UNIDAD 10. DINÁMICA DE LAS ROTACIONES

Ejercicio 1. Se desea mover una tuerca que está en una pared vertical colocando una llave de forma horizontal, como se muestra en la imagen. Si la llave mide 20 cm de longitud y se aplica una fuerza de 100 N verticalmente hacia abajo en el extremo de la llave que es opuesto a la tuerca, determine la magnitud de la torca.

La torca es un vector que puede determinarse con el producto cruz entre el vector "brazo de palanca" y el vector fuerza aplicada, de forma que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como en el ejercicio se solicita la magnitud de la torca, entonces la ecuación anterior puede reescribirse:

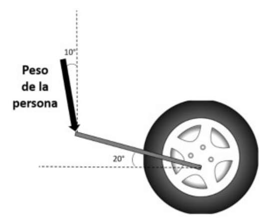
$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|sen\theta$$

Siendo theta el ángulo entre el vector brazo de palanca y el vector fuerza aplicada.

Considerando que la magnitud del vector brazo de palanca corresponde a la distancia entre el punto en el que se aplica la fuerza y la tuerca, entonces:

$$|\vec{\tau}| = (0.20\ m)(100\ N)sen90 = 20\ \text{Nm}$$

Ejercicio 2. Una persona cambia la llanta de su auto utilizando una llave de mano. Como las tuercas están apretadas utiliza su pie y apoya todo su peso sobre el extremo de la llave de mano, para así lograr aflojar las tuercas. La llave de mano tiene una longitud de 25 cm y se coloca como se muestra en la imagen. Calcule el vector torca que se produce sobre una de las tuercas cuando la persona la afloja. Considere que la masa de la persona es de 90 kg.

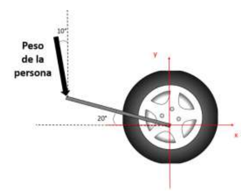


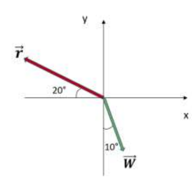
Para comenzar a resolver este ejercicio es necesario recordar la definición de torca:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Lo que podemos apreciar es que la torca es un vector, ya que proviene de un producto cruz entre dos vectores. Es por ello, que para poder resolver este ejercicio es necesario colocar un sistema de referencia y ubicar los dos vectores participantes en dicho sistema.

Se escoge colocar el sistema de referencia en donde está la tuerca, por lo tanto, se trasladan los vectores al origen de este sistema de referencia para poder realizar el producto cruz.





Para realizar el producto cruz es necesario conocer las componentes cartesianas de estos vectores:

$$\vec{r} = 0.25\ m(-cos20, sen20)$$

$$\vec{F} = (90\ kg)(9.81\ m/s^2)(sen10, -cos10)$$

Entonces se procede a realizar el producto cruz para obtener el vector torca

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -0.25mcos20 & 0.25msen20 & 0 \\ (90\ kg)(9.81m/s^2)sen10 & -(90\ kg)(9.81m/s^2)cos10 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} + 191.15Nm\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}\ (0, 0, 191.15)Nm$$

$$|\vec{\tau}\ | = 191.15\ Nm$$

Ejercicio 3. Se encuentra colgando del techo una barra metálica de longitud *L = 2.50 m* y masa *m = 3.50 kg*. La forma en que está suspendida de forma horizontal es a través de un par de cuerdas verticales que sujetan sus extremos (ver Figura 1). Considere que, en un cierto instante, una de las cuerdas verticales, por ejemplo, la del extremo de la derecha, se corta.

a. Determine la aceleración lineal con que cae el extremo B de la barra, inmediatamente después de cortar la cuerda.

b. ¿Será el valor de la aceleración lineal en ese instante igual a *g*? ¿Por qué?

Inicialmente la barra está en reposo. En el momento que se corta la cuerda del extremo derecho, actúa un ***momento de torsión neto*** τ sobre la barra, cuyo punto de pivote se encuentra en el extremo A, como se muestra en la **Figura 2**.

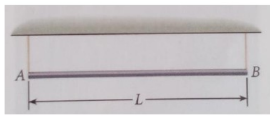


Figura 1. Barra metálica suspendida en forma horizontal por cuerdas verticales en sus extremos

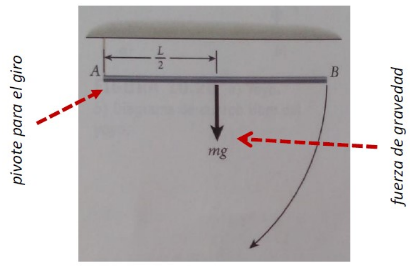


Figura 2. La barra metálica en el instante en que se ha cortado la cuerda vertical que soporta el extremo de la derecha – extremo B-.

La presente propuesta de resolución incorpora los siguientes temas incluidos en el Curso de Física 1: centro de masa, *CM*, de la Unidad 7, aceleración angular α, de la Unidad 9 y *momento de torsión neto* τ que es tema de la Unidad 10.

El vector momento de torsión neto $\vec{\tau}$, es el resultado del producto vectorial del vector de posición conocido como brazo de palanca $\vec{r}$ y el vector de fuerza neta $\vec{F}$, aplicada en el punto del brazo de palanca:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \dots (1)$$

La fuerza neta en este caso es la fuerza de gravedad, que actúa sobre la barra y si podemos considerar que la barra es simétrica y uniforme y por lo tanto su masa está concentrada en su centro de masa, ubicado en el punto$r = L/2$, la magnitud del momento de torsión en el instante en que se libera el extremo B de la barra es

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| sen\,\theta = r_{\perp} F_g = \left(\frac{L}{2}\right)(mg) = \frac{mgL}{2} \qquad \dots (2)$$

ya que ambos vectores involucrados son perpendiculares entre sí y θ = 90°, por lo que sen 90° = 1.

La aceleración angular inicial αdel movimiento circular de la barra, en torno al pivote en el extremo A, se puede relacionar con la aceleración lineal a del extremo B, que es la pregunta de este problema, por medio de la ecuación (3)

$$a = L\alpha \qquad \dots (3)$$

Además, la aceleración angular α, también tiene que ver con el momento de torsión τ , a través de la ecuación del movimiento de rotación (4)

$$|\vec{\tau}| = I\alpha \qquad \dots (4)$$

donde el momento de inercia *I*, definido como $I = \int r^2\, dm$ y que aplicado a la barra delgada que gira alrededor del punto pivotal A, da como resultado

$$I = \frac{1}{3} mL^2 \qquad \dots (5)$$

Combinado las ecuaciones (2) y (4) y sustituyendo la expresión (5) del momento de inercia de la barra se obtiene

$$\frac{mgL}{2} = I\alpha = \left(\frac{1}{3} mL^2\right)\left(\frac{a}{L}\right) \qquad \dots (6)$$

En la última parte de la igualdad ya se ha incorporado la relación entre la aceleración angular α con la aceleración lineal a de la ecuación (3), ya que no debemos perder de vista que estamos buscando la aceleración lineal con que cae el extremo B de la barra.

Simplificando y cancelando elementos comunes de ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\frac{g}{2} = \left(\frac{a}{3}\right) \qquad \dots (7)$$

Por lo que

$$a = \frac{3}{2}g = \frac{3}{2}\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right) = 14.7\,\frac{m}{s^2} \qquad \dots (8)$$

Para responder la segunda pregunta de este ejercicio vale la pena comentar que, aunque el valor numérico de la aceleración a pudiera sorprendernos, ya que podríamos haber supuesto que la aceleración alcanzada por el extremo B de la barra no puede ser mayor al de la caída libre, g, esto sucedería si ambas cuerdas se hubieran cortado simultáneamente, entonces $a = g$.

El resultado $a = 3/2\ g$ cobra validez si analizamos que toda la fuerza de gravedad está actuando sobre la barra y el extremo en A permanece fijo. Entonces la aceleración del extremo B no se debe sólo a la caída libre, sino que hay que adicionar una aceleración por el giro de la barra.

Ejercicio 4. Una cuerda ideal aplica una fuerza tangencial de 18 N a una polea que gira libremente a una distancia de 7 cm desde su eje de rotación. A la vez, esta polea hace girar un disco de 35 cm de radio unido a ella. Si la masa de todo este conjunto es de 2.4 kg y la cuerda no se desliza, calcule la rapidez angular del disco al cabo de 5 s así como la rapidez tangencial del disco y de la polea

En este caso como se desprecia la fricción, la fuerza constante que aplica la cuerda implica que la torca de esta fuerza también será constante, posibilitando la aplicación de las ecuaciones que involucran aceleración angular constante. La fuerza tangencial actúa en la dirección de la cuerda, por lo que la línea de fuerza es tangente a la polea y así el brazo de palanca será el radio de ésta.

La rapidez angular inicial (ω_0) es cero puesto que este sistema parte del reposo, por lo que

$$\omega = \alpha t$$

Por otra parte, ya que en este caso el brazo de palanca y la fuerza aplicada son perpendiculares entre sí, la magnitud de la torca total (τ) de esta fuerza es

$$\tau = Fr = I\alpha$$

Despejando la celeridad angular de esta ecuación y considerando a todo este sistema como un solo disco uniforme con momento de inercia $I = \frac{1}{2} MR^2$, se obtiene:

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{2Fr}{MR^2}$$

De este modo, la rapidez angular es

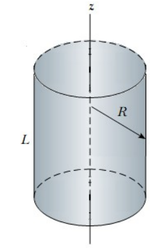
$$\omega = \frac{2Fr}{MR^2}t = \frac{2(18\ \mathrm{N})(0.070\ \mathrm{m})}{(2.4\ \mathrm{kg})(0.35\ \mathrm{m})^2}(5.0\ \mathrm{s}) = 43\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

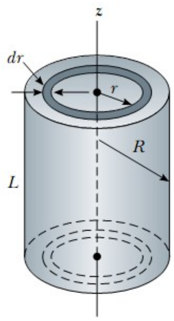
En el caso de la rapidez tangencial del disco y de la polea.

Para el disco: $v_{\mathrm{t-dis}} = R\omega = (0.35\ \mathrm{m})\left(43\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Para la polea: $v_{\mathrm{t-pol}} = r\omega = (0.070\ \mathrm{m})\left(43\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) = 3.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Ejercicio 5. Un cilindro sólido uniforme tiene un radio *R*, una masa *m* y una longitud *L*. Calcule el momento de inercia del cilindro con respecto a su eje central (el eje *z* de la figura)





Es conveniente dividir el cilindro en carcasas cilíndricas, cada una de radio r, espesor dr y una longitud L, como se muestra en la siguiente figura.

El volumen dV de cada carcasa es su área de sección transversal multiplicada por su longitud:

$$dV = dA\,L = (2\pi r dr)\,L$$

La masa por unidad de volumen es: $\rho = \frac{m}{V}$

Entonces la masa de este elemento de volumen diferencial es: $dm = \rho dV = \rho(2\pi r dr)L$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación que define al momento de inercia se obtiene la siguiente expresión:

$$I = \int r^2\,dm = \int \rho 2\pi L\,r^3 dr = \rho 2\pi L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Como el volumen total del cilindro es:

$$V = \pi R^2 L$$

Entonces:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 L}$$

Sustituyendo este valor en la expresión obtenida para el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4 = \frac{1}{2}\pi\frac{m}{\pi R^2 L} L R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

Ejercicio 6. Un cilindro uniforme sólido con masa de 8.25 kg y diámetro de 15 cm gira a 220 rpm sobre un eje delgado sin fricción que pasa a lo largo del eje del cilindro. Se diseña un freno de fricción sencillo para detener el cilindro empujando el freno contra el borde exterior con una fuerza normal. El coeficiente de fricción cinético entre el freno y el borde es de 0.333. ¿Qué fuerza normal debe de aplicarse para detener el cilindro después de girar 5.25 revoluciones?

Determinemos primero el momento de inercia del cilindro:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{1}{2}(8.25\,kg)(0.075\,m)^2 = 0.0232\,kgm^2$$

Ahora realicemos la conversión de la velocidad angular inicial de 220 rpm a rad/s.

$$\omega_0 = 220\,\frac{rev}{min}\left(\frac{2\pi\,rad}{1rev}\right)\left(\frac{1\,min}{60\,s}\right) = 23.03\,rad/s$$

Sabiendo que se desea que el sistema se detenga a las 5.25 revoluciones, o bien, a los 32.98 radianes, podemos determinar la aceleración angular según:

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\Delta\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2\Delta\theta} = \frac{-(23.03\,rad/s)^2}{2(32.98\,rad)} = 8.04\,rad/s^2$$

Como el cilindro se detiene por efecto de una torca cuya magnitud es el producto de la fuerza de fricción y la distancia del centro del cilindro a su superficie, podemos igualar dicha magnitud con el producto del momento de inercia u la aceleración angular para obtener la magnitud de la fuerza normal.

$$I\alpha = \mu N R \qquad \Longrightarrow \qquad N = \frac{I\alpha}{\mu R} = \frac{(0.0232\,kgm^2)(8.04\,rad/s^2)}{(0.333)(0.075\,m)} = 7.46\text{ N}$$

Ejercicio 7. La compuerta de un rector tiene una tapa que se activa mediante una manivela con volante circular. Para que el producto en el rector no se vea afectado, se necesita que el compartimiento alcance una rapidez angular de 520 rev/min, durante un intervalo de 10.40 s, partiendo del reposo. Determina la torca que se debe aplicar para cumplir con el requisito, sabiendo que el momento de inercia del volante es de 3.25 kg m².

Utilizaremos la definición de la torca, análoga a la segunda ley de Newton:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \qquad \ldots (1)$$

En donde z es el eje perpendicular al movimiento rotacional. Para emplear la ecuación uno, requerimos conocer la magnitud de la aceleración angular, la cual será calculada a través de la ecuación 2, dado que será una celeridad promedio.

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{z,0}}{t} \qquad \ldots (2)$$

Así, es posible sustituir la ecuación 2 en 1, y obtener el valor de la torca que nos solicitan. Para realizarlo, cambiaremos las unidades de la rapidez angular a rad/s.

$$\omega_z = (520\, rev/min)\left(\frac{2\pi rad}{rev}\right)\left(\frac{1min}{60s}\right) = 54.45\, rad/s$$

Sustituyendo 2 en 1

$$\sum \tau_z = I\,\frac{\omega_z - \omega_{z,0}}{t} \qquad \ldots (3)$$

Por último, resolvemos 3 numéricamente para obtener el resultado

$$\sum \tau_z = 3.25kgm^2\left(\frac{54.45rad/s - 0rad/s}{10.40s}\right) = 17.02Nm$$

Ejercicio 8. Considere una rueda de 6.0 kg con radio de giro de 0.40 m a 300 rpm.

a) ¿Cuál es el momento de inercia?

b) ¿Cuál es su energía cinética rotacional?

PLANTEAMIENTO

a) Recordar que el momento de inercia, *I*, es la medida de la inercia rotacional del cuerpo de masa *M* y se define a partir del radio de giro (*r*) alrededor de un eje como $I = mr^2$.

b) Para obtener la energía cinética de rotación, es necesario el cálculo del momento de inercia del inciso a) y conocer la velocidad de giro alrededor del eje. En este caso las unidades deben ser consistentes con el SI, por lo que las revoluciones por minuto (rpm) deberán expresarse en rad/s.

SOLUCIÓN

A) $I = mr^2$

$$I = (6\, kg)(0.40\, m)^2 = 0.96\, kgm^2$$

B) La energía cinética rotacional $KE_r = \frac{1}{2} I\,\omega^2$

$$\omega = 300\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi rad}{60\, s}\right) = 10\pi\,\frac{rad}{s}$$

$$\mathrm{KE_r} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2$$

$$\mathrm{KE_r} = \frac{1}{2}(0.96\, kgm^2)\left(10\pi\,\frac{rad}{s}\right)^2 = 473.74\,\frac{kgm^2}{s^2} = 473.74\ \mathrm{J}$$

Ejercicio 9. Una fuerza constante F, de 40 N se aplica tangencialmente al borde de una rueda de 20 cm de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30 kg•m². Calcule:

a) La aceleración angular

b) Si se parte del reposo, la rapidez angular después de 4.0 s

c) El número de revoluciones que ha dado en 4.0 s

d) El trabajo realizado sobre la rueda en 4.0 s

PLANTEAMIENTO

a) La aceleración angular se obtiene con el momento de inercia (I) y la torca o momento de torsión (τ). Considerando que la rueda siempre gira alrededor de un eje y que la fuerza es tangencial, el ángulo entre la fuerza y el eje de radio de giro es 90°. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| sen\theta \quad \therefore \ \tau = rF$, y por otro lado $\tau = I\alpha$

b) y c) Habiendo obtenido α, a través de las relaciones de cinemática, la condición de que parte del reposo y el tiempo se calcula ω (4 s) y θ (4 s).

d) Se puede utilizar el teorema del trabajo y la energía, considerando que no hay pérdidas por fricción. Así toda la energía cinética rotacional será equivalente al trabajo realizado por la fuerza, o bien por la definición W = τ θ.

SOLUCIÓN

a) $\tau = rF \qquad \tau = I\alpha \qquad \tau = \tau$

$$rF = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{rF}{I} = \frac{(0.2\ m)\left(40\ \frac{kgm}{s^2}\right)}{30\ kgm^2} = 0.27\frac{rad}{s^2}$$

b) Llamemos ω_1 a la velocidad angular adquirida luego de 4 segundos

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

Sí $\omega_0 = 0$

$$\omega(t) = \alpha t$$

$$\omega(4) = \left(0.27\frac{rad}{s^2}\right)(4\ s) = \omega_1 = 1.08\frac{rad}{s}$$

c) Se obtienen los radianes que ha girado y posteriormente convertimos a revoluciones

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

Sí $\omega_0 = 0$

$$\theta = \frac{\omega_1^2}{2\alpha} = \frac{\left(1.08\frac{rad}{s}\right)^2}{2\left(0.27\frac{rad}{s^2}\right)} = 2.16\ rad$$

$$\theta = 2.16\ rad\left(\frac{1\ rev}{2\pi\ rad}\right) = 0.34\ rev$$

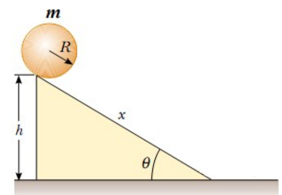
d) $KE_r = \frac{1}{2}I\omega^2$ o bien W = τ θ

$$\mathrm{KE_r} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 = \frac{1}{2}(30\ kgm^2)\left(1.08\ \frac{rad}{s}\right)^2 = 17.50\ \mathrm{J}$$

$$\mathrm{W} = \tau\ \theta$$

$$\mathrm{W} = I\alpha\theta = (30\ kgm^2)\left(0.27\frac{rad}{s^2}\right)(2.16\ rad) = 17.50\ \mathrm{J}$$

Ejercicio 10. Para la esfera sólida que se muestra en la figura, calcula la velocidad del centro de masa en la parte inferior de la pendiente yla magnitud de la aceleración lineal del centro de masa.



La esfera inicia su movimiento desde la parte superior de la pendiente, con energía potencial U = mgh y energía cinética K = 0 J. Si cayera verticalmente desde esa altura, tendría una velocidad lineal $v = \sqrt{2gh}$ en el momento antes de golpear el suelo.

Luego de rodar por la pendiente, la velocidad lineal del centro de masa de la esfera debe ser menor que $\sqrt{2gh}$ porque parte de la energía potencial inicial U = mgh se convierte en energía cinética de rotación en lugar de convertirse toda en energía cinética de traslación.

Considerando la energía cinética para un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

Como $v = R\omega \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = R\omega$

Por lo tanto:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m {v_{CM}}^2$$

Usando el hecho de que para el movimiento de rotación puro (rodadura) la velocidad el centro de masa es, $v_{CM} = R\omega$, entonces se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} M {v_{CM}}^2$$

Desarrollando esto:

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + m\right) {v_{CM}}^2$$

Cuando la esfera llega a la parte más baja del plano inclinado, el campo gravitacional ha realizado un trabajo igual a mgh, donde h es la altura del plano inclinado. Debido a quela esfera parte del reposo desde la parte superior, su energía cinética en la parte inferior debe igualar a ese trabajo realizado. Por lo tanto, la rapidez del centro de la masa en la parte inferior del plano se puede obtener equiparando estas dos energías a través de la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E = 0 \quad \therefore \quad K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$K_f + 0 = 0 + U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + m\right) {v_{CM}}^2 = mgh$$

Despejando se obtiene:

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}}\right)^{1/2}$$

Para una esfera sólida uniforme su momento de inercia es: $I = \frac{2}{5} m R^2$

Por lo tanto, la velocidad lineal del centro de masa es:

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7} gh \right)^{1/2}$$

esta velocidad es menor que $\sqrt{2gh}$

Para calcular la aceleración lineal del centro de masa, observamos que el desplazamiento vertical está relacionado con el desplazamiento en x a lo largo de la pendiente a través del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo que representa el plano inclinado:

$$h = x\ sen\theta$$

Por lo tanto, después de elevar al cuadrado ambos lados, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$v_{CM}{}^2 = \frac{10}{7} gx\ sen\theta$$

De cinemática se sabe que:

$$v_f{}^2 = v_0{}^2 + 2a\left(x_f + x_0\right)$$

Entonces:

$$v_{CM}{}^2 = 0 + 2a_{CM}(x)$$

$$a_{CM} = \frac{v_{CM}{}^2}{2x} = \frac{\frac{10}{7} gx\ sen\theta}{2x} = \frac{5}{7} g\ sen\theta$$

Estos resultados muestran que tanto la velocidad como la aceleración del centro de masa son independientes de la masa.