UNIDAD 9. CINEMÁTICA DE LAS ROTACIONES

Ejercicio 1. Un monociclo avanza con rapidez angular constante de 2π rad/s. Si el diámetro de la llanta es de 80.0 cm. ¿Qué longitud, expresada en metros, recorre en 2 minutos?

La longitud recorrida puede ser relacionada con el desplazamiento angular de la llanta, para esto utilizaremos la ecuación cinemática

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \dots (1)$$

El problema enuncia que la rapidez angular es constante en el movimiento por lo que el término $\frac{1}{2}\alpha t^2$ es eliminado de la ecuación (1). Además, podemos asumir que la posición angular del movimiento es en 0 rad, por lo que $\theta_0 = 0\, rad$.

Procedemos a obtener la posición angular pasados los dos minutos, o 120 segundos, mediante las simplificaciones mencionadas

$$\theta = \omega_0 t = (2\pi\, rad/s)(120s) = 756.98\, rad$$

Una vez obtenido el desplazamiento angular, se obtiene la distancia recorrida, la cual corresponde al arco recorrido, S

$$S = R\theta \qquad \dots (2)$$

En donde R es el radio de la llanta, así, la distancia recorrida por el monociclo es:

$$S = (0.80m)(756.98rad) = 605.58m$$

Recordando que rad no se opera como una unidad, es únicamente un indicativo de la magnitud.

Ejercicio 2. Se tienen dos ventiladores funcionando en la playa, la longitud de las aspas del primero es de 10 cm y para el segundo de 15 cm. Si ambos giran contantemente a 50 rps, para un punto en el extremo de las aspas de cada ventilador determine:

A) La rapidez tangencial de cada aspa.

B) ¿Cuál tiene mayor magnitud de aceleración?, ¿Por qué?

a) Primero debemos de encontrar la rapidez angular (ω) de cada ventilador la cual es contante y, por lo tanto, la aceleración angular es cero. Esta rapidez es la misma para ambos ventiladores.

$$\omega = 50\,\frac{rev}{s}\left(\frac{2\pi\, rad}{1\, rev}\right) = 100\,\pi\frac{rad}{s}$$

Ahora calculamos la rapidez tangencial para cada ventilador. Recuerda que $V = R\omega$, donde V es la rapidez tangencial y R el radio. Sustituimos los valores en unidades del Sistema Internacional.

Ventilador 1: $V = (10x10^{-2}\, m)\left(100\pi\frac{rad}{s}\right) = 10\pi\frac{m}{s}$

Ventilador 2 $V = (15x10^{-2}\, m)\left(100\pi\frac{rad}{s}\right) = 15\pi\frac{m}{s}$

Como puedes notar el ventilador 2 tiene una mayor rapidez ya que tiene un radio más grande.

b) Para calcular la magnitud de la aceleración total debemos recordar que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Donde $\vec{a}_t$ es el vector aceleración tangencial, el cual en este problema tiene un valor de cero ya que la rapidez angular es constante.

Debido a lo anterior, la aceleración total coincide con el vector aceleración centrípeta, así como su magnitud:

$$a = a_c = \frac{V^2}{R}$$

Sustituimos los respectivos valores para cada ventilador de acuerdo con la ecuación anterior:

Ventilador 1: $a = \frac{(10\pi)^2}{(10x10^{-2})} = 1000\pi^2 \frac{m}{s^2}$

Ventilador 2: $a = \frac{(15\pi)^2}{(15x10^{-2})} = 1500\pi^2 \frac{m}{s^2}$

Como puedes notar el ventilador 2 tiene una mayor magnitud de la aceleración debido a que cuenta con un radio más grande.

Ejercicio 3. El rotor de una centrifugadora gira con una celeridad angular constante de 7.00 rad/s². Si la rapidez angular del rotor es 4.00 rad/s en $t_0 = 0$ s, determine:

- **A) El recorrido angular (en grados sexagesimales) en un lapso de 4.00 s.**
- **B) Las revoluciones que dio el rotor durante el lapso de 4.00 s.**
- **C) La rapidez angular del rotor en t = 4.00 s.**

A) Sabiendo que $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, se obtiene

$$\Delta\theta = \left(4.00\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(4.00\ \text{s}) + \frac{1}{2}\left(7.00\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(4.00\ \text{s})^2 = 72.0\ \text{rad}$$

Por lo que

$$\Delta\theta = 72.0\ \text{rad}\ (57.3°/\text{rad}) = 4130°$$

B) Una vez determinado el desplazamiento angular, este se convierte a revoluciones:

$$\Delta\theta = 4130°\left(\frac{1\ \text{rev}}{360°}\right) = 11.5\ \text{rev}$$

C) Primero determinemos la velocidad angular al tiempo t = 4.00 s

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4.00\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left(7.00\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(4.00\ \text{s}) = 32.0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por otra parte, también se puede llegar al mismo resultado mediante la ecuación:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

$$\omega = \sqrt{(4.00\ \text{rad/s})^2 + 2(7.00\ \text{rad/s}^2)(72.0\ \text{rad})} = 32.0\ \text{rad/s}$$

Ejercicio 4. Una rueda de bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. Si su aceleración angular es constante e igual a 0.30 rad/s², determine:

- **A) ¿Qué velocidad angular tiene en t = 2.5 s?**
- **B) ¿Qué ángulo gira la rueda entre t = 0 y t = 2.5 s?**

A) Empelando la ecuación de velocidad angular y evaluando para $t = 2.5$ s, tenemos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \omega = 1.5\ rad/s + (0.30\ \text{rad/s}^2)(2.5\ s) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2.25\ rad/s$$

B) Para determinar el ángulo se emplea la ecuación del desplazamiento angular.

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = (1.5\ \text{rad/s})(2.5\ \text{s}) + \frac{(0.30\ rad/s^2)(2.5\ s)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = 4.68\ rad$$

Ejercicio 5. Un objeto que inicialmente gira a 2000.0 rpm disminuye su velocidad a 1000.0 rpm en un tiempo de 5.0 s. Si el radio de giro es de 20.0 cm, determine cuántas vueltas dio el objeto.

En esta ocasión, al existir un cambio en la velocidad angular del objeto, expresada en rpm, debemos considerar la existencia de una aceleración angular diferente de cero, por ello, la ecuación del desplazamiento angular será:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2}$$

Si derivamos al desplazamiento angular con respecto al tiempo, obtendremos la ecuación de la velocidad angular dependiente del tiempo:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2} \qquad \ldots \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 + \alpha t$$

Antes de sustituir en la ecuación anterior, es necesario convertir cada velocidad angular de rpm a rad/s.

$$\omega_0 = 2000 \text{ rpm} = 209.44 \text{ rad/s} \qquad\qquad \omega = 1000 \text{ rpm} = 104.72 \text{ rad/s}$$

Evaluando en la ecuación de velocidad angular que t = 5.0 s, podemos encontrar el valor asociado con la aceleración angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \ldots \qquad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad \ldots \qquad \alpha = \frac{\omega-\omega_0}{t} = \frac{104.72-2\quad .44}{5.0} = -20.94 \text{ rad/s}^2$$

Al sustituir la condición de velocidad angular inicial y la aceleración angular en la ecuación del desplazamiento angular tendremos:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2} \qquad \ldots \qquad \Delta\theta = 209.44t - 20.94\frac{t^2}{2}$$

Evaluando la condición de que el tiempo es 5.0 s.

$$\Delta\theta = 209.44(5.0) - 20.94\frac{(5.0)^2}{2} \qquad \ldots \qquad \Delta\theta = 785.45 \text{ rad}$$

El valor anterior debe convertirse a número de vueltas para dar solución al ejercicio.

$$\Delta\theta = 785.45 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 125.01 \text{ vueltas}$$

Ejercicio 6. En el laboratorio, se necesita llevar a cabo la separación de un fluido que presenta varias fases incluyendo, pequeños-corpúsculos sólidos (ver Figura 1). Tiene disponible una ultracentrífuga de laboratorio (Figura 3) que puede alcanzar hasta 500 rev/min en 5.5 s. Para determinar si este aparato le es útil para llevar a cabo la separación del fluido, deberá determinar si puede alcanzar los siguientes valores de las variables del movimiento rotacional:

A) aceleración angular, α, superior a 8 rad/s² en 5.5 s.
B) número de revoluciones en 5.5 s superior a 20.

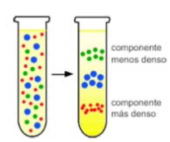


Figura 1. Resultado esperado del uso de una ultracentrífuga en la separación de fases.

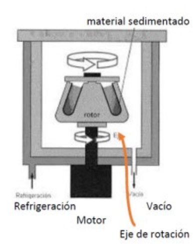


Figura 2. Esquema simplificado del mecanismo interior de una ultracentrífuga

Figura 3. Ultracentrífuga de laboratorio.

La presente propuesta de resolución hace uso de las ecuaciones de cinemática vistas en la Unidad 3 “Cinemática de la partícula”, ahora aplicadas a la “Cinemática de las rotaciones”.

Para la determinación de la aceleración angular α, que supondremos constante, utilizaremos la ecuación (A). Se considera además que, al inicio, los tubos con fluido en el rotor se encuentran en reposo, y que la velocidad angular alcanzada a los 5.5 s es de 500 rev/min

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i + \vec{\alpha}\,t = 0 + \vec{\alpha}\,t \qquad \ldots \text{(A)}$$

Resolviendo para la aceleración angular y recordando que una revolución o ciclo es una vuelta completa

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f}{t} = \frac{500\,\frac{rev}{min}}{5.5\,s}\left(\frac{2\pi rad}{1\,rev}\right)\left(\frac{1\,min}{60\,s}\right) = 9.52\,\frac{rad}{s^2}$$

La aceleración angular proporcionada por la ultracentrífuga supera el valor mínimo requerido para separar las fases del fluido que es de 8 rad/s^2.

El número de revoluciones alcanzadas en 5.5 s también es un parámetro importante. Se resolverá empleando 3 formas de las ecuaciones de cinemática, para reforzar que se trata de ecuaciones linealmente independientes y que cualquiera de ellas es válida, siempre y cuando se sustituyan las cantidades involucradas de manera correcta.

La primera forma de la relación del desplazamiento angular $\Delta\vec{\theta}$ con el tiempo

$$\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \vec{\omega}_i\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 = 0 + \frac{1}{2}\left(9.52\ \frac{rad}{s^2}\right)(5.5\ s)^2 = 144\, rad \qquad \ldots \text{(B)}$$

Con el factor de conversión de radianes a revoluciones, obtenemos

$$\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = 144\, rad\ \left(\frac{1\, rev}{2\pi ra}\right) = 22.9\, rev$$

Otra forma de resolverlo es empleando la ecuación (C)

$$\vec{\omega}_f^2 = \vec{\omega}_i^2 + 2\vec{\alpha}\left(\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i\right) = 0\ + 2\vec{\alpha}\left(\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i\right) \qquad \ldots \text{(C)}$$

Que se resuelve para el desplazamiento angular, en revoluciones:

$$\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \frac{\left(\frac{500\, rev}{min}\right)\left(\frac{500\, rev}{min}\right)\left(\frac{1^2 min^2}{60\ ^2 s^2}\right)}{2\left(9.52\, \frac{rad}{s^2}\right)\left(\frac{2\pi rad}{1\, rev}\right)} = 22.9\, rev$$

Finalmente, si la velocidad angular promedio es

$$\vec{\omega}_{prom} = \frac{(\vec{\omega}_f + \vec{\omega}_i)}{2} = \frac{(500\, rev/\mathrm{min} + 0)}{2} = 250\ \frac{rev}{min} \qquad \ldots \text{(D)}$$

Una manera distinta de conocer el desplazamiento angular alcanzado en 5.5 s

$$\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \vec{\omega}_{prom}\, t = \left(250\ \frac{rev}{min}\right)\left(\frac{1\, min}{60\ s}\right)(5.5\ s) = 22.9\, rev \qquad \ldots \text{(E)}$$

El número de revoluciones calculado con las diferentes ecuaciones de cinemática (B, C y E) coincide, y supera el criterio del valor mínimo indicado para que el uso de la ultracentrífuga sea adecuado en la separación de fases del fluido.

Ejercicio 7. El tiempo que tarda una rueda de ruleta en girar hasta el reposo es 20 s, y completa 8.5 revoluciones en ese tiempo (las 8.5 revoluciones representa el recorrido angular de la ruleta). Para el número 5 de la ruleta, que inicialmente esta en θ_0 = -45°, calcule el vector aceleración total a los 10 s después de que comenzó a detenerse la ruleta. Considere que el número 5 de la ruleta se encuentra a 40 cm del centro y que su desaceleración es constante.

Primero debemos de determinar el valor de la rapidez angular inicial del número 5 de la ruleta. Recordemos que:

$$\theta_{(t)} = \theta_0 + \omega_0 t\ - \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \ldots (1)$$

$$\omega_{(t)} = \omega_0\ - \alpha t \qquad \ldots (2)$$

Donde θ_0 es la posición angular inicial en radianes, ω_0 es la rapidez angular inicial en rad/s, α es la aceleración angular en rad/s^{2}y t el tiempo en segundos. El signo negativo se debe a que desacelera.

Si se considera el tiempo de 20 s (tiempo en que tarda en detenerse), entonces su recorrido angular en radianes será:

$$\theta_{(20\ s)} = 8.5\, rev\ \left(\frac{2\pi\, rad}{1\, rev}\right) = 17\pi\, rad$$

Ahora se transforma la posición inicial en radianes:

$$\theta_0 = -45° \left(\frac{2\pi\, rad}{360°}\right) = -\frac{1}{4}\pi\, rad$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación 1 para un tiempo de 20 s:

$$17\pi = -\frac{1}{4}\pi + \omega_0(20) - \frac{1}{2}\alpha(20)^2 \qquad \ldots (3)$$

Por otra parte, podemos considerar que el valor de la rapidez angular es cero una vez que la ruleta se detuvo (a los 20 s).

Esto lo podemos expresar como $\omega_{(20\, s)} = 0$, esto valores los sustituimos en la ecuación 2:

$$0 = \omega_0 - \alpha(20) \qquad \ldots (4)$$

Con las ecuaciones 3 y 4 formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (ω_0 y α). Las soluciones a este sistema son:

$$\omega_0 = \frac{57}{40}\pi\, \frac{rad}{s} \alpha = \frac{57}{800}\pi\, \frac{rad}{s^2}$$

Ahora debemos determinar la rapidez angular a los 10 s. Para esto usaremos la ecuación 2:

$$\omega_{(10\, s)} = \frac{57}{40}\pi - \frac{57}{800}\pi(10) = \frac{57}{80}\pi\, \frac{rad}{s}$$

Con los resultados anteriores podemos obtener la magnitud de la aceleración tangencial y aceleración centrípeta del número 5 a los 10 s:

$$a_t = \alpha R = \left(\frac{57}{800}\pi\right)(40x10^{-2}) = \frac{57}{2000}\pi\, \frac{m}{s^2}$$

Donde a_t es la magnitud de la aceleración tangencial y R es el radio (distancia del número 5 al centro) en metros.

$$a_c = \omega_{(10\, s)}^2 R = \left(\frac{57}{80}\pi\right)^2 (40x10^{-2}) = \frac{3249}{16000}\pi^2\, \frac{m}{s^2}$$

Ahora debemos de determinar la posición angular del número 5 después de los 10 s. Usamos la siguiente ecuación:

$$\theta_{(10\, s)} = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Sustituimos los valores respectivos:

$$\theta_{(10\, s)} = -\frac{1}{4}\pi + \left(\frac{57}{40}\pi\right)(10) - \frac{1}{2}\left(\frac{57}{800}\pi\right)(10)^2 = \frac{167}{16}\pi\, rad$$

Con este dato podemos conocer el número de giros que dio el número 5 en la ruleta:

$$\frac{167}{16}\pi\, rad \left(\frac{1\, giro}{2\pi\, rad}\right) = 5.219\, giros$$

Lo cual significa que el número 5 ha girado con la ruleta 5 veces y 0.219 de un giro. Este último valor nos indicará la posición final del número 5 con respecto a un sistema de referencia cartesiano (Figura 1):

$$0.219\, giro \left(\frac{360°}{1\, giro}\right) = 78.84°$$

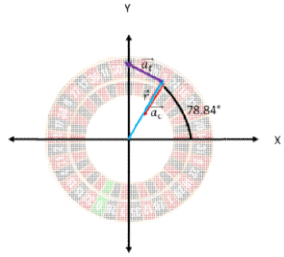


Figura 1

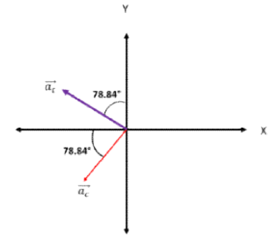


Figura 2

Una vez que se identificó la posición del número 5, podemos ubicar lo vectores aceleración tangencial y centrípeta en un sistema de referencia cartesiano (Figura 2). Recuerda que esto es a los 10 s de que comenzó a desacelerar la ruleta:

De acuerdo con la figura 2 podemos expresar los vectores:

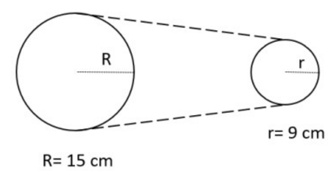
$$\vec{a}_t = -a_t \sin 78.84° \,\hat{\imath} + a_t \cos 78.84° \,\hat{\jmath} = -\left(\frac{57}{2000}\pi\right) \sin 78.84° \,\hat{\imath} + \left(\frac{57}{2000}\pi\right) \cos 78.84° \,\hat{\jmath} = -0.028\pi\hat{\imath} + 0.005\pi\hat{\jmath} \; m/s^2$$

$$\vec{a}_c = -a_c \cos 78.84° \,\hat{\imath} - a_c \sin 78.84° \,\hat{\jmath} = = -\left(\frac{3249}{16000}\pi^2\right) \cos 78.84° \,\hat{\imath} - \left(\frac{3249}{16000}\pi^2\right) \sin 78.84° \,\hat{\jmath} = -0.040\pi^2\hat{\imath} - 0.199\pi^2\hat{\jmath} \; m/s^2$$

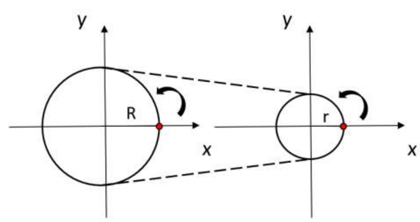
Finalmente, para obtener el vector aceleración total a los 10 s sustituimos en la siguiente ecuación:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = -0.483\hat{\imath} - 1.948\hat{\jmath} \; m/s^2$$

Ejercicio 8. Una bicicleta muy famosa en los 80's fue la "vagabundo", que tenía solo dos estrellas que se unían por una cadena. Si un niño utiliza esta bicicleta para lograr que la estrella de mayor tamaño acelere desde el reposo a razón de 2 rad/s² en un tiempo de 8 s. Calcule la cantidad de vueltas que ha dado la estrella de menor tamaño en este mismo tiempo. Considere que los radios de las estrellas son como se muestra en la figura.



Para resolver este problema es necesario colocar un sistema de referencia, para conocer la posición angular inicial y el sentido de giro de las estrellas.



Para facilitar la resolución del ejercicio, se coloca la posición angular inicial con un ángulo de 0 radianes y se considera que el giro de las estrellas es en el sentido antihorario, es decir, por convención se considera que la velocidad y aceleración angular son positivas.

Una vez fijado el sistema de referencia tratamos encontrar una relación entre las velocidades y aceleraciones angulares de las dos estrellas.

Sabemos que, si las estrellas se encuentran conectadas por medio de la cadena, esto nos asegura que la rapidez tangencial de ambas estrellas es la misma. Por lo tanto, podemos obtener una relación entre ambas rapideces.

$$|\vec{v}_{estrella-gran}| = |\vec{v}_{estrella-pequeña}|$$

$$|R\omega_{estrella-grand}| = |r\omega_{estrella-peq\quad ña}|$$

$$\frac{|\omega_{estrella-gr}|}{|\omega_{estrella-pequeña}|} = \frac{r}{R}$$

Como ya habíamos acordado anteriormente, las velocidades y aceleraciones angulares son positivas. Entonces nuestra notación puede reescribirse como:

$$\frac{\omega_{estrella-grande}}{\omega_{estrella-pequeña}} = \frac{r}{R}$$

Si sustituimos nuestros datos, obtenemos:

$$\frac{\omega_{estrella-gran}}{\omega_{estrella-pequeña}} = \frac{9\ cm}{15\ cm}$$

$$\omega_{estrella-gran} = 0.6\ \omega_{estrella-pequeña}$$

También se puede lograr obtener una relación para las aceleraciones angulares, utilizando la última expresión obtenida y las ecuaciones de las velocidades angulares para cada estrella, es decir:

$$\omega_{estrella-grand} = \omega_0 + \alpha_{estrella-gran}\ t$$

$$\omega_{estrella-pequeña} = \omega_0 + \alpha_{estrella-pequeña} t$$

Como las estrellas parten del reposo, entonces su velocidad angular inicial es 0 rad/s, por lo tanto, nuestras ecuaciones se reducen a:

$$\omega_{estrella-gran} = \alpha_{estrella-gr}\ t$$

$$\omega_{estrella-pequeña} = \alpha_{estrella-pequeña} t$$

Utilizando relación de velocidades angulares y sustituyéndolas tenemos:

$$\omega_{estrella-gran} = 0.6\ \omega_{estrella-pequeña}$$

$$\alpha_{estrella-gra}\ t = 0.6 \alpha_{estrella-pequeña} t$$

$$\alpha_{estrella-gran} = 0.6 \alpha_{estrella-pequeña}$$

Estas dos expresiones son importantes para resolver nuestro problema.

$$\omega_{estrella-gran} = 0.6\ \omega_{estrella-pequeña} \qquad \alpha_{estrella-gr} = 0.6 \alpha_{estrella-pequeña}$$

Para obtener el número de vueltas que alcanza la estrella pequeña, debemos conocer su aceleración angular. La vamos a calcular con la última expresión obtenida y la aceleración de la estrella grande que nos proporciona el problema.

$$\alpha_{estrella-gra} = 0.6 \alpha_{estrella-pequeña}$$

$$\alpha_{estrella-pequeña} = \frac{\alpha_{estrella-pequeña}}{0.6} = \frac{2\ rad/s^2}{0.6} = \frac{10}{3}\ rad/s^2$$

Con la aceleración angular de la estrella pequeña podemos calcular el desplazamiento angular y posteriormente el número de vueltas que ha dado en 8 s.

$$\theta_{Estrella-pequeña} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{Estrella-pequeña} t^2$$

Recordemos que la posición angular inicial y la velocidad angular inicial valen 0, previo acuerdo cuando se colocó el sistema de referencia. Por lo tanto, la ecuación de la posición angular se reduce a:

$$\theta_{Estrella-pequeña} = \frac{1}{2} \alpha_{Estrella-pequeña} t^2$$

Sustituimos los datos del ejercicio:

$$\theta_{Estrella-pequeña} = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\frac{rad}{s^2}\right)(8\ s)^2 = 106.67\ rad$$

Y para obtener el número de vueltas o revoluciones en 8 s, sustituimos en la siguiente ecuación:

$$No. vueltas = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{106.67\ rad}{2\pi} = 16.98$$

La estrella pequeña ha dado 16.98 vueltas desde el reposo hasta los 8 s.

Ejercicio 9. Una partícula realiza un movimiento circular no uniforme en una trayectoria de 2 m de radio, cuya velocidad angular está dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega = 3t^2 - 2t + 1}$$

donde el tiempo está en segundos y la velocidad angular está en radianes/segundo. Determine la aceleración de la partícula como función del tiempo. Considere que la partícula se encuentra inicialmente en θ = 0. El ángulo se mide referido a la rama positiva del eje *x*, y crece en la dirección convencional, contrario a las manecillas del reloj.

La coordenada angular θ(t) se obtiene al integrar la velocidad angular en el tiempo, como sigue:

$$\theta(t) = \int \omega(t)\, dt = \int (3t^2 - 2t + 1)\, dt = t^3 - t^2 + t + C$$

Y la constante de integración se obtiene al evaluar t = 0 en θ(t) como se muestra a continuación:

$$\theta(t = 0) = (0)^3 - (0)^2 + 0 + C = C$$

Y al igualarlo con la condición inicial, que es $\theta(t = 0) = 0$ se obtiene

$$C = 0$$

Al conocer la coordenada angular, el vector posición resulta:

$$\vec{r}(t) = (R\cos\theta(t)\, , R\,\mathrm{sen}\,\theta(t))$$

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t^3 - t^2 + t)\, , 2\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t))$$

A partir de la posición se puede obtener la aceleración al realizar dos derivadas en el tiempo.

Al derivar una vez, se obtiene la velocidad como función del tiempo, como sigue:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(2\cos(t^3 - t^2 + t)\, , 2\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t))$$

Se deriva componente a componente el vector,

$$\vec{v}(t) = \left(\tfrac{d}{dt}2\cos(t^3 - t^2 + t)\, , \tfrac{d}{dt}2\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)\right)$$

Y para cada derivada se emplea la regla de la cadena, como sigue:

$$\vec{v}(t) = \left(-2\left(\tfrac{d}{dt}(t^3 - t^2 + t)\right)\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)\, , 2\left(\tfrac{d}{dt}(t^3 - t^2 + t)\right)\cos(t^3 - t^2 + t)\right)$$

$$\vec{v}(t) = (-2(3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)\, , 2\,(3t^2 - 2t + 1)\cos(t^3 - t^2 + t))$$

Al derivar nuevamente, se obtiene la aceleración de la partícula, como se muestra abajo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(-2(3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t), 2\,(3t^2 - 2t + 1)\cos(t^3 - t^2 + t))$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d}{dt}(-2(3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)), \frac{d}{dt}(2\,(3t^2 - 2t + 1)\cos(t^3 - t^2 + t))\right)$$

La derivada de cada componente se hace por separado.

Primero, la componente x de la aceleración se obtiene a continuación:

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}(-2(3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t))$$

La derivada del producto de funciones se hace como sigue:

$$a_x(t) = \mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)\frac{d}{dt}\big(-2(3t^2 - 2t + 1)\big) + \big(-2(3t^2 - 2t + 1)\big)\frac{d}{dt}\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)$$

$$a_x(t) = \mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t)\,\big(-2(6\mathrm{t} - 2)\big) + \big(-2(3t^2 - 2t + 1)\big)\cos(t^3 - t^2 + t)\frac{d}{dt}(t^3 - t^2 + t)$$

Al rearreglar, se tiene:

$$a_x(t) = \big(-2(6\mathrm{t} - 2)\big)\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t) + \big(-2(3t^2 - 2t + 1)\big)(3t^2 - 2\mathrm{t} + 1)\cos(t^3 - t^2 + t)$$

$$\boldsymbol{a_x(t) = -2(6t - 2)\,\mathrm{sen}\big(t^3 - t^2 + t\big) - 2\big(3t^2 - 2t + 1\big)^2\cos\big(t^3 - t^2 + t\big)}$$

A continuación, se realiza el procedimiento equivalente para la componente y de la aceleración:

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}(2\,(3t^2 - 2t + 1)\cos(t^3 - t^2 + t))$$

La derivada del producto de funciones se hace como sigue:

$$a_y(t) = \cos(t^3 - t^2 + t)\frac{d}{dt}\big(2(3t^2 - 2t + 1)\big) + \big(2(3t^2 - 2t + 1)\big)\frac{d}{dt}\cos(t^3 - t^2 + t)$$

$$a_y(t) = \cos(t^3 - t^2 + t)\,\big(2(6\mathrm{t} - 2)\big) + \big(2(3t^2 - 2t + 1)\big)(-\,\mathrm{sen}(t^3 - t^2 + t))\frac{d}{dt}(t^3 - t^2 + t)$$

Al rearreglar, se tiene:

$$\boldsymbol{a_y(t) = 2(6t - 2)\cos\big(t^3 - t^2 + t\big) - 2\big(3t^2 - 2t + 1\big)^2\,\mathrm{sen}\big(t^3 - t^2 + t\big)}$$

Las expresiones para $a_x(t)$ y para $a_y(t)$ remarcadas en negritas son la solución al problema.