UNIDAD 8. COLISIONES

Ejercicio 1. Un núcleo de torio 227 en reposo se desintegra en un núcleo de radio 223 (masa 223 u) por emisión de una partícula α (masa 4 u). Sabiendo que la energía cinética de la partícula α es de 6.00 MeV, calcule la energía cinética (en MeV) del núcleo de radio en retroceso.

En este caso como el núcleo de torio está en reposo antes de la desintegración, el ímpetu lineal total es cero. Se puede relacionar la velocidad del núcleo de radio con la velocidad de la partícula alfa a partir del principio de conservación del ímpetu lineal. Para este fin, supóngase que en el instante de la desintegración la partícula alfa se mueve en la dirección $+\hat{\imath}$; mientras que el núcleo de radio lo hace en la dirección $-\hat{\imath}$. La energía cinética correspondiente a cada fragmento de la desintegración es:

$$K_{\mathrm{Ra}} = \tfrac{1}{2} m_{\mathrm{Ra}} v_{\mathrm{Ra}}^2 \qquad\qquad K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

De estas expresiones, se despeja la rapidez de cada fragmento:

$$v_{\mathrm{Ra}} = \left(\frac{2K_{\mathrm{Ra}}}{m_{\mathrm{Ra}}}\right)^{1/2} \qquad v_\alpha = \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} \qquad \ldots (1)$$

Por otra parte, al aplicar el principio de conservación del ímpetu lineal bajo las condiciones descritas, se obtiene:

$$m_\alpha v_\alpha \hat{\imath} - m_{\mathrm{Ra}} v_{\mathrm{Ra}} \hat{\imath} = \vec{0}$$

Puesto que en este caso la desintegración es unidimensional, la ecuación previa puede reescribirse como:

$$m_\alpha v_\alpha = m_{\mathrm{Ra}} v_{\mathrm{Ra}} \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo las expresiones (1) en la ecuación (2), resulta:

$$m_\alpha \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} = m_{\mathrm{Ra}} \left(\frac{2K_{\mathrm{Ra}}}{m_{\mathrm{Ra}}}\right)^{1/2}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de esta ecuación y despejando la energía cinética del núcleo de radio, se obtiene finalmente:

$$K_{\mathrm{Ra}} = \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}} K_\alpha = \frac{4.00\ \mathrm{u}}{223\ \mathrm{u}} (6.00\ \mathrm{MeV}) = 0.108\ \mathrm{MeV}.$$

Ejercicio 2. Dos objetos con masa de 500.0 y 800.0 kg colisionan frontalmente con rapidez de 20.0 m/s y 10.0 m/s, respectivamente. Determine la rapidez en cada objeto si la colisión es elástica; es decir, si los objetos rebotan después de chocar.

Para resolver el ejercicio, es requerido un espacio euclidiano debido a que usaremos el vector cantidad de movimiento lineal. El espacio euclidiano será unidimensional y creciente a la derecha.

Con el espacio euclidiano que hemos elegido ahora podemos resolver el ejercicio planteando el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal para la componente cartesiana x.

$$\Sigma \vec{p}_0 = \Sigma \vec{p} \qquad \ldots \qquad \Sigma p_{x_0} = \Sigma p_x$$

Desarrollando cada elemento de la ecuación tenemos:

$$\Sigma p_{x_0} = \Sigma p_x \quad \ldots \quad p_{x0_1} + p_{x0_2} = p_{x_1} + p_{x_2} \quad \ldots \quad m_1 v_{xo_1} + m_2 v_{xo_2} = m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2}$$

$$(500.0)(20.0) + (800.0)(-10.0) = 500.0 v_{x_1} + 800.0 v_{x_2} \qquad \ldots (1)$$

Observa que la componente cartesiana x del vector velocidad para el segundo objeto se colocó negativa debido a que el objeto se mueve a la izquierda.

Debido a que en la ecuación 1 tenemos dos incógnitas, requerimos de una segunda ecuación que nos permita resolver el sistema de ecuaciones simultáneas. Con este fin, recurriremos a la conservación de la energía cinética.

$$\Sigma E_{k_0} = \Sigma E_k \quad \ldots \quad E_{k_{01}} + E_{k_{02}} = E_{k_1} + E_{k_2} \quad \ldots \quad m_1 \frac{|\vec{v}_{o1}|^2}{2} + m_2 \frac{|\vec{v}_{o2}|^2}{2} = m_1 \frac{|\vec{v}_1|^2}{2} + m_2 \frac{|\vec{v}_2|^2}{2}$$

$$(500.0)\frac{(20.0)^2}{2} + (800.0)\frac{(10.0)^2}{2} = 500.0\frac{|\vec{v}_1|^2}{2} + 800.0\frac{|\vec{v}_2|^2}{2} \qquad \ldots (2)$$

Pese a que en la ecuación 2 aparecen las rapideces de los objetos después de la colisión, estos valores corresponden con las componentes cartesianas x del vector velocidad de cada objeto después de la colisión expresadas en la ecuación 1, por lo que ahora tenemos dos ecuaciones con las mismas incógnitas.

Para resolver el sistema de ecuaciones, despejaremos de la ecuación 1 la componente cartesiana x del vector velocidad para el objeto 1.

$$(500.0)(20.0) + (800.0)(-10.0) = 500.0v_{x_1} + 800.0v_{x_2}$$

$$2000.0 = 500.0v_{x_1} + 800.0v_{x_2}$$

$$\frac{2000.0 - 800.0v_{x_2}}{500.0} = v_{x_1} \quad \ldots \quad v_{x_1} = 4.0 - 1.6v_{x_2}$$

Antes de sustituir esta ecuación en le ecuación 2, reduzcamos un poco la ecuación 2.

$$(500.0)\frac{(20.0)^2}{2} + (800.0)\frac{(10.0)^2}{2} = 500.0\frac{(v_{x_1})^2}{2} + 800.0\frac{(v_{x_2})^2}{2}$$

$$140000.0 = 250.0(v_{x_1})^2 + 400.0(v_{x_2})^2$$

$$560.0 = (v_{x_1})^2 + 1.6(v_{x_2})^2$$

Ahora podemos sustituir.

$$560.0 = (v_{x_1})^2 + 1.6(v_{x_2})^2$$

$$560.0 = (4.0 - 1.6v_{x_2})^2 + 1.6(v_{x_2})^2$$

Desarrollando el binomio y acomodando los términos:

$$560.0 = (4.0 - 1.6v_{x_2})^2 + 1.6(v_{x_2})^2$$

$$560.0 = 16.0 - 12.8v_{x_2} + 2.56(v_{x_2})^2 + 1.6(v_{x_2})^2$$

$$0 = -544.0 - 12.8v_{x_2} + 4.16(v_{x_2})^2$$

Al resolver la ecuación cuadrática obtenemos dos soluciones que son:

$$v_{x_2} = -10.0\ \text{m/s} \qquad\qquad v_{x_2} = 13.1\ \text{m/s}$$

Observa que la primera solución corresponde con la componente cartesiana x del vector velocidad para el objeto dos justo antes de la colisión, por lo que nos quedaremos con la segunda solución como la respuesta adecuada. Además, esta segunda solución tiene sentido físico debido a que el objeto dos, antes de la colisión, se mueve a la izquierda (velocidad negativa) pero después de colisionar (rebotar) se moverá hacia la derecha (velocidad positiva).

Sustituyendo el valor de la velocidad del objeto dos en la ecuación del principio de conservación de la cantidad de movimiento, tendremos:

$$v_{x_1} = 4.0 - 1.6v_{x_2} \quad \ldots \quad v_{x_1} = 4.0 - 1.6(13.1) \quad \ldots \quad v_{x_1} = -17.0\ \mathrm{m/s}$$

Por lo que podemos concluir que después de la colisión el objeto uno se mueve con rapidez de 17.0 m/s hacia la izquierda mientras que el objeto dos se mueve con rapidez de 13.1 m/s hacia la derecha.

Ejercicio 3. En un entrenamiento de hockey, un disco cuya masa es 0.17 kg, se mueve en línea recta a rapidez constante de 15 m/s. Durante su trayectoria, otro disco de entrenamiento con el doble de masa se dirige colinealmente hacia el primer disco con una rapidez constante de 40 m/s y en el sentido opuesto. Determine los vectores de velocidad de los dos discos después de la colisión, asumiendo que es totalmente elástica.

El movimiento de los discos se ilustra en la Figura 1, asumimos el eje en donde se mueven los discos como el eje x, siendo así un problema unidimensional.

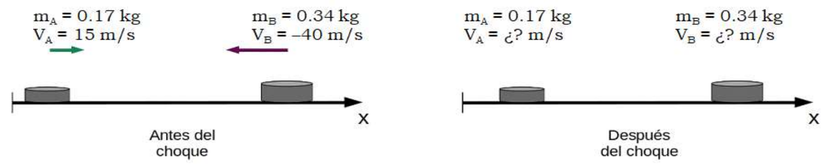


Figura 1. Momentos antes y después del choque de los discos

Con el marco de referencia elegido, el disco pequeño A se mueve hacia la derecha, mientras que el disco grande B hacia la izquierda. Para obtener las velocidades finales utilizaremos el principio de conservación del momento lineal:

$$\vec{p}_{A_1} + \vec{p}_{B_1} = \vec{p}_{A_2} + \vec{p}_{B_2} \qquad \ldots (1)$$

Descomponiendo la ecuación 1 en sus componentes en x, y recordando $\vec{p} = m\vec{v}$, obtenemos

$$m_A v_{A_{1x}} + m_B v_{B_{1x}} = m_A v_{A_{2x}} + m_B v_{B_{2x}} \qquad \ldots (2)$$

Simplificamos la ecuación (2) mediante la relación $2m_A = m_B$, dado que el problema enuncia que el disco B tiene el doble de masa que A. Así, es posible despejar un término que sólo dependa de las componentes en x de las velocidades después del choque.

Sustituir $2m_A = m_B$:

$$m_A v_{A_{1x}} + m_B v_{B_{1x}} = m_A v_{A_{2x}} + 2m_A v_{B_{2x}}$$

Despejar $v_{A_{2x}} + 2v_{B_{2x}}$:

$$v_{A_{2x}} + 2v_{B_{2x}} = \frac{m_A v_{A_{1x}} + m_B v_{B_{1x}}}{m_A}$$

Resolvemos numéricamente

$$v_{A_{2x}} + 2v_{B_{2x}} = \frac{(0.17\ kg)(15\ m/s) + (0.34\ kg)(-40\ m/s)}{0.17\ kg}$$

$$v_{A_{2x}} + 2v_{B_{2x}} = -65\ m/s \qquad \ldots (3)$$

Ahora, necesitamos otra ecuación para poder obtener las componentes de la ecuación (3). Para ello utilizamos la relación:

$$v_{B_{2x}} - v_{A_{2x}} = -\left(v_{B_{1x}} - v_{A_{1x}}\right) \qquad \ldots (4)$$

La cual se utiliza para igualar las rapideces relativas de dos objetos entre sí, ya que en un choque rectilíneo elástico de dos cuerpos, las velocidades relativas antes y después del choque tienen la misma magnitud pero signo opuesto.
Resolvemos numéricamente la ecuación (4)

$$v_{B_{2x}} - v_{A_{2x}} = -\left((-40\ m/s) - (15\ m/s)\right)$$

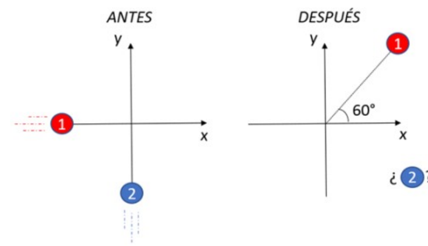
$$v_{B_{2x}} - v_{A_{2x}} = 55\ m/s \qquad \dots (5)$$

Por último, para obtener las componentes después del choque, resolvemos el sistema de ecuaciones (3)-(5) utilizando el método de suma y resta, para obtener:

$$v_{A_{2x}} = -58.33\ m/s \qquad v_{B_{2x}} = -3.33\ m/s$$

Los dos discos se moverán hacia la izquierda, y el disco ligero A aumentará su rapidez, mientras que el B la disminuirá.

Ejercicio 4. Un disco de goma se desliza sin fricción en dirección del eje x positivo (eje de las abscisas) con una rapidez de 2.48 m/s y choca con otro disco que tiene una masa de 1.5 veces la masa del primero; y que se mueve en dirección del eje y positivo (eje de las ordenadas) con una rapidez de 1.86 m/s. Si después de la colisión el primer disco se mueve con una rapidez de 1.59 m/s con una dirección de 60° con respecto al eje x positivo. Calcule la rapidez y la dirección del segundo.



Para resolver este problema debemos recordar el principio de conservación del ímpetu, es decir, que antes y después de la colisión el ímpetu se debe conservar. Por lo que se procede a igualar el ímpetu antes y después de la colisión, pero componente a componente (como en Dinámica cuando se suman fuerzas componente a componente), ya que el ímpetu es un vector

$$\Sigma p_x: m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-inicial}| + m_{Disc}\ |\vec{v}_{Disco2-inic}\ | = m_{Disc}\ |\vec{v}_{Disco1-fin}\ |cos\theta_1 + m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-fin}\ |cos\theta_2$$

$$\Sigma p_y: m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-ini}\ | + m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-inicial}| = m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-fin}\ |sen\theta_1 + m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-fina}\ |sen\theta_2$$

Recordemos que el disco 1 no tiene componente en el eje de las ordenadas y tampoco el disco 2 tiene componente en el eje de las abscisas, por lo tanto, el ímpetu de estas componentes vale cero.

$$\Sigma p_x: m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-inicial}| = m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-final}|cos\theta_1 + m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-fin}\ |cos\theta_2$$

$$\Sigma p_y: m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-inicial}| = m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco1-final}|sen\theta_1 + m_{Disco2}|\vec{v}_{Disco2-final}|sen\theta_2$$

Se sustituyen los datos del problema, para reconocer las incógnitas:

$$\Sigma p_x: m_{Disco1}|2.48\ m/s| = m_{Disco1}|1.59\ m/s|cos60 + 1.5m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco2-final}|cos\theta_2$$

$$\Sigma p_y: 1.5m_{Disco1}|1.86\ m/s| = m_{Disco1}|1.59\ m/s|sen60 + 1.5m_{Disco1}|\vec{v}_{Disco2-fina}\ |sen\theta_2$$

Podemos observar que la ecuación no depende de la masa del disco 1, por lo tanto, se puede eliminar de las dos ecuaciones.

$$\Sigma p_x: |2.48\ m/s| = |1.59\ m/s|cos60 + 1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|cos\theta_2 \qquad \dots (1)$$

$$\Sigma p_y: 1.5|1.86\ m/s| = |1.59\ m/s|sen60 + 1.5|\vec{v}_{Disco2-fin}\ |sen\theta_2 \qquad \dots (2)$$

De la ecuación 1) se puede despejar el $cos\theta_2$ y de la ecuación 2) se puede despejar $sen\theta_2$.

$$cos\theta_2 = \frac{|2.48\ m/s| - |1.59\ m/s|cos60}{1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|} \qquad \dots (3)$$

$$sen\theta_2 = \frac{1.5|1.86\ m/s| - |1.59\ m/s|sen60}{1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|} \qquad \dots (4)$$

Se divide la ecuación 4) entre la 3), para obtener la función tanθ_2.

$$tan\theta_2 = \frac{sen\theta_2}{cos\theta_2} = \frac{\frac{1.5|1.86\ m/s| - |1.59\ m/s|sen60}{1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|}}{\frac{|2.48\ m/s| - |1.59\ m/s|cos60}{1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|}} = \frac{1.5|1.86\ m/s| - |1.59\ m/s|sen60}{|2.48\ m/s| - |1.59\ m/s|cos60} = 0.8386$$

Para conocer la dirección con la que el disco 2 se mueve después de la colisión, entonces se calcula el ángulo θ_2.

$$\theta_2 = tan^{-1}(0.8386) = 39.98\,°$$

Una vez conocido el ángulo θ_2 se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones para obtener la rapidez del disco 2.

Por ejemplo, sustituimos en la ecuación 1 y despejamos la rapidez:

$$\Sigma p_x\text{: } |2.48\ m/s| = |1.59\ m/s|cos60 + 1.5|\vec{v}_{Disco2-final}|cos39.98$$

$$|\vec{v}_{Disco2-fina}\ | = \frac{|2.48\ m/s| - |1.59\ m/s|cos60}{1.5cos39.98} = 1.47m/s$$

Ejercicio 5. Una "boligoma" (que es una masa moldeable de silicón, Figura 1) de 12.0 g, se lanza horizontalmente hacia un bloque de madera de 100.0 g. Al inicio, el bloque se encontraba en reposo sobre una superficie horizontal y tras el impacto, la "boligoma" se le queda pegada en un costado (ver Figuras 2 y 3), pero además logra un desplazamiento de 7.50 m antes de regresar al reposo. Si se puede considerar que el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal es 0.650, conteste:

A) ¿Cuál era la rapidez de la boligoma antes de impacto?

B) ¿Cuál fue la rapidez inicial del movimiento del sistema bloque-boligoma?

Figura 1. Masa moldeable de silicón denominada "boligoma".

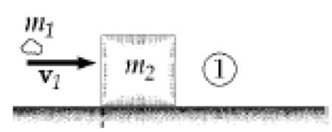


Figura 2. Lanzamiento de la "boligoma" m_1, hacia el bloque m_2, en reposo. Este es el momento 1, previo al choque.

Se aprecia que la situación a resolver presenta varios momentos: 1) el lanzamiento de la boligoma hacia el bloque de madera [Figura 2]; 2) el impacto de la boligoma contra el bloque causando no sólo su adhesión [Figura 3], sino el movimiento del sistema bloque-boligoma sobre una superficie horizontal, y 3) la llegada a un estado de reposo del sistema bloque-boligoma debido a la presencia de la fuerza de fricción entre las superficies horizontales.

La presente propuesta de resolución comienza con el uso de la *ecuación de la Conservación del ímpetu* (o cantidad de movimiento) $\vec{p} = m\vec{v}$, para los dos objetos involucrados: 1-boligoma, 2-bloque, para los instantes antes, *a*, y después, *d*, del choque. El ímpetu es una cantidad física que se conserva en cualquier tipo de colisión: elástica, inelástica y sus variantes. Entonces podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\vec{p}_{1a} + \vec{p}_{2a} = \vec{p}_{1\,d} + \vec{p}_{2\,d} \qquad \ldots \text{(A)}$$

Lo que no se conserva es la energía cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$, pues por la descripción de la situación, podemos afirmar que la colisión es inelástica, de hecho, es *perfectamente inelástica*, ya que ocurre pérdida de energía cinética por deformación, pero además se indica que los objetos, tras la colisión, permanecen unidos (ver Figura 3).

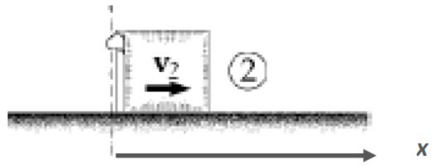


Figura 3. Impacto de la boligoma con el bloque y su adhesión. Se produce el movimiento del sistema a lo largo del eje horizontal *x*. Este es el instante 2 después del choque

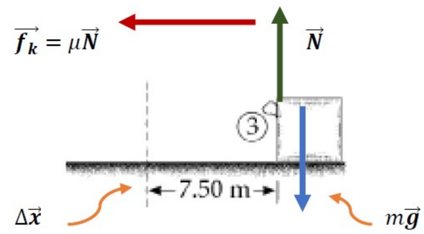


Figura 4. Ha ocurrido el desplazamiento horizontal del sistema y se ha alcanzado de nuevo el estado de reposo. Este es el momento 3. Se ilustran los vectores.

Retomando la ecuación (A) de conservación del ímpetu, quedaría de la siguiente manera en términos de masas y velocidades

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 \qquad \ldots \text{(B)}$$

Note que el bloque se encuentra originalmente en reposo, por lo que su velocidad es cero $\vec{v} = 0$, después de la colisión, ambos objetos forman un único sistema, por lo que en el desplazamiento comparte la misma velocidad $\vec{v}_2$.

Resolviendo para la velocidad de la boligoma, que es la pregunta del inciso A de este problema, vemos que tenemos una ecuación con dos incógnitas; la otra incógnita es la velocidad con que se desplaza el sistema boligoma-bloque, $\vec{v}_2$, que es lo que se pregunta en el inciso B.

$$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}_2 \qquad \ldots \text{(C)}$$

Necesitamos entonces incorporar otra ecuación válida para dar solución a las dos preguntas. Podemos analizar lo que ocurre después de la colisión: un movimiento en una dirección horizontal que cesa por el trabajo realizado por la fuerza de fricción, después de recorrer una distancia. Recordando el Teorema del trabajo y el cambio de la energía cinética: *Cuando se realiza trabajo sobre un sistema y el único cambio en éste es en su rapidez, el trabajo neto efectuado sobre el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema, que se expresa con la ecuación:*

$$W_{neto} = K_3 - K_2 \qquad \ldots \text{(D)}$$

El análisis de vectores de fuerza responsables del trabajo neto (ver Figura 4), permite concluir que sólo el vector fuerza de fricción cinética $\vec{f_k}$ participa. Y por la definición del producto escalar podemos escribir la siguiente ecuación:

$$K_3 - K_2 = W_{neto} = \vec{F}_{neta} \bullet \Delta\vec{r} = \vec{f_k} \bullet \Delta\vec{x} = |\vec{f_k}||\Delta\vec{x}|\cos\theta \qquad \ldots \text{(E)}$$

Observe los vectores colocados en la Figura 4: el desplazamiento sólo ocurre en el eje horizontal *x*; θ es el ángulo entre los vectores fuerza de fricción y desplazamiento, los vectores son antiparalelos, por lo que:

$$K_3 - K_2 = |\vec{f_k}||\Delta\vec{x}|\cos 180° = -|\vec{f_k}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots \text{(F)}$$

Analizando, la boligoma, inicialmente en movimiento, posee energía cinética $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$. La fuerza de fricción provocará en el sistema bloque-boligoma una aceleración negativa, por lo que después de recorrer 7.50 m, alcanzará el estado de reposo. La energía cinética en ese instante 3 tendrá un valor de cero, esto es, $K_3 = 0$.

Entonces es posible resolver para la magnitud de la rapidez inicial del sistema bloque-boligoma v_2

$$-\frac{1}{2}mv_2^2 = -|\vec{f_k}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots \text{(G)}$$

Desarrollando

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = -|\vec{f_k}||\Delta\vec{x}| = -\mu|\vec{N}||\Delta\vec{x}| = -\mu(m_1 + m_2)|\vec{g}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots \text{(H)}$$

Note que la magnitud de la fuerza de fricción $|\vec{f_k}|$, ha sido sustituida por el producto de coeficiente de fricción cinética y la fuerza normal, de acuerdo a la propuesta de L. Davinci. Los vectores de fuerza de la Figura 4 nos permiten concluir que la fuerza normal sobre el bloque es igual al peso del sistema: $(m_1 + m_2)|\vec{g}|$.

Sustituyendo los valores adecuados junto con sus unidades en la ecuación (H), tenemos:

$$\frac{1}{2}(0.112\ kg)v_2^2 = 0.650\ (0.112\ kg)(9.80\frac{m}{s^2})(7.50\ m)$$

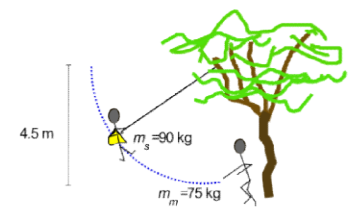
Resolviendo para la rapidez inicial del sistema bloque-boligoma

$$v_2^2 = 95.6\frac{m^2}{s^2}\ ; \qquad v_2 = 9.77\ m/s$$

que es la respuesta al inciso B. Sustituyendo este valor en la ecuación (C), encontramos la respuesta a la pregunta del inciso A: la rapidez de la boligoma antes de impacto. Cabe destacar que ambas velocidades tienen dirección positiva en el eje x.

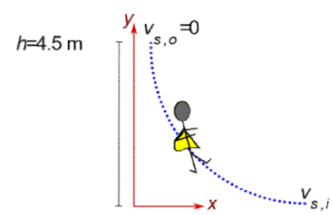
$$\vec{v}_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\vec{v}_2 = \frac{(0.112\ kg)}{0.012\ kg}\left(9.77\frac{m}{s}\right) = 91.2\ m/s$$

Ejercicio 6. Un superhéroe se lanza desde una azotea para luchar contra un malvado. Durante su trayecto, se sujeta a una cuerda y su centro de masa baja 4.5 m hasta que choca con su contrincante. Inicialmente, ambos se encuentran en reposo. ¿Con qué rapidez se deslizan ambos si permanecen entrelazados en su batalla?



La solución del problema puede dividirse en dos etapas.

Etapa 1: la caída del superhéroe bajo la acción de la fuerza de gravedad.



Por la conservación de la energía mecánica:

$$E_{c,0} + E_{p,0} = E_{c,i} + E_{p_i}$$

donde E_c y E_p se refieren a las energías cinética y potencial, respectivamente.

De acuerdo con la notación de las figuras:

$$\frac{1}{2}m_s v_{s,o}^2 + m_s gh = \frac{1}{2}m_s v_{s,i}^2 + m_s g(0)$$

y al despejar $v_{s,i}$, se obtiene la rapidez con que el superhéroe choca con el malvado:

$$v_{s,i} = \sqrt{2gh} = 9.40\ m/s$$

Etapa 2: colisión del superhéroe con el malvado.

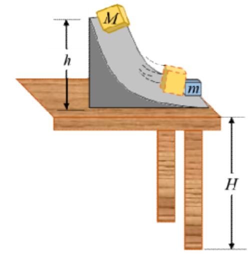
Antes del choque, el malvado se encuentra en reposo, $v_{m,i}$. Además, la colisión es totalmente inelástica porque ambos permanecen entrelazados:

$$m_1 v_{s,i} + m_2 \underbrace{v_{m,i}}_{0} = (m_1 + m_2)v_f$$

Al despejar v_f, la rapidez justo después del choque:

$$v_f = \frac{m_1 v_{s,i}}{m_1 + m_2} = 5.13\ m/s$$

Ejercicio 7. En un experimento se suelta un cubo de masa M sobre un plano inclinado sin fricción y golpea a otro cubo de masa m en una colisión elástica. Si ambos salen con velocidad horizontal ¿qué tal lejos de la mesa cae cada cubo? Considere $M = 2\ m$, $h = 30\ cm$, $H = 3\ h$.



Planteamiento.

I. Usar la información de la energía potencial asociada a la altura h del cubo M, para calcular la velocidad del impacto con m.
II. Obtener las velocidades con las que abandonan la mesa, usando criterios de conservación de la energía cinética y conservación de la cantidad de movimiento.
III. Resolver como un tiro parabólico horizontal, usando las velocidades obtenidas en (II) y la altura de la mesa.

Solución.

$U = mhg$

I. $Mgh = \frac{1}{2}Mv_{M_i}^2 \quad \ldots \quad v_{M_i} = \sqrt{2gh}$

Así $v_{M_i} = 2.43\ m/s$.

II. Conservación de energía cinética

$$\frac{1}{2}Mv_{M_i}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}v_{m_i}^2 = \frac{1}{2}Mv_{M_f}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}v_{m_f}^2$$

$$Mv_{M_i}^2 = Mv_{M_f}^2 + \frac{M}{2}v_{m_f}^2$$

En términos de m ($2m = M$)

$$2mv_{M_i}^2 = 2mv_{M_f}^2 + mv_{m_f}^2$$

$$2v_{M_i}^2 = 2v_{M_f}^2 + v_{m_f}^2 \qquad \ldots (1)$$

Conservación de la cantidad de movimiento

$$Mv_{M_i} + \frac{M}{2}v_{m_i} = Mv_{M_f} + \frac{M}{2}v_{m_f}$$

$$Mv_{M_i} = Mv_{M_f} + \frac{M}{2}v_{m_f}$$

En términos de m ($2m = M$)

$$2mv_{M_i} = 2mv_{M_f} + mv_{m_f}$$

$$2v_{M_i} = 2v_{M_f} + v_{m_f} \qquad \ldots (2)$$

Combinando (1) y (2)

$2v_{M_i}^2 = 2v_{M_f}^2 + v_{m_f}^2 \qquad \ldots (1)$

$2v_{M_i} = 2v_{M_f} + v_{m_f} \qquad \ldots (2)$

de (2)

$v_{m_f} = 2v_{M_i} - 2v_{M_f} \qquad \ldots (2')$

$v_{m_f}^2 = 4v_{M_i}^2 - 8v_{M_i}v_{M_f} + 4v_{M_f}^2 \qquad \ldots (2'')$

Sustituyendo (2'') en (1)

$2v_{M_i}^2 = 2v_{M_f}^2 + 4v_{M_i}^2 - 8v_{M_i}v_{M_f} + 4v_{M_f}^2$

Reordenando los término para obtener v_{M_f}

$2v_{M_i}^2 - 4v_{M_i}^2 = 2v_{M_f}^2 - 8v_{M_i}v_{M_f} + 4v_{M_f}^2$

$-v_{M_i}^2 = v_{M_f}^2 - 4v_{M_i}v_{M_f} + 2v_{M_f}^2$

$0 = 3v_{M_f}^2 - 4v_{M_i}v_{M_f} + v_{M_i}^2$

Recordando que $v_{M_i} = 2.43\ m/s$

$0 = 3v_{M_f}^2 - 9.70v_{M_f} + 5.89$

$v_{M_f} = 0.81\ m/s$ $\quad$ $v_{M_f} = 2.43\ m/s$ (descartada)

Sustituyendo $v_{M_f} = 0.81\ m/s$ en (2') para obtener v_{m_f}

$v_{m_f} = 2(2.43) - 2(0.81) = 3.24\ m/s$

III. Calculando la distancia recorrida considerando un tiro parabólico horizontal y la altura *H.*

$v_{M_f} = v_M = 0.81\ m/s$

$v_{m_f} = v_m = 3.24\ m/s$

Resolviendo de forma general para un tiro parabólico horizontal

$x(t) = v_{0x}t$

$y(t) = H = \frac{1}{2}gt^2$

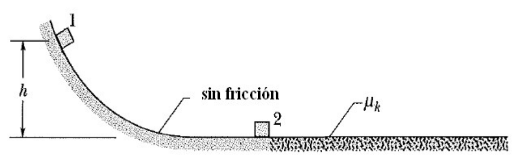
$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0.43\ s$

Así $x = 0.43v_{0x}$

Para M $\quad x = 0.43v_{0x} = 0.43(v_M) = 0.35\ m$

Para m $\quad x = 0.43v_{0x} = 0.43(v_m) = 1.39\ m$

Ejercicio 8. En la siguiente figura el bloque 1 de masa m_1 = 1 kg desliza partiendo del reposo desde una altura *h* = 2.5 m y colisiona con el bloque 2 de masa $2m_1$. Luego de la colisión el bloque 2 se desliza entrando a una región donde la superficie tiene un coeficiente μ_k = 0.5 y se detiene a una distancia "d" dentro de esa superficie. Calcule el valor de "d" considerando que la colisión es elástica



Para el bloque 1 que desliza por la superficie curva sin fricción se cumple la conservación de la energía mecánica. Toda la energía potencial gravitacional que tiene el bloque 1 cuando se encuentra a una altura h se transforma en la energía cinética necesaria para llegar a la posición del bloque 2. Esto significa que la energía mecánica total del bloque 1 se conserva cuando desliza sobre la superficie libre de fricción al transitar de un estado inicial A, ubicado a una altura h, hasta un estado final B, situado en la posición del bloque 2.

Para usar el principio de conservación de la energía mecánica en el bloque 1, se establecen las energías de ambos estados teniendo como sistema de referencia el punto en donde la energía potencial del sistema es cero, es decir en la parte baja de la superficie curva. De esta forma, para el bloque 1 de masa m1 se obtiene:

$$\Delta E_{m1} = 0 \qquad \therefore \qquad E_{Bm1} - E_{Am1} = 0$$

Por lo tanto:

$$E_{Am1} = E_{Bm1}$$

Identificando las energías en el estado A:

$$U_{gA} = energía\ potencial\ gravitacional\ en\ el\ estado\ A$$
$$K_A = energía\ cinética\ en\ el\ estado\ A$$

Entonces, para el bloque 1 de masa m1:

$$E_{Am} = U_{gA} + K_A = m1gh + 0$$

En el estado A no existe energía cinética por que el bloque se encuentra en reposo y solo existe energía potencial gravitacional asociada a la altura h.

Identificando las energías en el estado B:

$$U_{gB} = energía\ potencial\ gravitacional\ en\ el\ estado\ B$$
$$K_B = energía\ cinética\ en\ el\ estado\ B$$

Entonces, para el bloque 1 de masa m1:

$$E_{Bm1} = U_{gB} + K_B = 0 + \frac{1}{2}m1{v_{Bm1}}^2$$

En el estado B no existe energía potencial gravitacional por que el bloque se encuentra en$h = 0$ y solo existe energía cinética asociada al cambio de posición, es decir al cambio en la velocidad involucrada para llegar a ese punto.

Al igualar las energías en ambos estados, por la conservación de la energía, se obtiene la velocidad del bloque 1 cuando llega a la posición del bloque 2.

$$\frac{1}{2}m1{v_{Bm1}}^2 = m1gh$$

$${v_{Bm}}^2 = 2gh \quad \therefore \quad v_{Bm1} = \sqrt{2gh} = 7.003570518\ \frac{m}{s} \approx 7.00\ \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad del bloque 1 cuando colisiona con el bloque 2 al llegar a esa posición. Para conocer la velocidad del bloque 2 luego de la colisión se usa la conservación del momento lineal.

Se sabe que en una colisión elástica la energía cinética se conserva, por lo tanto:

$$\Delta P = 0 \quad \therefore \quad P_i = P_f$$

$$\Delta K = 0 \quad \therefore \quad K_f = K_i$$

El desarrollo de estas relaciones permite determinar la velocidad de ambos bloques luego de una colisión elástica, cuando uno de ellos al inicio se encuentra en reposo.

$$v_{fm1} = \frac{m1 - m2}{m1 + m2} v_{im1}$$

$$v_{fm2} = \frac{2m1}{m1 + m2} v_{im1}$$

Considerando los estados inicial y final de la colisión, cada bloque tiene un momento lineal diferente. En el estado inicial (antes de la colisión) el bloque 1 de masa m1 tiene una velocidad inicial cuando colisiona con el bloque 2 de masa 2m1, y en el estado final(después de la colisión)el bloque 2 que inicialmente se encuentra en reposo adquiere una velocidad final. Esta velocidad final está dada por:

$$v_{fm2} = \frac{2m1}{m1 + m2} v_{im} = \frac{2(1\ kg)}{1\ kg + 2\ kg}(v_{Bm}) = \frac{2}{3}\left(7.003570518 \frac{m}{s}\right) = 4.666666667 \frac{m}{s} \approx 4.67 \frac{m}{s}$$

Con esta velocidad y considerando que después de la colisión el bloque 2 entra a una región donde existe fricción, el trabajo que realiza esta fricción es lo detiene al bloque 2 luego de recorrer cierta distancia dentro de esa región. Para determinar esa distancia se usa el teorema trabajo-energía mecánica considerando el trabajo de la fricción:

$$\Delta K = W_f \quad \therefore \quad K_f - K_i = W_f$$

$$K_i + W_f = K_f$$

La energía cinética inicial del bloque 2 en el instante de la colisión es:

$$K_i = 0$$

La energía cinética final del bloque 2 después de la colisión es:

$$K_f = \frac{1}{2} m2 {v_{fm2}}^2$$

El trabajo de la fricción sobre el bloque 2 es:

$$W_f = -\mu_k m2gd$$

Por lo tanto:

$$0 - \frac{1}{2} m2 {v_{fm2}}^2 = -\mu_k m2gd \quad \therefore \quad d = \frac{-m2{v_{fm2}}^2}{-2\mu_k m2g} = \frac{{v_{fm2}}^2}{2\mu_k g}$$

$$d = \frac{\left(4.666666667\frac{m}{s}\right)^2}{2(0.5)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)} = 2.21995696\, m \approx 2.22\, m$$

Ejercicio 9. En la figura se muestran dos cuerpos que van a colisiones frontalmente. Considera que m_1 = 3 lb_f y tiene rapidez de 8 ft/s mientras que m_2 = 5 lb_f con rapidez de 12 ft/s. Si el coeficiente de restitución, e, tiene valor de 0.90. Calcule:

A) Las velocidades de cada cuerpo después del choque.
B) La energía que se pierde durante el choque.
C) El peso que se debe agregar al cuerpo dos para que su velocidad después del choque sea igual a cero.

A) Apliquemos el principio de conservación del ímpetu, considerando el peso de cada objeto y no su masa, en un sistema unidimensional.

$$w_1 v_{1_{inici}} + w_2 v_{2_{inicial}} = w_1 v_1 + w_2 v_2$$

Sustituyendo los valores que brinda el ejercicio tenemos:

$$(3)(8) - (5)(12) = 3v_1 + 5v_2 \quad \Rightarrow \quad 24 - 60 = 3v_1 + 5v_2 \quad \Rightarrow \quad -36 = 3v_1 + 5v_2 \qquad \ldots (1)$$

El signo menos implica que el objeto 2 se mueve en dirección a los negativos.

Para resolver el sistema mostrado en la ecuación 1, el cual tiene dos incógnitas, recurriremos a la definición del coeficiente de restitución el cual está expresado en función de las velocidades iniciales y finales de cada objeto.

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{1_{inicial}} - v_{2_{inicial}}}$$

Sustituyendo en la ecuación del coeficiente de restitución:

$$0.9 = \frac{v_2 - v_1}{8+12} \quad \Rightarrow \quad 0.9\,(20) = v_2 - v_1 \quad \Rightarrow \quad 18 = v_2 - v_1 \qquad \ldots (2)$$

Ahora podemos resolver el sistema de ecuaciones empleando la ecuación 1 y 2, en las cuales se encuentran los valores de las velocidades de cada objeto después del choque.

Despejando a v_1 de la ecuación 2 y sustituyendo en la ecuación 1, tenemos:

$$v_1 = v_2 - 18$$

$$-36 = 3v_1 + 5v_2 \quad \Rightarrow \quad -36 = 3(v_2 - 18) + 5v_2 \quad \Rightarrow \quad -36 = 3v_2 - 54 + 5v_2 \quad \Rightarrow \quad 18 = 8v_2$$

$$v_2 = 2.25\ ft/s$$

Sustituyendo el valor de v_2 en la ecuación 2 tenemos el valor de v_1.

$$v_1 = v_2 - 18 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2.25 - 18 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -15.75\ ft/s$$

B) Para resolver la energía que se pierde en el choque, sumaremos la energía cinética de los dos cuerpos antes del choque y después del choque, para después realizar una resta.

Energía cinética antes del choque:

$$E_{c_{(inicial)}} = \frac{1}{2}m_1\left(v_{1_{inicial}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_{2_{inicial}}\right)^2$$

$$E_{c_{(inicial)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{32.2}\right)(8)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)(12)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{c_{(inicial)}} = 2.98 + 11.18 = 14.16\ lbft^2/s^2$$

Energía cinética después del choque:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{32.2}\right)(15.75)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)(2.25)^2 \quad \Rightarrow \quad E_c = 11.55 + 0.39 = 11.94\ lbft^2/s^2$$

Realizando la diferencia entre la energía cinética después del choque menos la energía cinética antes del choque, podremos determinar la energía perdida.

$$\Delta E = E_c - E_{c_{(inicial)}} = 14.16 - 11.94 = 2.21\ lbft^2/s^2$$

C) Para determinar el peso que se debe agregar al objeto dos para que después de la colisión su velocidad sea cero, retomemos el principio de conservación del ímpetu, considerando el peso de cada objeto y no su masa.

$$w_1 v_{1_{inicial}} + w_2 v_{2_{inicial}} = w_1 v_1 + w_2 v_2$$

Considerando que w_2 es una incógnita y haciendo que v_2 sea cero, tenemos:

$$w_1 v_{1_{inicial}} + w_2 v_{2_{inicial}} = w_1 v_1$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$(3)(8) - w_2(12) = 3v_1 \qquad \ldots (3)$$

Aplicando la ecuación del coeficiente de restitución, podemos encontrar el valor de v_1.

$$0.9 = \frac{-v_1}{8+12} \quad \Rightarrow \quad 0.9\,(20) = -v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -18\ ft/s$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 3 y despejando el peso del objeto dos tenemos:

$$(3)(8) - w_2(12) = 3(-18) \quad \Rightarrow \quad 24 - 12w_2 = -54 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{24+54}{12} = 6.5\ lb_f$$

Pero como el objeto 2 ya tiene un peso de 5 lb_f, únicamente será necesario agregar 1.5 lb_f.