J} + 90\ \mathrm{J} = 96\ \mathrm{J}$$

b) Al comparar ambos resultados, se aprecia que arrojan resultados distintos. Esto significa que el trabajo realizado depende de la trayectoria elegida, y no únicamente de los puntos inicial y final. Esta es la propiedad de una fuerza no conservativa.

Nótese que, si el trabajo en ambas trayectorias hubiera arrojado el mismo resultado, entonces no podríamos afirmar nada acerca del carácter conservativo de la fuerza. Tendríamos que demostrar que da el mismo resultado para cualquier par de trayectorias, no solamente para las dos que ejemplificamos.