REPASO DE VECTORES

GRM Semestre 2020-2

Basado en material de

Serway-Jewett, Physics, Chapters 3, 6,10; Volume 1.

Bauer-Westfall, Fisica para ingeniería y ciencias, caps. 1, 5 y 10, Volumen 1

Tipler-Mosca, Física para la ciencia y la tecnología, Volumen 1

Ohanian-Markert, Fisica para Ingeniería y Ciencias, cap. 3 Volumen 1

2.1 Escalares y Vectores

- Una cantidad ***escalar*** se encuentra completamente especificada por un valor numérico (magnitud) con unidades apropiadas y no posee dirección.

De 8 ejemplos de escalares

- Una cantidad ***vectorial*** está descrita por completo por un valor numérico con unidades apropiadas y una dirección.

De 8 ejemplos de vectores

VECTOR

- Es un concepto matemático útil para describir **posición**, **aceleración**, **velocidad**, **fuerza**, **cantidad de movimiento, etc.** en 1, 2 y 3 dimensiones.

- De manera gráfica se les representa como flecha, con un punto inicial (origen, cola) y un punto final (punta o cabeza)

Un VECTOR posee

- **dirección** y
- **magnitud** (tamaño, longitud, norma, módulo), frecuentemente con unidades.

La magnitud SIEMPRE ES UNA CANTIDAD POSITIVA.

Notación Vectorial

- Con una flecha encima o con **negritas**:

$$\mathbf{A} \qquad \vec{A}$$

- Se emplean letras *itálicas* o entre un par de líneas paralelas cuando se refiere a la magnitud del vector: *A* o |**A**|

$$|\vec{A}|$$

Operaciones con vectores

- Suma vectorial
- Resta de vectores
- Multiplicación
  - Producto punto o escalar
  - Producto cruz o vectorial

Las cuales son diferentes de las sumas, restas y multiplicaciones ordinarias de números simples

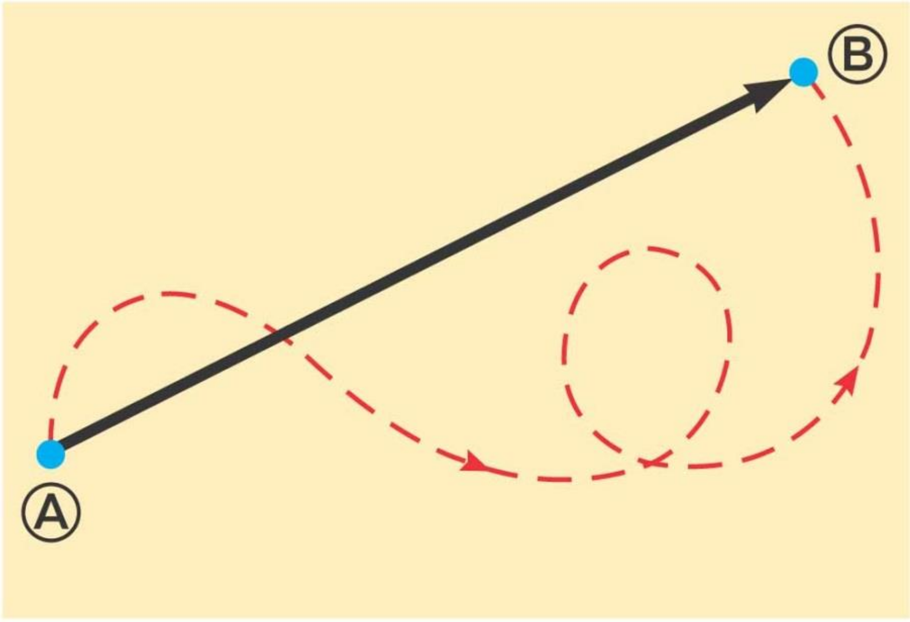
2.2 REPRESENTACIONES VECTORIALES.

Ejemplo de un
Vector de desplazamiento

- La *distancia* que se viaja es un escalar.
- El **desplazamiento** (cambio de posición) es un **vector.**
- El vector de ***desplazamiento*** es la línea sólida desde A a B.

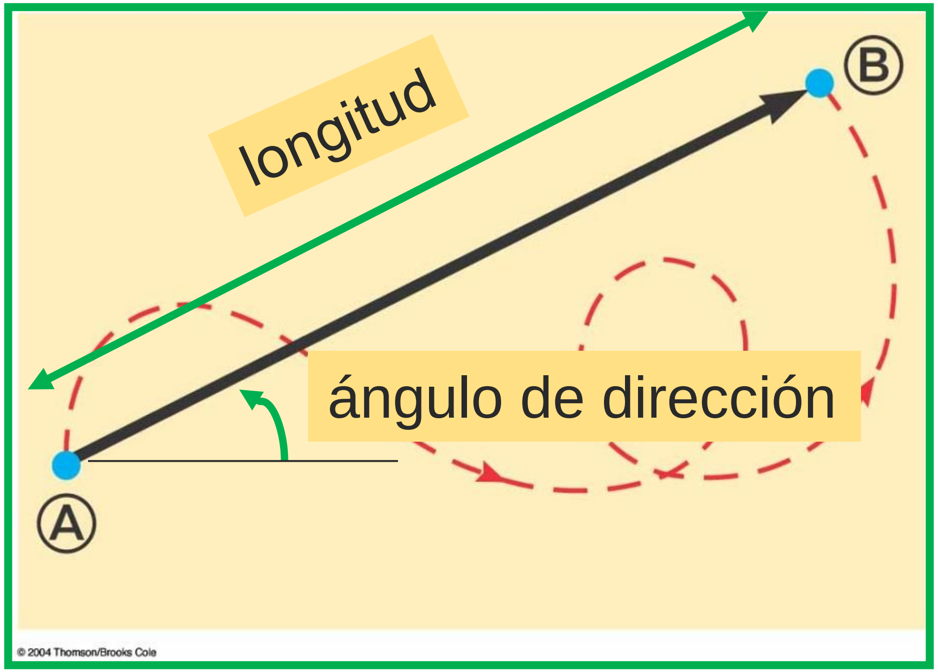
- El desplazamiento es independiente de la trayectoria que se tome entre los dos puntos.

- Una partícula viaja de A a B a lo largo de una trayectoria mostrada por la línea punteada



Vector de desplazamiento

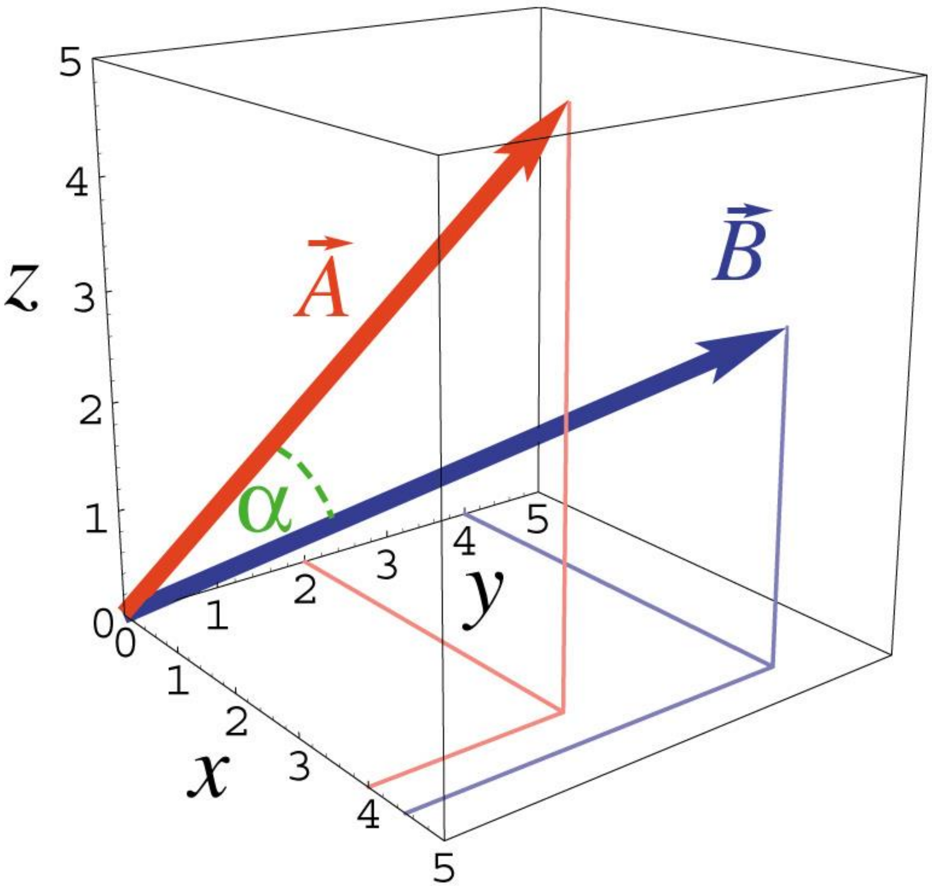
posición final



posición inicial

Ejemplo: 2790 metros, $\angle$ 65° al este del norte (noreste)

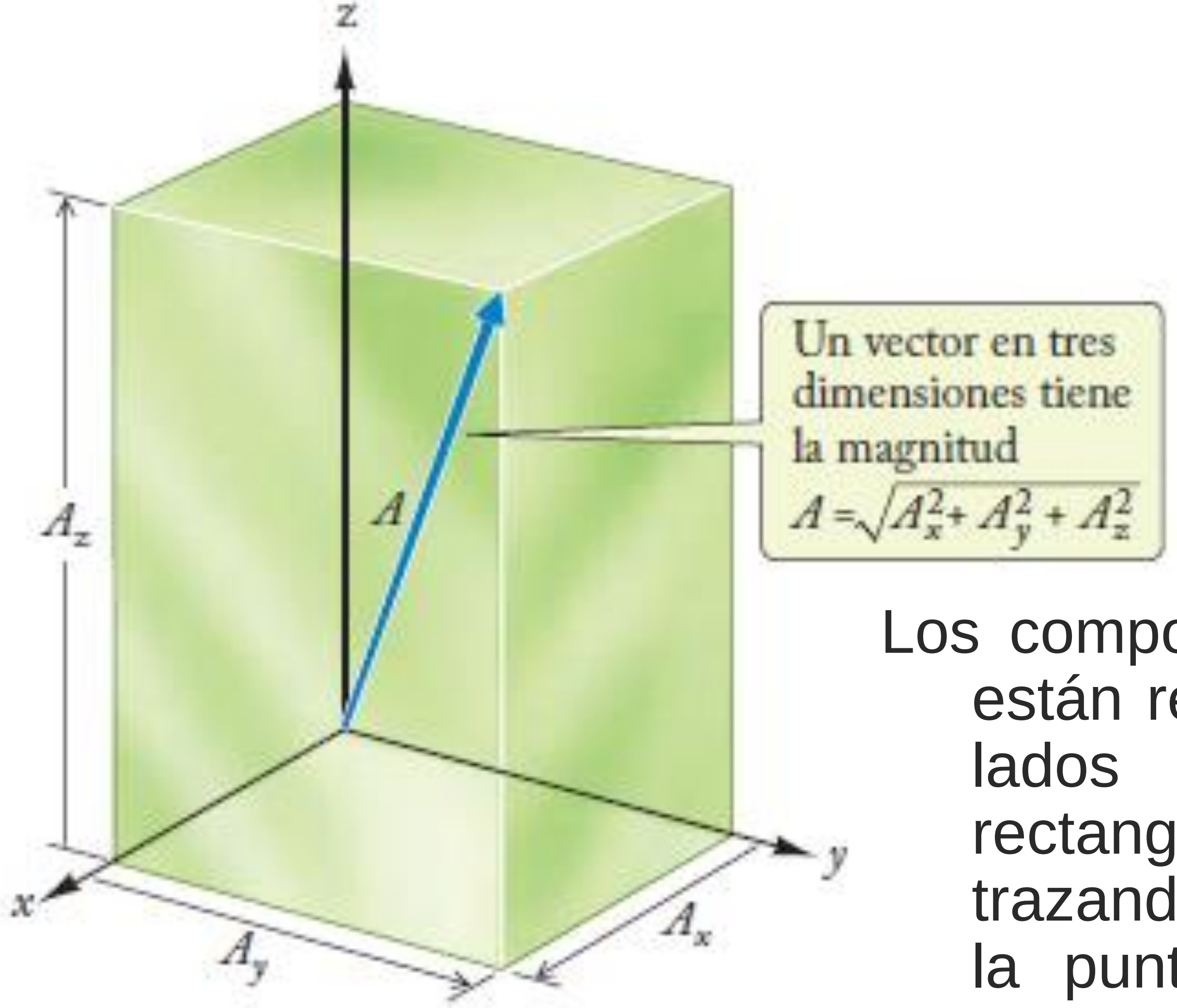
2.2 REPRESENTACIONES VECTORIALES.
Dos vectores en 3 - D



Ejemplo, en un Sistema de coordenadas de 3-D, ubique los vectores

A = (4.00, 2.00, 5.00) cm
B = (4.50, 4.00, 3.00) cm

2.2 Representación de un vector en 3 dimensiones



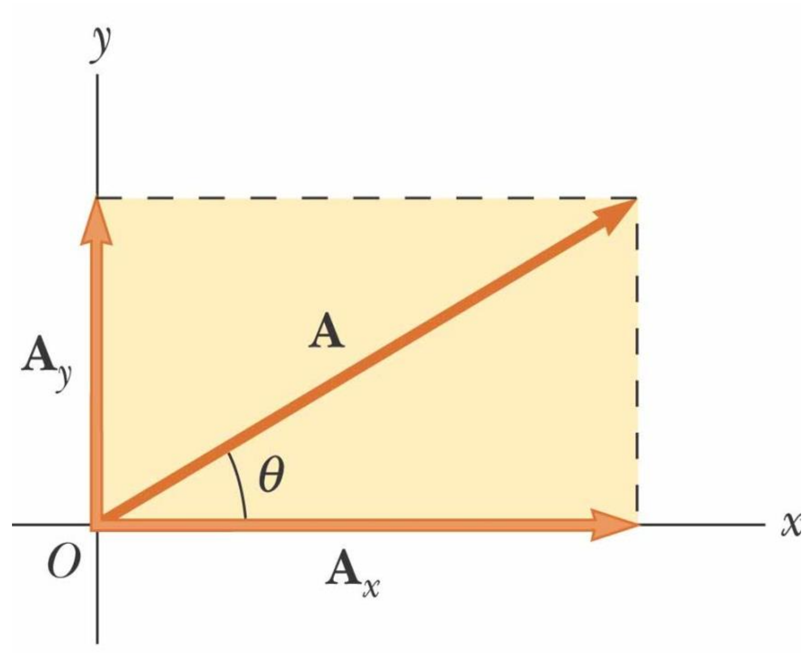
Los componentes A_x , A_y y A_z están representados por los lados de una caja rectangular, construida trazando perpendiculares de la punta del vector a los planos $x - y$, $x - z$ y $y - z$.

2.3 Componentes ortogonales de los Vectores

- **Componente** significa "parte".

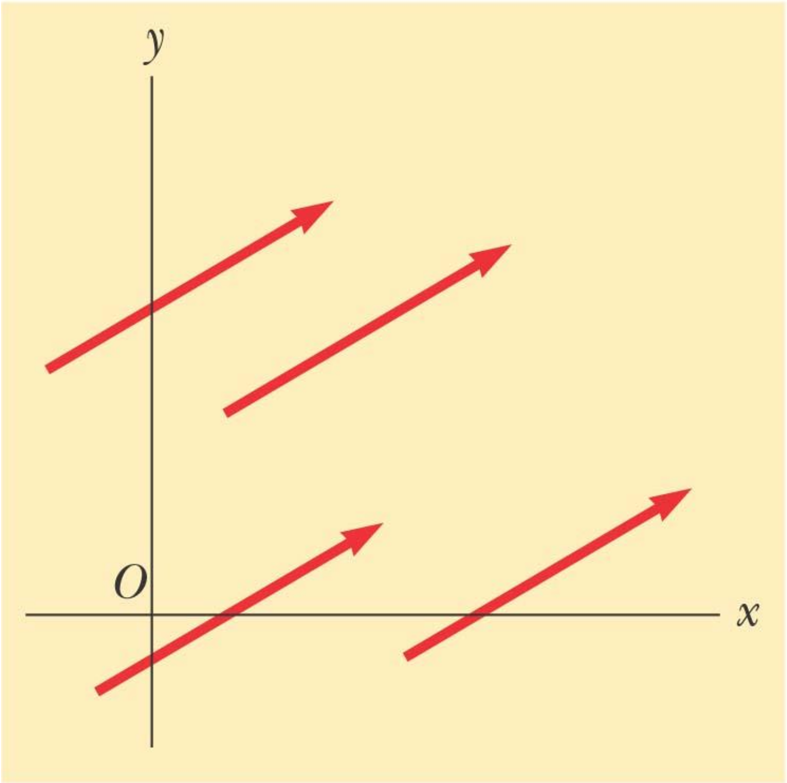
- Las **componentes ortogonales rectangulares** son proyecciones a lo largo de los ejes x, y.

- Los **vectores componentes** son los vectores que sumados vectorialmente dan la resultante.



2.4 Igualdad entre vectores

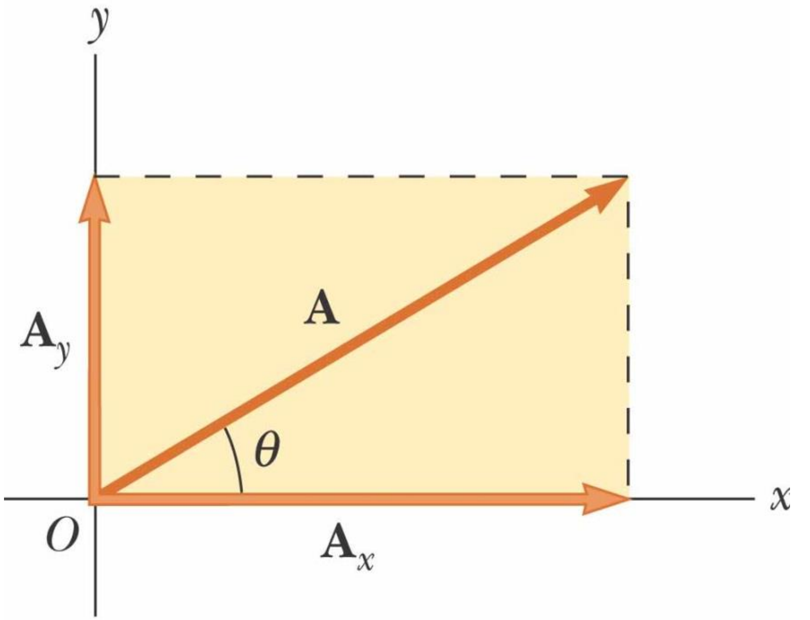
- Dos vectores son **iguales** si poseen la misma magnitud y la misma dirección.
- **A** = **B** si *A* = *B* y apuntan a lo largo de líneas paralelas
- Todos los vectores mostrados a continuación son iguales



2.5 Perpendicularidad entre vectores

- Ejemplo:

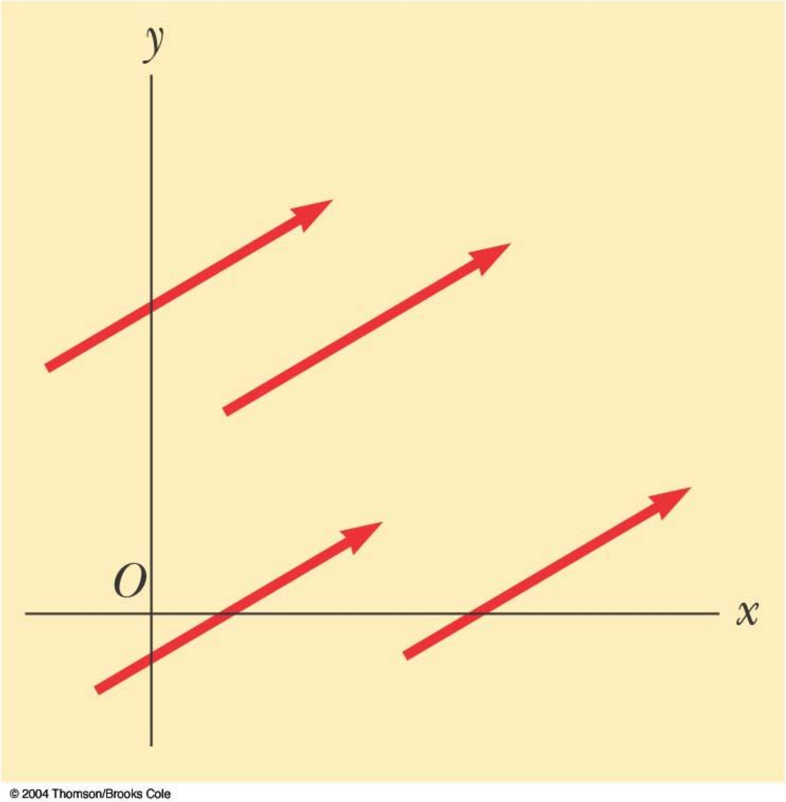
Los **vectores componentes** $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_x$ que se ilustran, son <u>proyecciones</u> del vector **A** a lo largo de los ejes x, y.



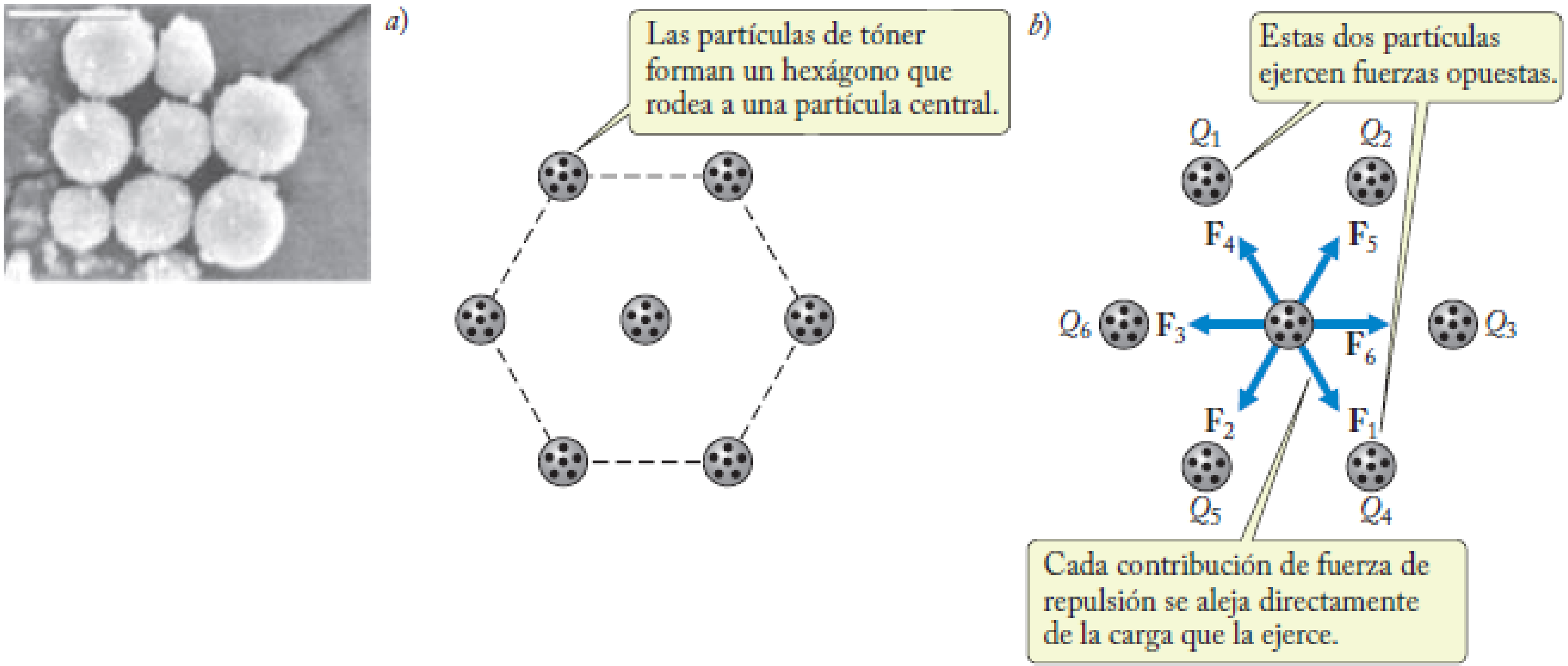
- Recuerde que los **vectores componentes** son los vectores que sumados <u>vectorialmente</u> dan el vector resultante.

2.6 Paralelismo entre vectores

- Note que los siguientes vectores llevan la misma dirección…..se dice que son **paralelos**



Antiparalelismo entre vectores



a) Micrografía electrónica de barrido donde se ven partículas de tóner para impresora láser
b) Fuerzas eléctricas sobre la partícula central, debidas a cada una de las otras seis

2.7 Suma de vectores

- En la suma de vectores debe tomarse en cuenta <u>sus direcciones</u>.
- Las unidades de las cantidades vectoriales deben ser las mismas.

Se emplean dos métodos de suma:

- Métodos gráficos
  - Se requieren dibujos a escala
- Métodos algebraicos o por componentes
  - Más convenientes cuando se manejan varios vectores y vectores en 3-D

Suma de vectores de desplazamiento

- Dos o más desplazamientos que se llevan a cabo en forma sucesiva dan por resultado un **DESPLAZAMIENTO NETO**, considerado como la suma vectorial de los desplazamientos individuales

- La suma de vectores recibe el nombre de **RESULTANTE.**

Ejemplo de suma de vectores

- Una lancha de motor que se mueve desde una isla, tiene dos desplazamientos. El primer vector desplazamiento es de 2180 m al este y el segundo de 1790 m al sur.

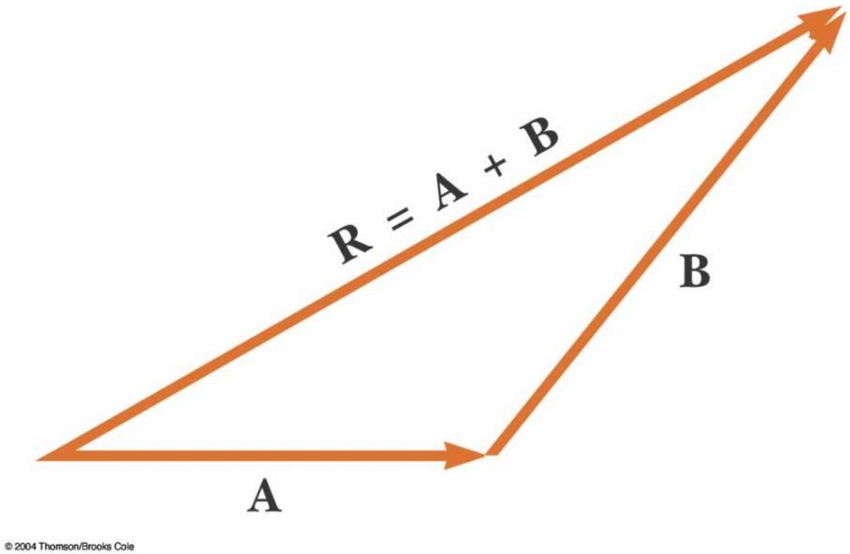
¿Cuál es el desplazamiento neto o resultante?

Suma gráfica de vectores, continuación

1) Seleccione una escala para su dibujo.

2) Dibuje el primer vector **A** con la longitud adecuada, en la dirección especificada con respecto a un **sistema de coordenadas**.

3) Dibuje el siguiente vector **B** (también con la longitud apropiada, en la dirección especificada con respecto al sistema de coordenadas), cuyo origen sea la punta del primer vector.

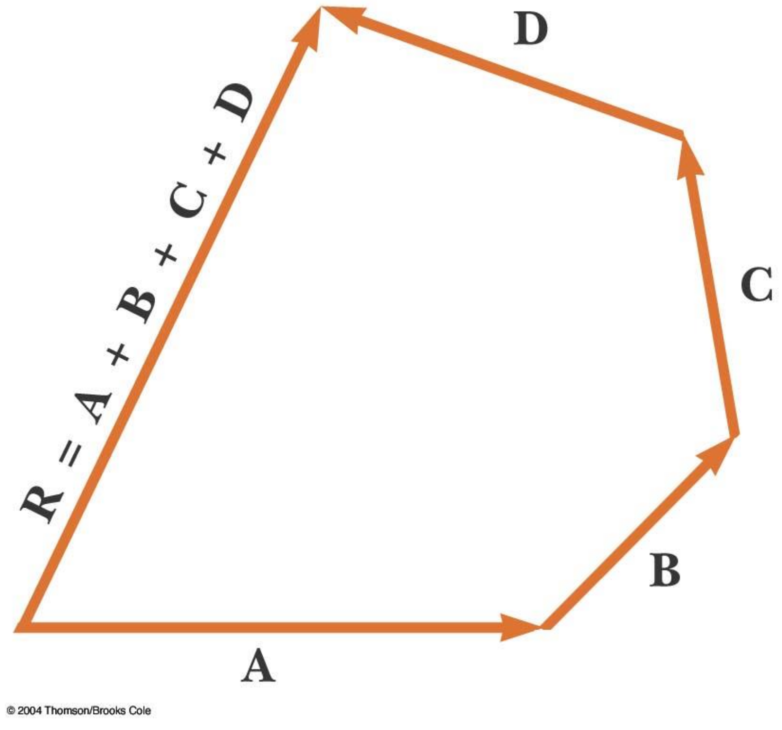


4) El **vector resultante R** se dibuja a partir del origen del primer vector (cola) al final del último vector (punta)

5) Mida la longitud de **R** y su ángulo (regla y transportador)

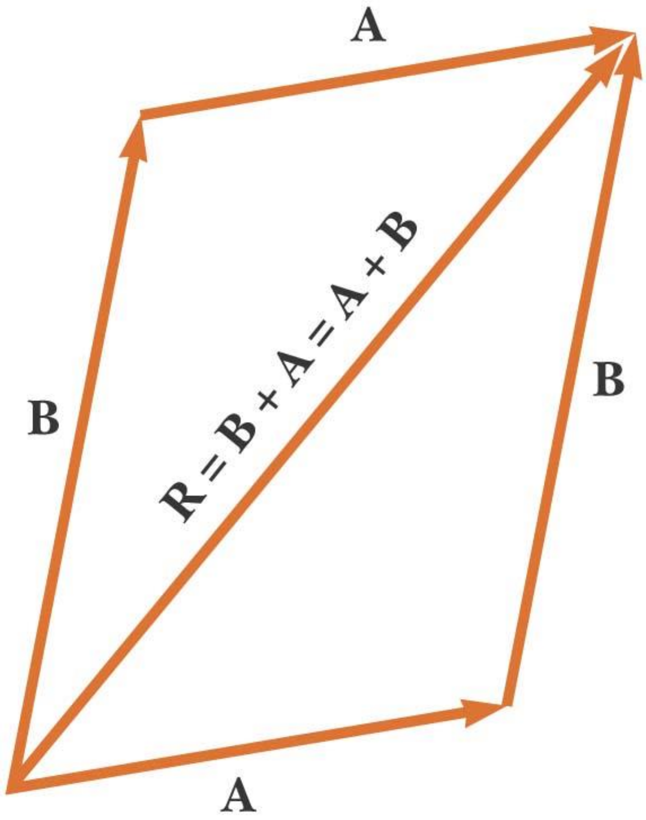
Suma grafica de vectores, fin.

- Para varios vectores se repite el proceso hasta incluir todos los vectores.
- El vector resultante se dibuja desde el origen del primer vector al final del último vector.



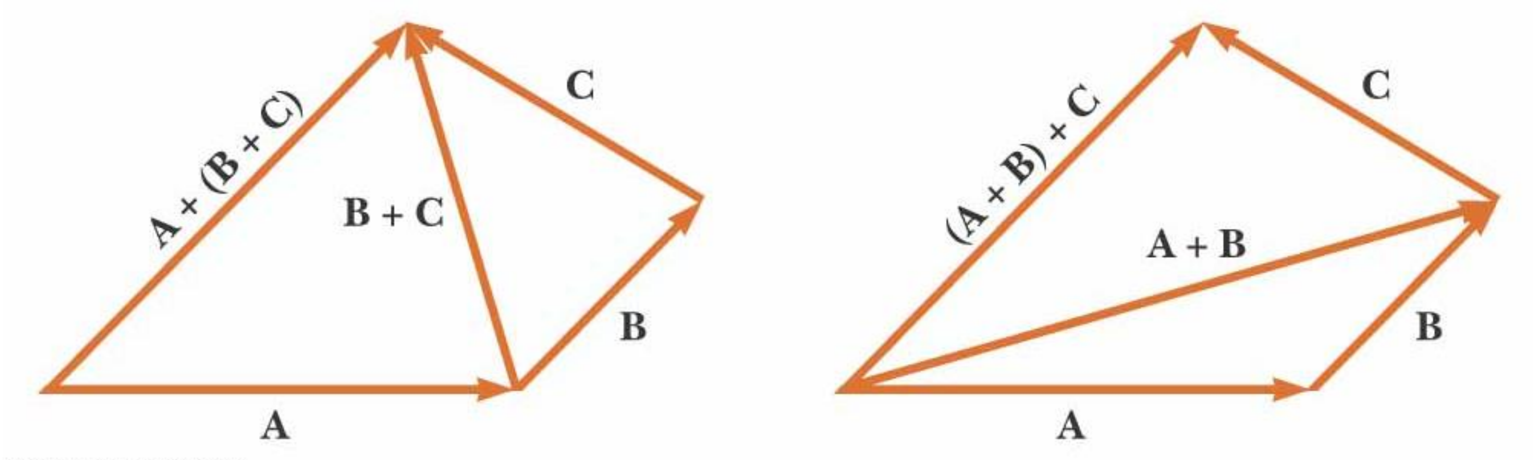
Reglas para Suma de vectores

- La suma es independiente del orden de adición de vectores
  - Ley ***conmutativa de la adición***
  - **A** + **B** = **B** + **A**



Reglas para Suma de vectores

- Cuando se suman 3 o más vectores, la suma es independiente del modo en el cual se agrupan los vectores: ***Propiedad Asociativa de la Suma*** **(A + B) + C = A + (B + C)**



- Recuerde: en la suma de vectores, todos los vectores deben tener las mismas unidades y ser del mismo tipo:
  - No se pueden sumar, por ej. desplazamientos con fuerzas.

Negativo de un Vector

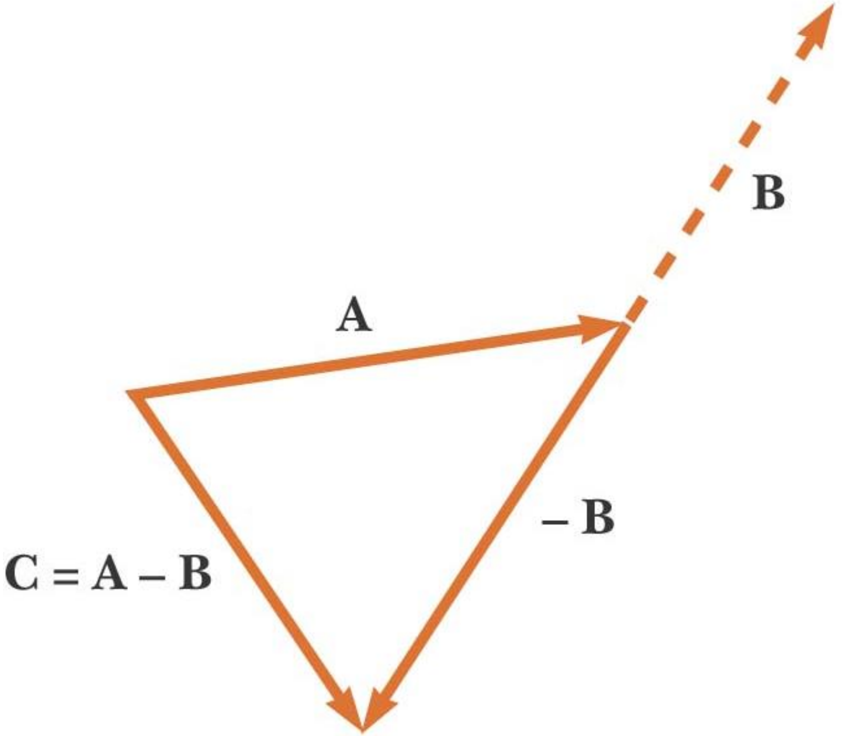
Concepto útil para resta de vectores

- Se define el negativo de un vector como aquel que sumado con el vector original, da como resultante cero.
  - Se representa como –**A**
  - **A** + (-**A**) = 0
- El negativo de un vector posee la misma magnitud que el vector original, pero apunta en dirección opuesta.

Es decir, es antiparalelo al primer vector

Resta de Vectores

- Es un caso especial de la adición.
- Si se quiere restar **A** – **B**, se puede emplear **A**+(**-B**)
- Y continuar con el procedimiento usual de adición de vectores



(a)

Vector de posición, r

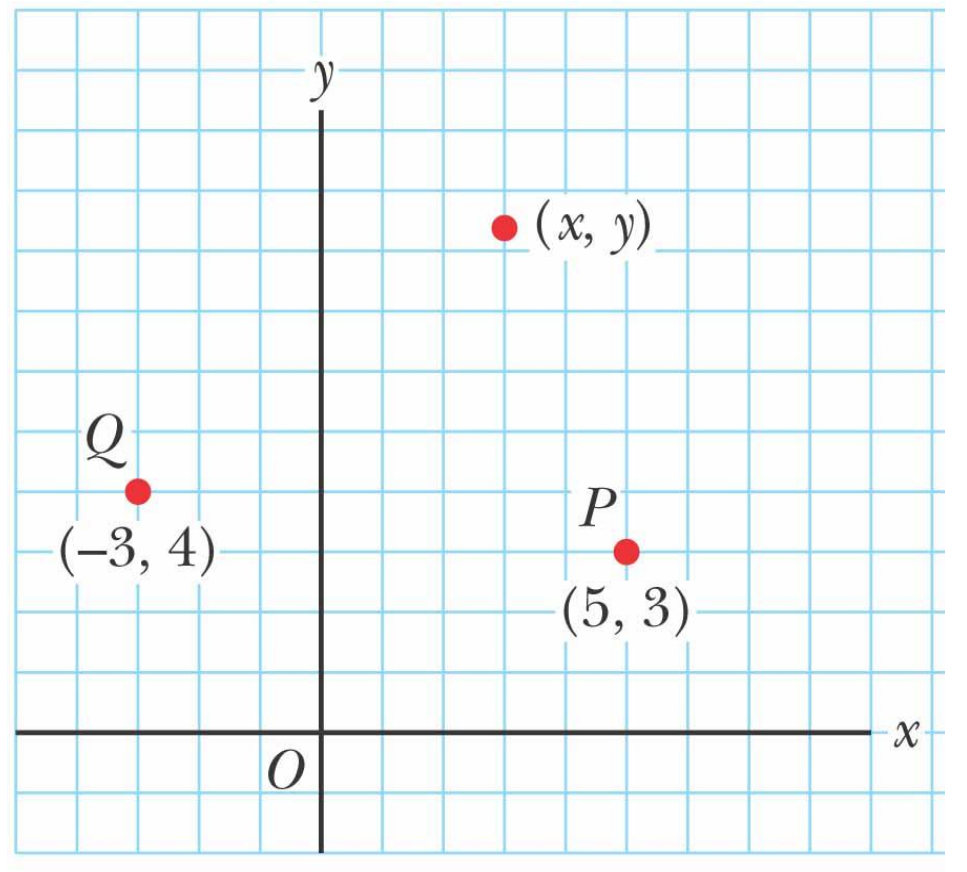
- Es útil para describer la posición de un
  - Punto,
  - Partícula
  - Objeto en el espacio.

- Debe elegirse un origen fijo y construir una cuadrícula de coordenadas.

- Si la cuadrícula es rectangular: se da la posición en coordenadas rectangulares de posición x, y, z

Sistema de Coordenadas Cartesianas, 2-D

- Llamado también sistema de coordenadas rectangulares.
- Los ejes *x*- and *y*- se intersectan en el origen. Son ejes específicos con nombre y escala.
- Los puntos se etiquetan como (*x*,*y*)

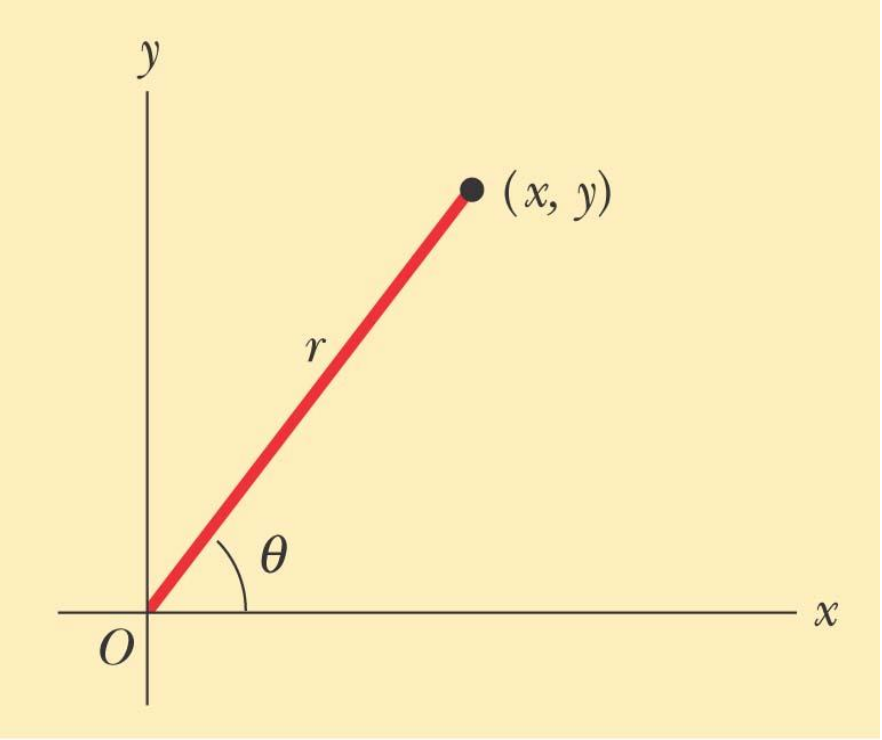


Sistema de Coordenadas Polares

- Se muestra el origen y un
  eje de referencia.

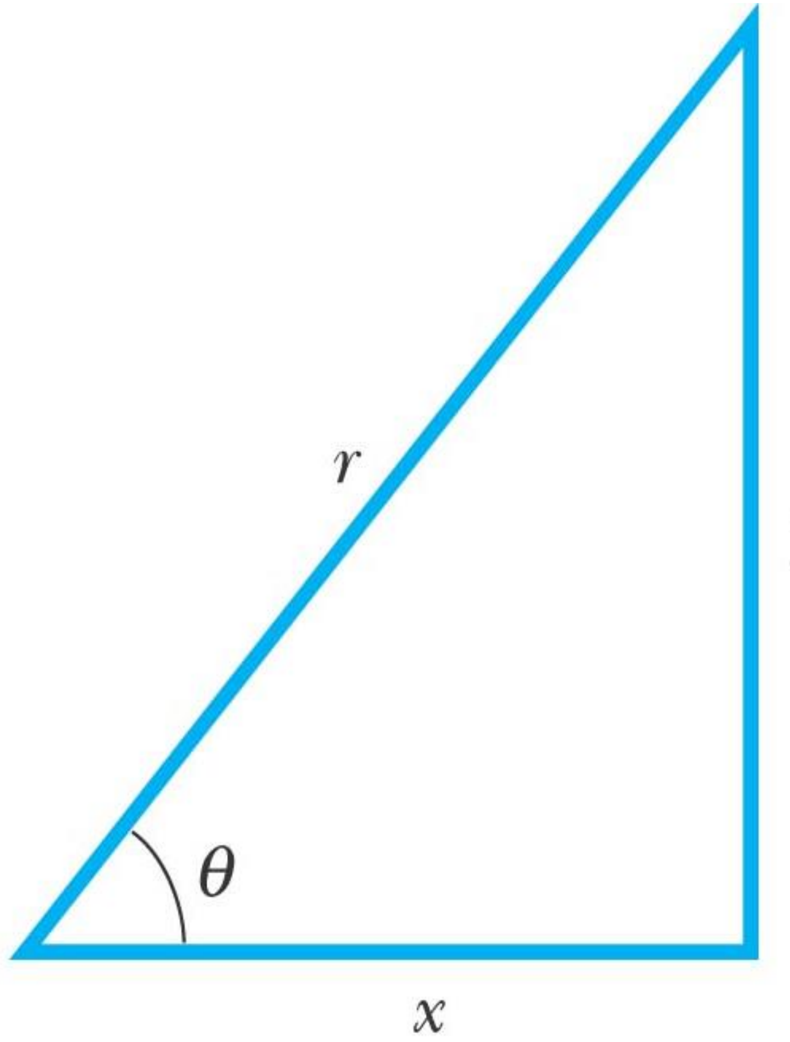
- Un punto a una distancia
  desde el origen en la
  dirección del ángulo θ,
  medido desde el eje de
  referencia.

- Los puntos son
  identificados como (r, θ)



Cambio de coordenadas Polares lineales a coordenadas Cartesianas (1)

- Note que se forma un triángulo rectángulo a partir de r y θ.
- El vector de posición **r** tiene una magnitud (hipotenusa) y una dirección, dada por el ángulo θ

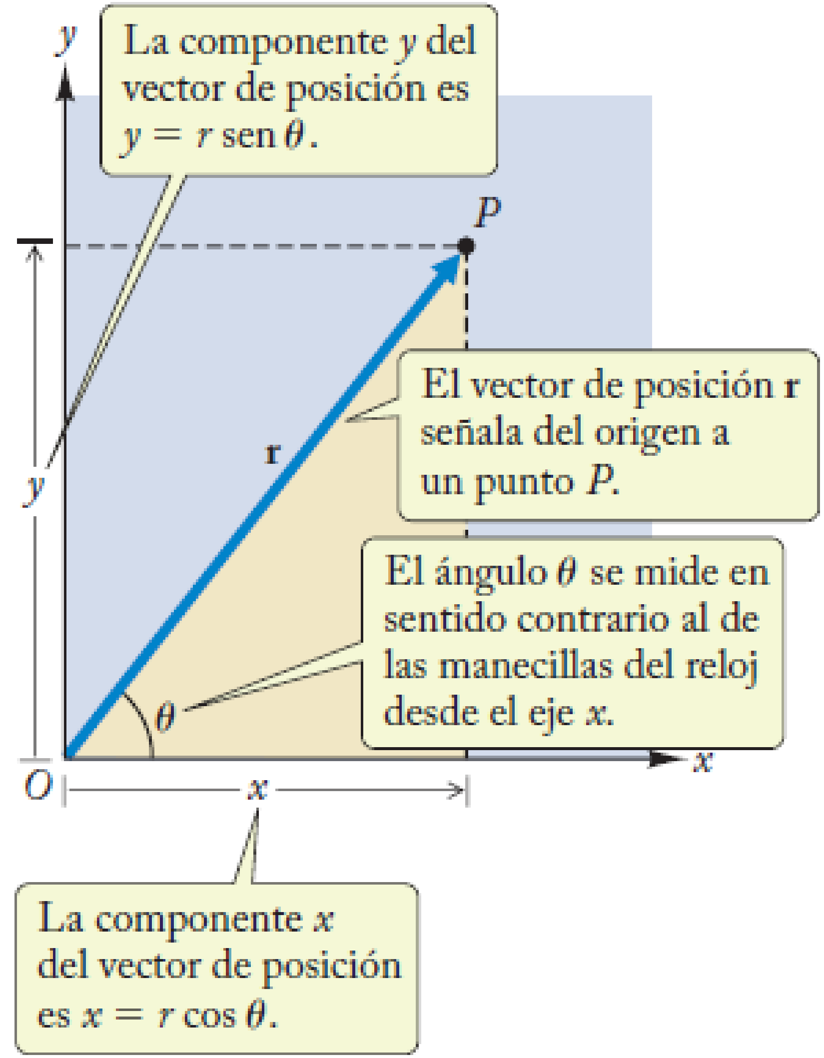


Cambio de coordenadas Polares lineales a coordenadas Cartesianas (2)

- Las coordenadas x, y forman los catetos del triángulo rectángulo.
- las definiciones de las funciones trigonométricas seno y coseno,

nos permiten establecer que, para el triángulo mostrado:

- $x = r \cos \theta$
- $y = r \operatorname{sen} \theta$

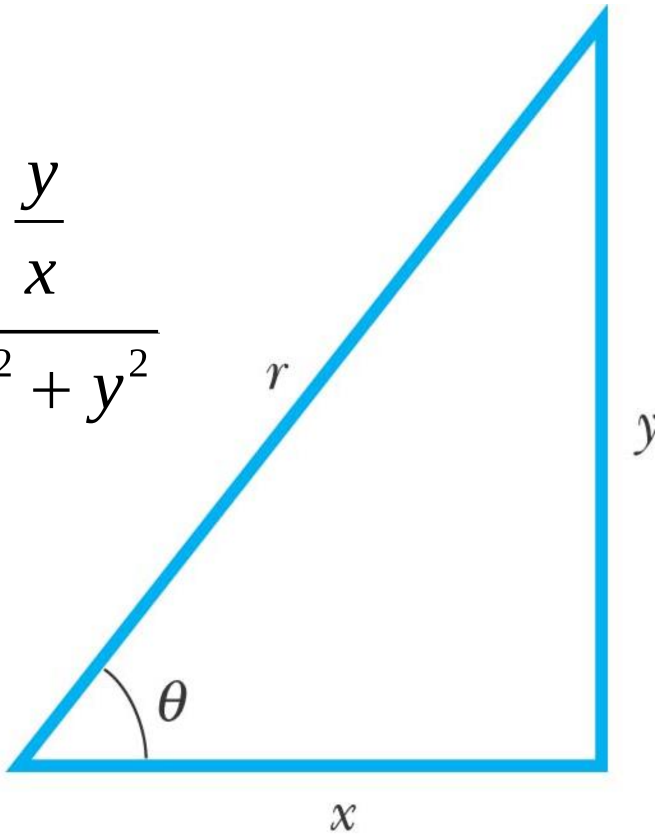


Cambio de coordenadas cartesianas a polares (3)

- *Si* ***r*** es la hipotenusa y θ es el ángulo, auxiliándonos de la función tangente

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



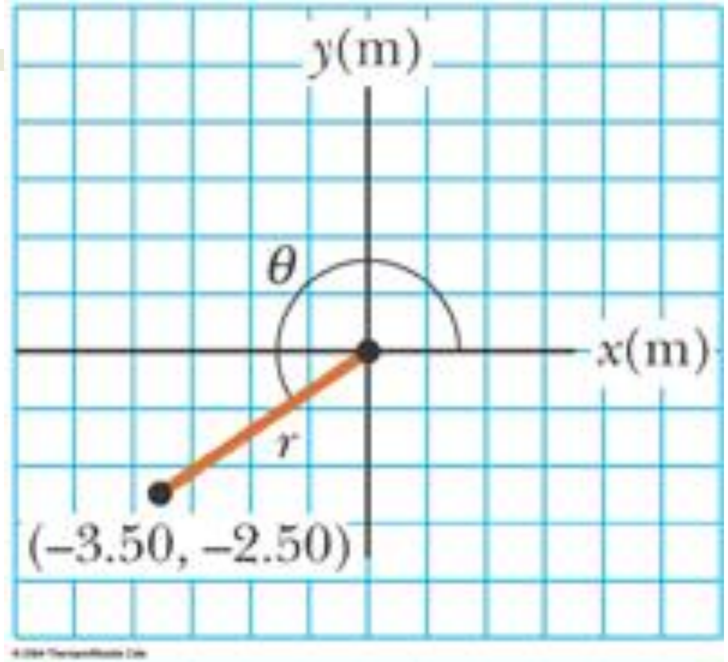
- Siendo la última ecuación el Teorema de Pitágoras.

- FORMA BIEN ACEPTADA:

θ debe ser medido desde el eje positivo x, en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Ejemplo

- Las coordenadas cartesianas de un punto xy sobre el plano son (*x*,*y*) = (-3.50, -2.50) m. Encuentre las coordenadas polares para este punto.



- **Solución:**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\ \mathrm{m})^2 + (-2.50\ \mathrm{m})^2} = 4.30\ \mathrm{m}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\ \mathrm{m}}{-3.50\ \mathrm{m}} = 0.714$$

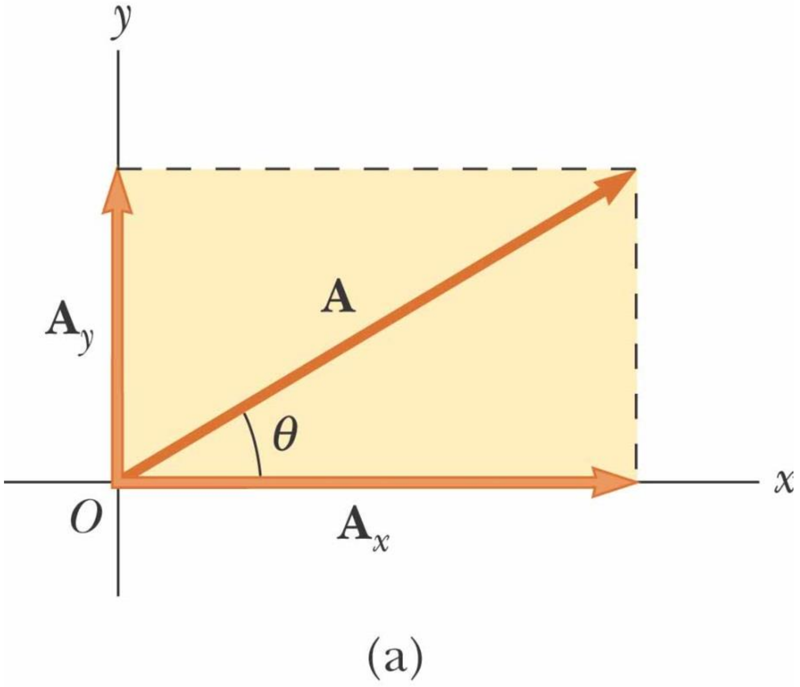
$$\theta = 216°$$

Recordatorio 2.3 Componentes ortogonales de un Vector (1)

- **Componente** significa "parte".

- Las **componentes rectangulares** <u>son proyecciones</u> a lo largo de los ejes x, y.

- Los **vectores componentes** son los vectores que sumados <u>vectorialmente</u> dan la resultante.

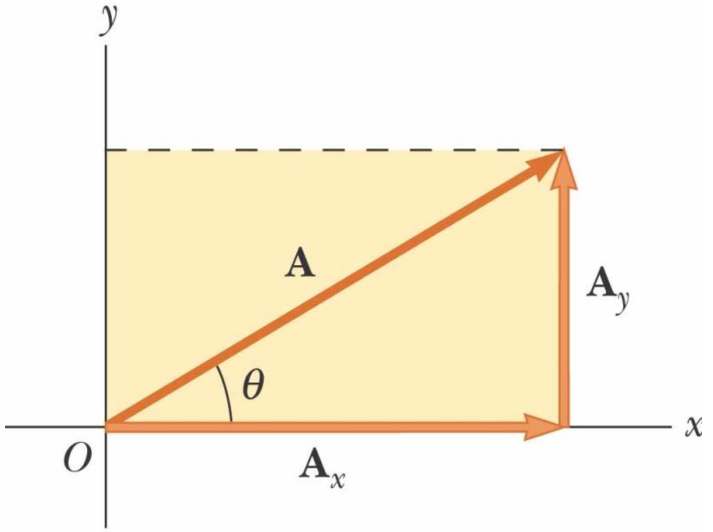


2.3 Componentes ortogonales de un Vector (2)

- $\mathbf{A_x}$ y $\mathbf{A_y}$ son los ***vectores componentes*** de **A**
- A_x y A_y son escalares, y se les conoce como ***componentes rectangulares*** de **A**

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$



Componentes de un Vector (3)

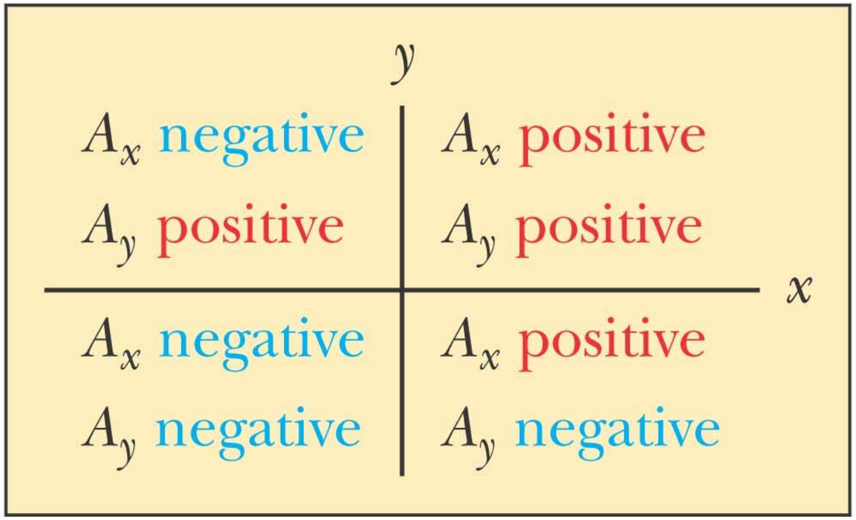
- Para el triángulo rectángulo de la lámina anterior, si se requiere conocer la magnitud y dirección del vector **A** se emplea

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x}$$

Componentes de un Vector (4)

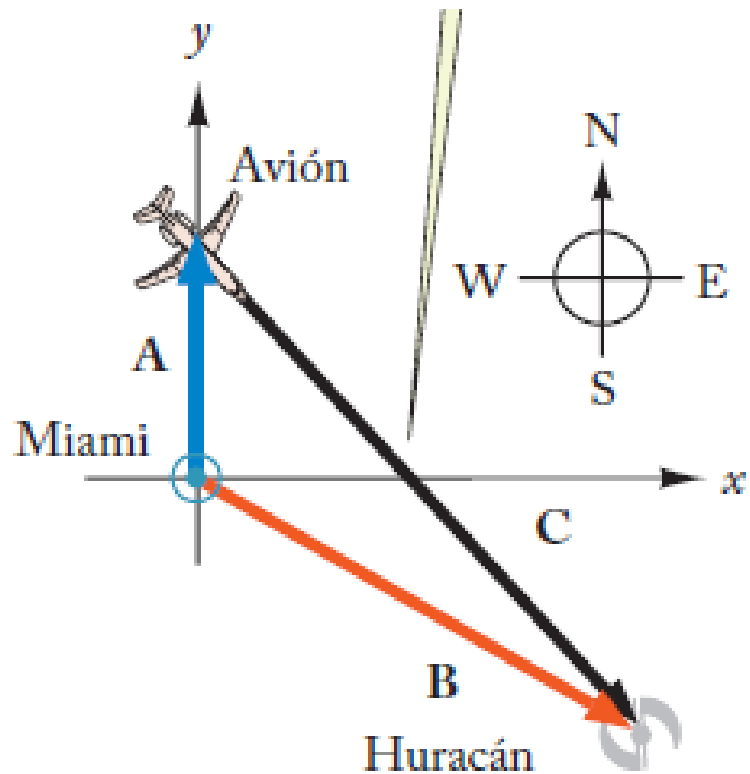
- Las componentes rectangulares pueden ser positivas o negativas y tendran las mismas unidades que el vector original.
- Los signos de las componentes dependerán del ángulo θ



Ejercicio de Suma-Resta de vectores por componentes

El ojo de un huracán se encuentra a 200 km de Miami, con rumbo de 30° al sur del este. Un avión de reconocimiento está inicialmente a 100 km al norte de Miami.

¿Qué vector de desplazamiento llevará al avión al ojo del huracán?

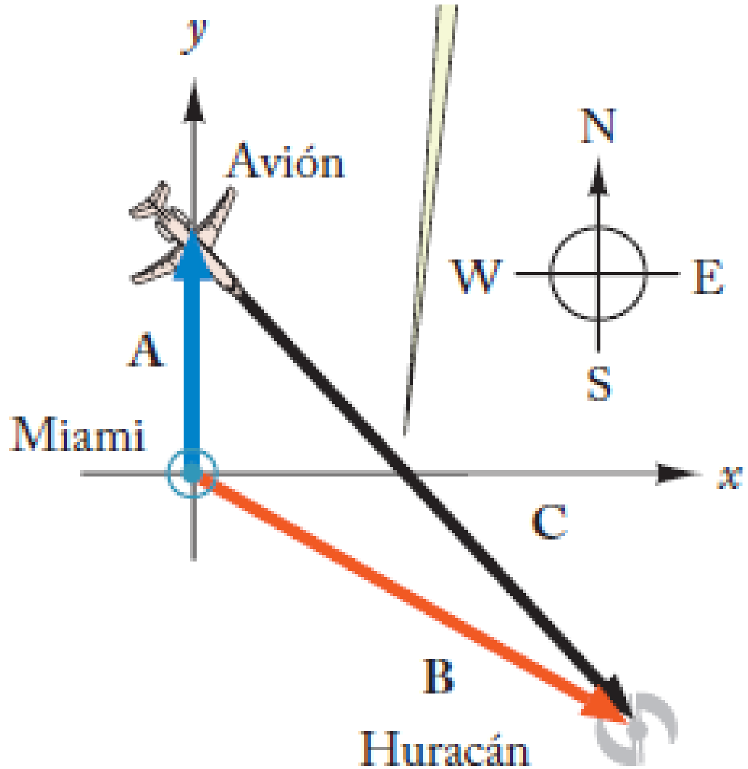


Respuesta al ejercicio

Corrobore: para el vector de desplazamiento

magnitud de **C** = 264 km

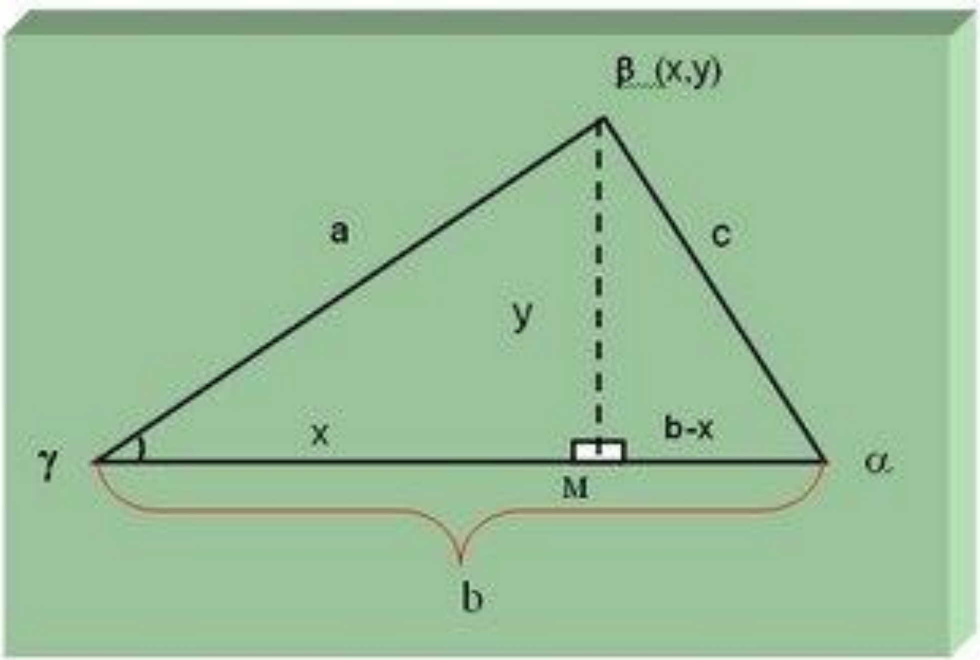
dirección del vector **C** : 49° sur del este.



Resolviendo nuevamente el ejercicio: Ley de Cosenos

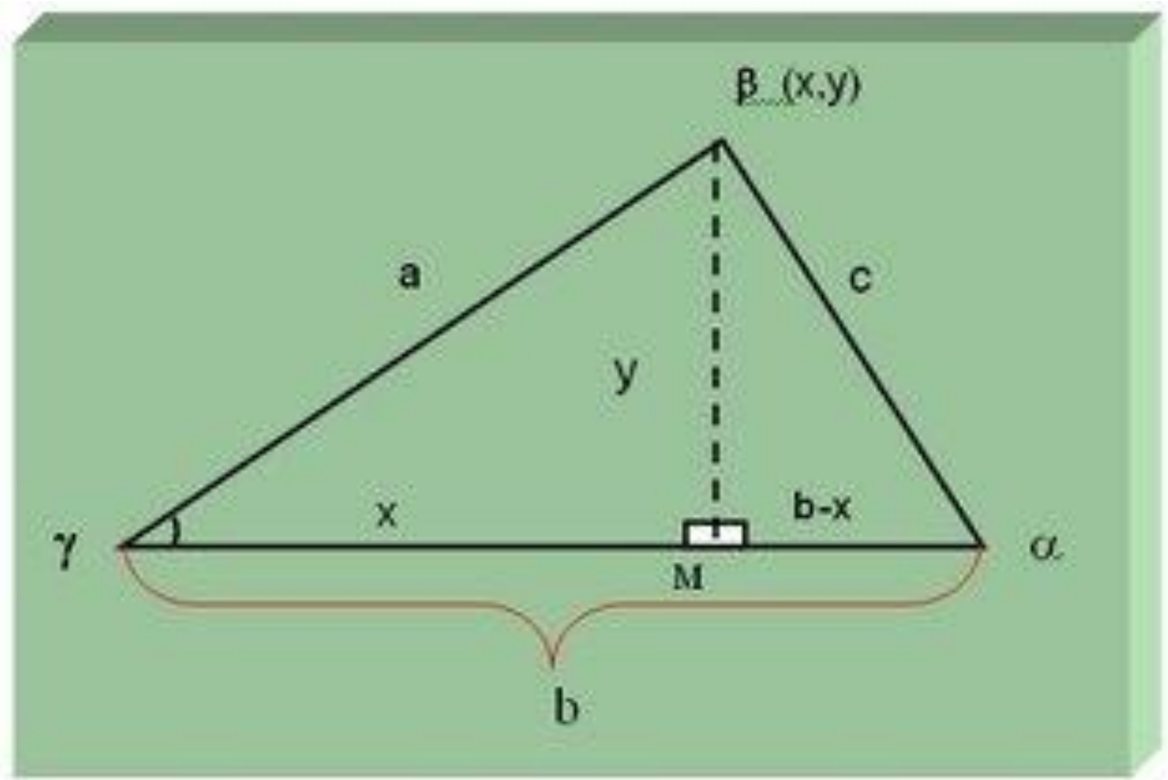
En un triángulo, el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Ley de Senos

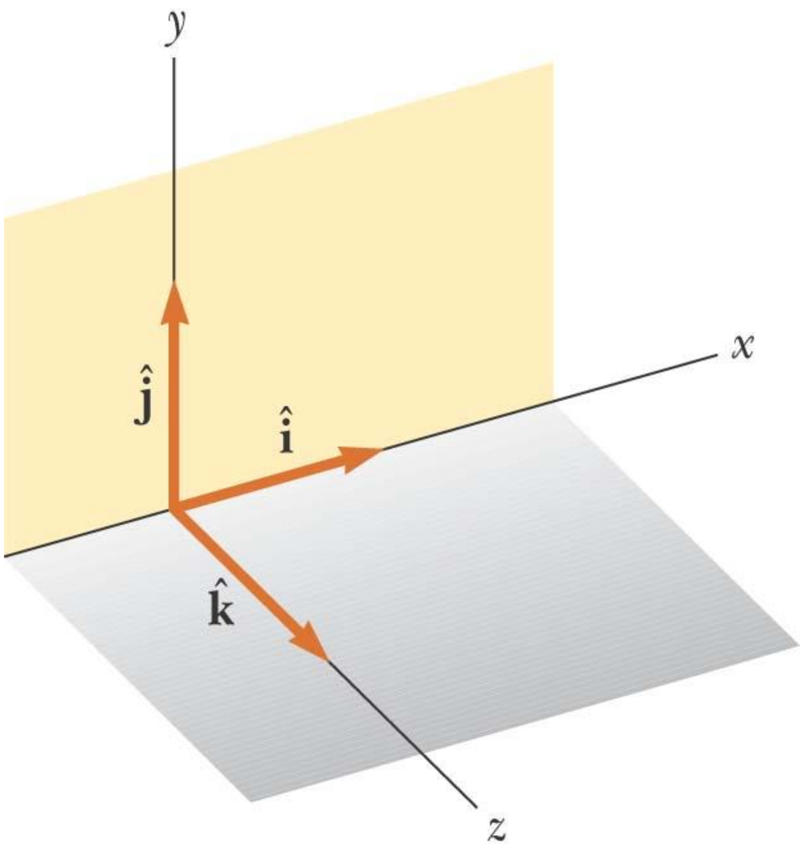
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$

Vectores Unitarios (1)

- Un ***vector unitario*** es un vector adimensional de magnitud exactamente igual a 1.



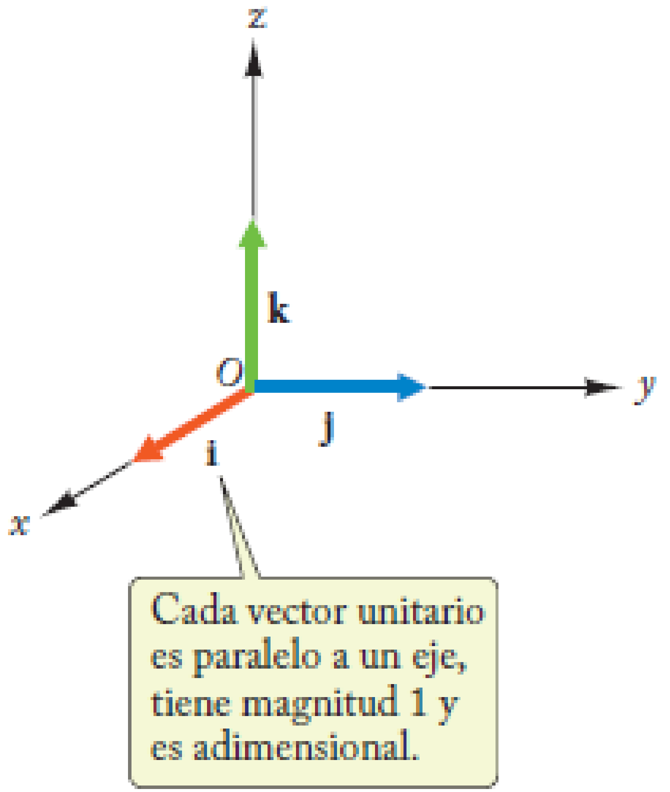
- Se utiliza para especificar una dirección y carece de significado físico.

Vectores Unitarios (2)

- Para representar estos vectores se utiliza:

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

- Los cuales forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculars u ortogonales.

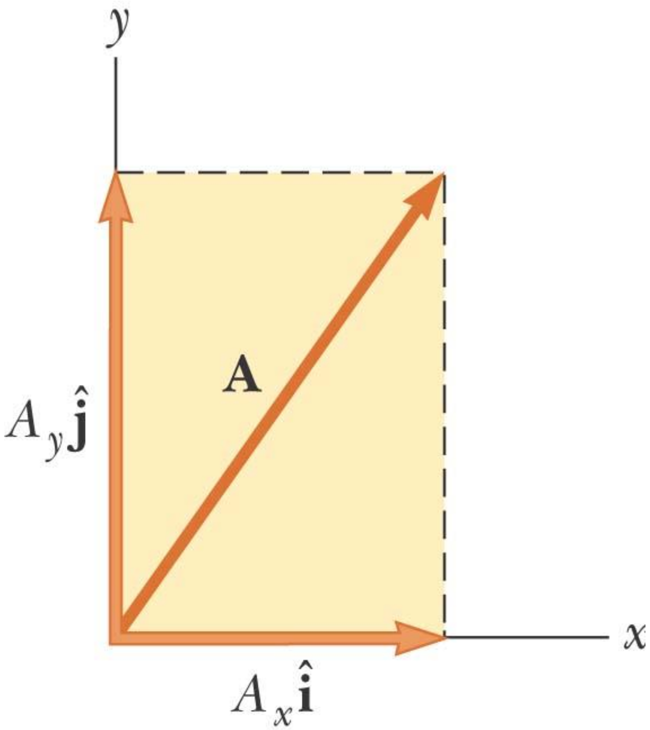


Notación vectores unitarios

- $\mathbf{A_x}$ es lo mismo que $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ y $\mathbf{A_y}$ es lo mismo que $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$, etc.

- El vector completo puede expresarse entonces como

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$



(b)

Suma de vectores utilizando vectores unitarios

- Determinar **R = A + B**
- donde

$$\mathbf{R} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

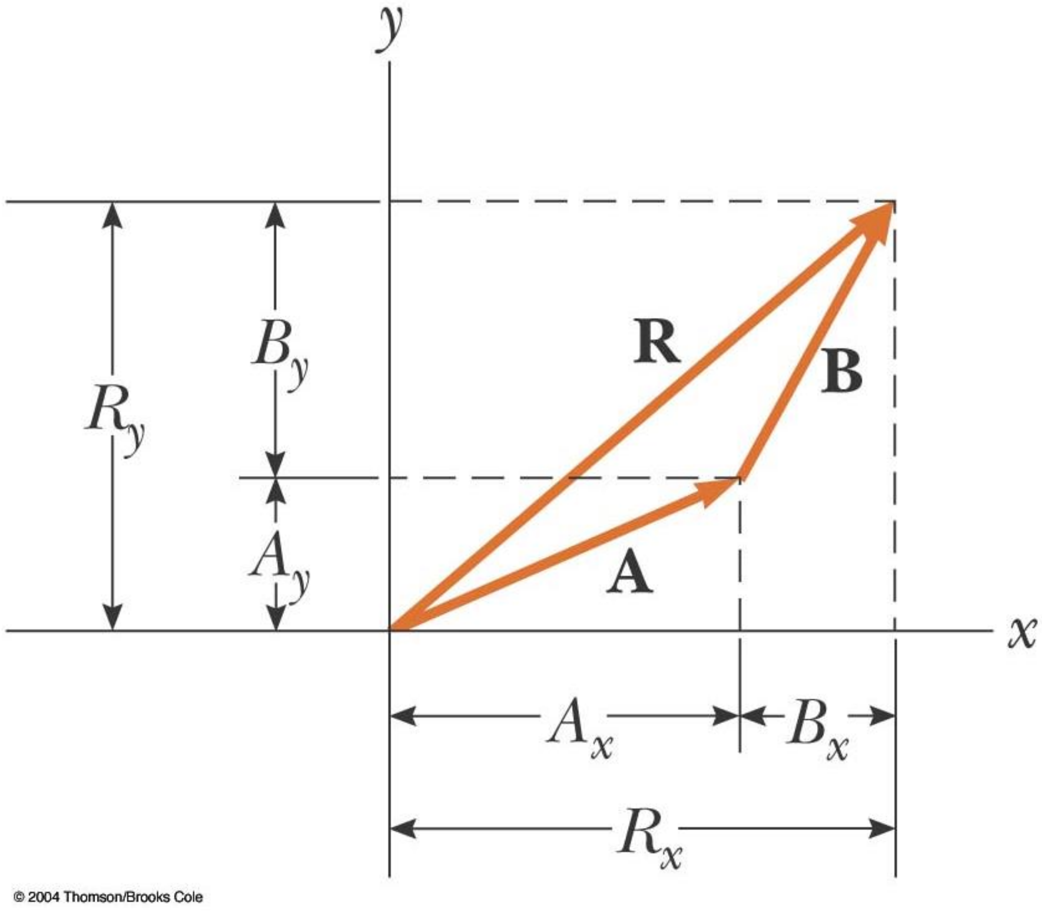
$$\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{R} = R_x + R_y$$

- Por lo que $R_x = A_x + B_x$ y $R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

Representación gráfica de la suma de vectores por componentes rectangulares.



Adición de vectores empleando vectores unitarios - 3 dimensiones

- Determinar **R** = **A** + **B**

$$\mathbf{R} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

- $R_x = A_x + B_x + C_x$, $R_y = A_y + B_y + C_y$ y $R_z = A_z + B_z + C_z$

Ejemplo resuelto

- Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0º al noreste, punto en el cual descubre una torre de guardabosque.

a) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

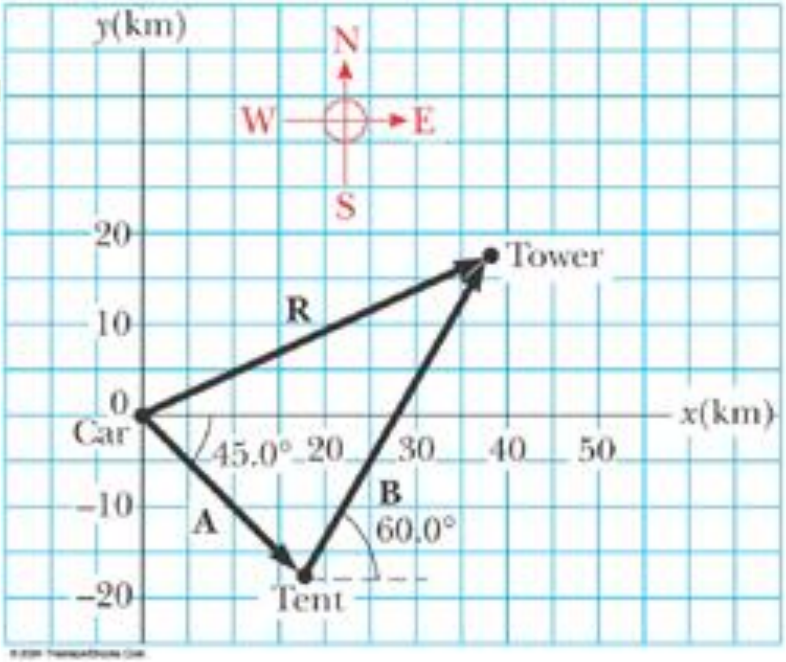
b) Determine las componentes del desplazamiento resultante ***R,*** *de la excursionista para el viaje.*

Encuentre una expresión para ***R*** *en términos de vectores unitarios.*

Continúa…

Las componentes rectangulares

del primer desplazamiento **A** son:



$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0\text{ km})(0.707) = 17.7\text{ km}$$

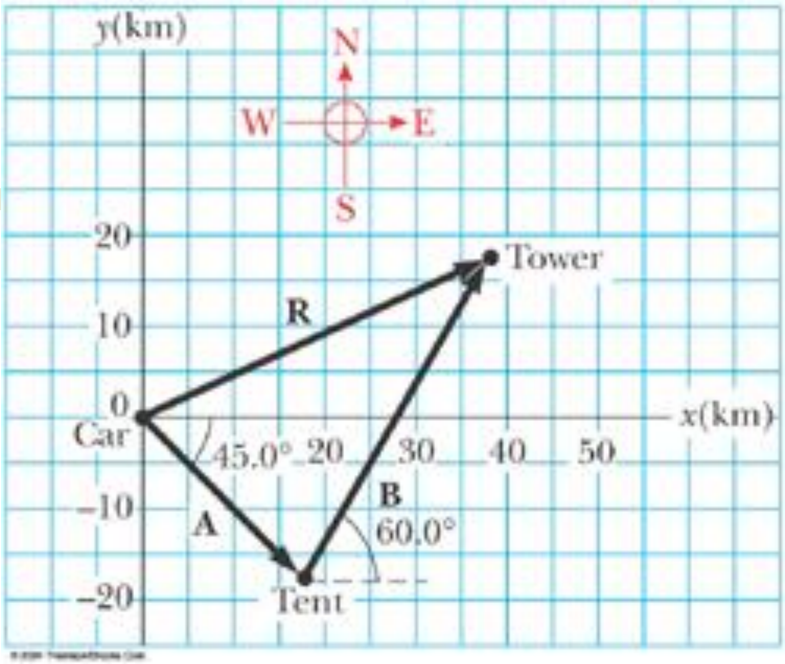
$$A_y = A\sin(-45.0°) = (25.0\text{ km})(-0.707) = -17.7\text{ km}$$

Y para el segundo desplazamiento **B** son:

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\text{ km})(0.500) = 20.0\text{ km}$$

$$B_y = B\sin 60.0° = (40.0\text{ km})(0.866) = 34.6\text{ km}$$

Continúa…



Para el desplazamiento resultante

R = **A** + **B** las componentes son:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7 \text{ km} + 20.0 \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7 \text{ km} + 34.6 \text{ km} = 16.9 \text{ km}$$

Y en forma de vectores unitarios, el desplazamiento total queda:

$$\mathbf{R} = (37.7\ \hat{\mathbf{i}} + 16.9\ \hat{\mathbf{j}}\ ) \text{ km}$$

PARA PRACTICAR

Vectores y piratas (no se entrega)

Ejemplo 3D

- Un mapa en la bitácora del Capitán

Jack Sparrow tiene directrices para la ubicación

del cofre donde se encuentra el corazón de Davy Jones.

Dice que la ubicación del cofre se encuentra dando 20 pasos al norte del viejo roble y luego treinta pasos al noroeste. Después de encontrar el poste de hierro, se debe caminar 12 pasos al norte y cavar hacia abajo 3 pasos.

¿Cuál es el vector que apunta de la base del viejo roble hasta el cofre?

¿Cuál es la longitud de este vector?

Ejemplo del uso de Ley de Senos y Cosenos en Hogwarts

Harry camina alejándose de Ron una distancia de 550 m y luego hace un viraje agudo en un ángulo desconocido, y camina 178 m adicionales en la nueva dirección. Ron usa un telémetro láser para determinar que la distancia final de Harry, a partir del punto inicial, es de 432 m.

a) ¿Cuál es el ángulo entre la dirección inicial de partida y la dirección de la ubicación final?

b) ¿En qué ángulo viró Harry?

Ejercicio adicional tipo Eval. Departamental

Encuentre el vector **C** que satisface la ecuación:

$$3\hat{x} + 6\hat{y} - 10\hat{z} + \vec{C} = -7\hat{x} + 14\hat{y}$$

Compruebe que la igualdad se cumple si

$$\vec{C} = -10\hat{x} + 8\hat{y} + 10\hat{z}$$

Multiplicación y División de un Vector por un Escalar

- <u>La resultante es un vector.</u> La magnitud del vector original se multiplica o divide por un escalar.

- Si el escalar es positivo, la dirección del vector resultante es la misma que la del vector original: $(m) \times (\mathbf{A}) = m\mathbf{A}$;

  $(5) \times (\mathbf{A}) = 5\mathbf{A}$

- Si el escalar es negativo, la dirección del vector resultante es la opuesta que la del vector original: $-1/3\ (\mathbf{A}) = -1/3\mathbf{A}$

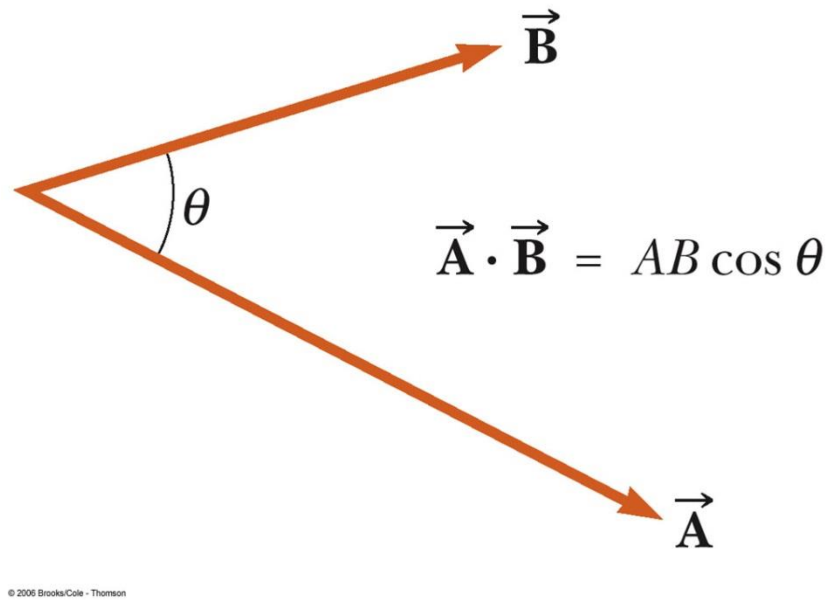
Producto Escalar de dos vectores

- Se escribe como $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$

También se le conoce como producto punto

- $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta$

θ es el ángulo entre *A* y *B*



- PROPIEDADES:

El producto escalar es conmutativo $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$

Y obedece la Ley distributiva de la multiplicación

- $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$

Proyección usando producto escalar

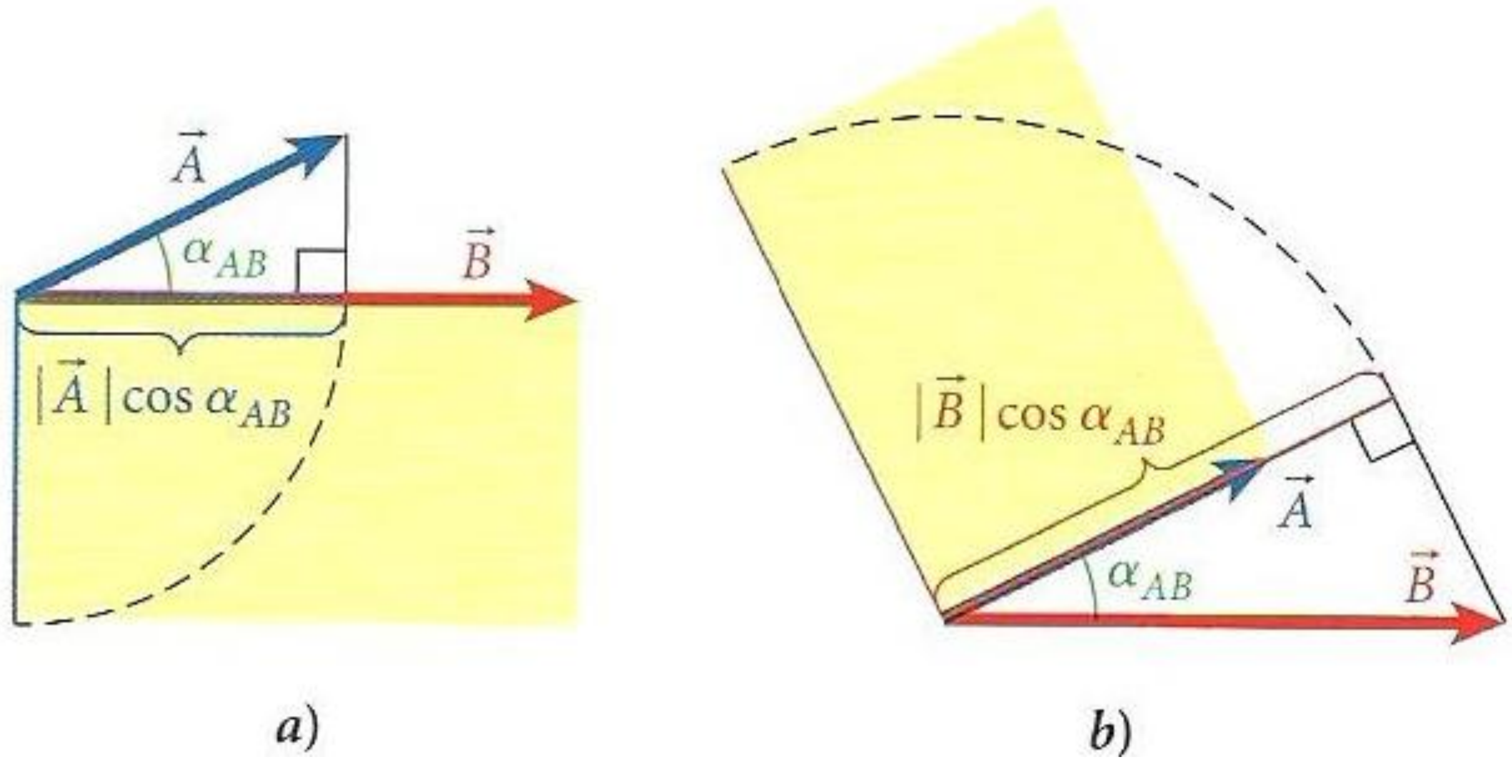


FIGURA 5.11 Interpretación geométrica del producto escalar como área. *a*) La proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. *b*) La proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

Producto punto de vectores unitarios

- En forma de componentes para $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- Por lo que, para vectores unitarios

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

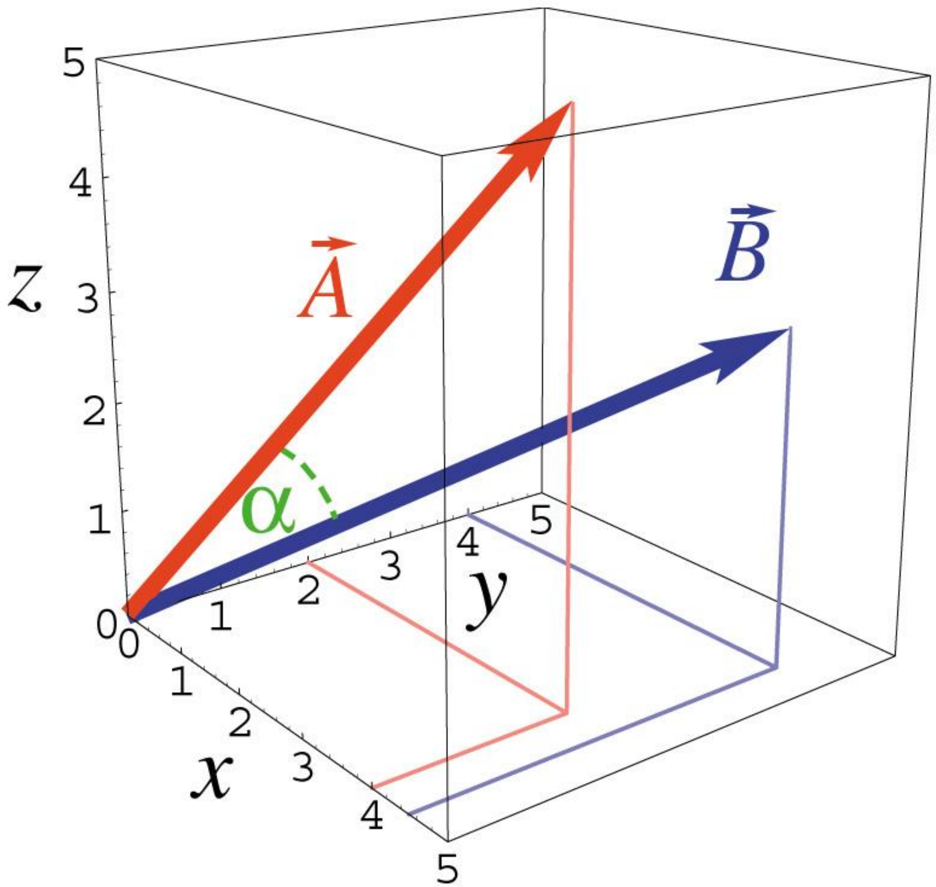
Determinación del ángulo entre dos vectores usando producto escalar

Ejercicio:

- ¿Cuál es el ángulo α entre los vectores de posición que se muestran a continuación, y cuyas coordenadas cartesianas son

A = (4.00, 2.00, 5.00) cm y **B** = (4.50, 4.00, 3.00) cm?

Determinación del ángulo entre dos vectores usando producto escalar …



$|\vec{A}| = 6.71$ cm

$|\vec{B}| = 6.73$ cm

$\vec{A} \circ \vec{B} = A_x B_x + A_y\ B_y + A_z\ B_z = 41.0\ cm^2$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{41.0\ cm^2}{6.71\ cm\ \ 6.73\ cm}\right) = 24.7°$

Más ejercicios de Producto escalar de vectores……..*para practicar*

Para los siguientes conjuntos de vectores, determinar:

a) A • B

b) El ángulo comprendido entre cada par de vectores

1) **A** = 3 **i** – 6 **j** **B** = - 4 **i** + 2 **j** ***α_1 = 143°***

2) **A** = 5 **i** + 5 **j** **B** = 2 **i** – 4 **j** ***α_2 = 108°***

3) **A** = 6 **i** + 4 **j** **B** = 4 **i** – 6 **j** ***vectores ortogonales***

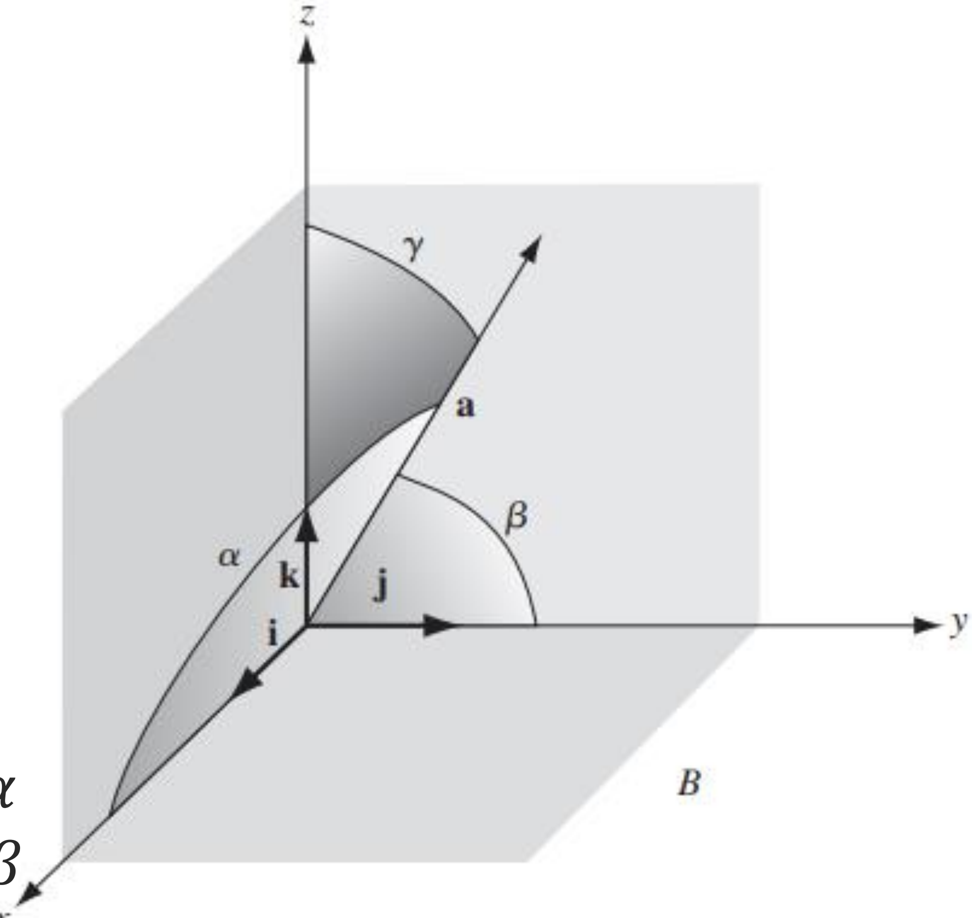
Verifique sus respuestas dibujando los pares de vectores "cola" con "cola", en un sistema de ejes coordenados.

2.10 Cosenos directores de un vector

Sea

$$\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$$

un vector que forma los ángulos α, β y γ, respectivamente, con los ejes positivos x, y, *y* z



$$\hat{\imath} \circ \overrightarrow{a} = |\hat{\imath}|\,|\vec{a}| \cos\alpha = |\vec{a}| \cos\alpha$$
$$\hat{\jmath} \circ \overrightarrow{a} = |\hat{\jmath}|\,|\vec{a}| \cos\beta = |\vec{a}| \cos\beta$$
$$\hat{k} \circ \overrightarrow{a} = \left|\hat{k}\right|\,|\vec{a}| \cos\gamma = |\vec{a}| \cos\gamma$$

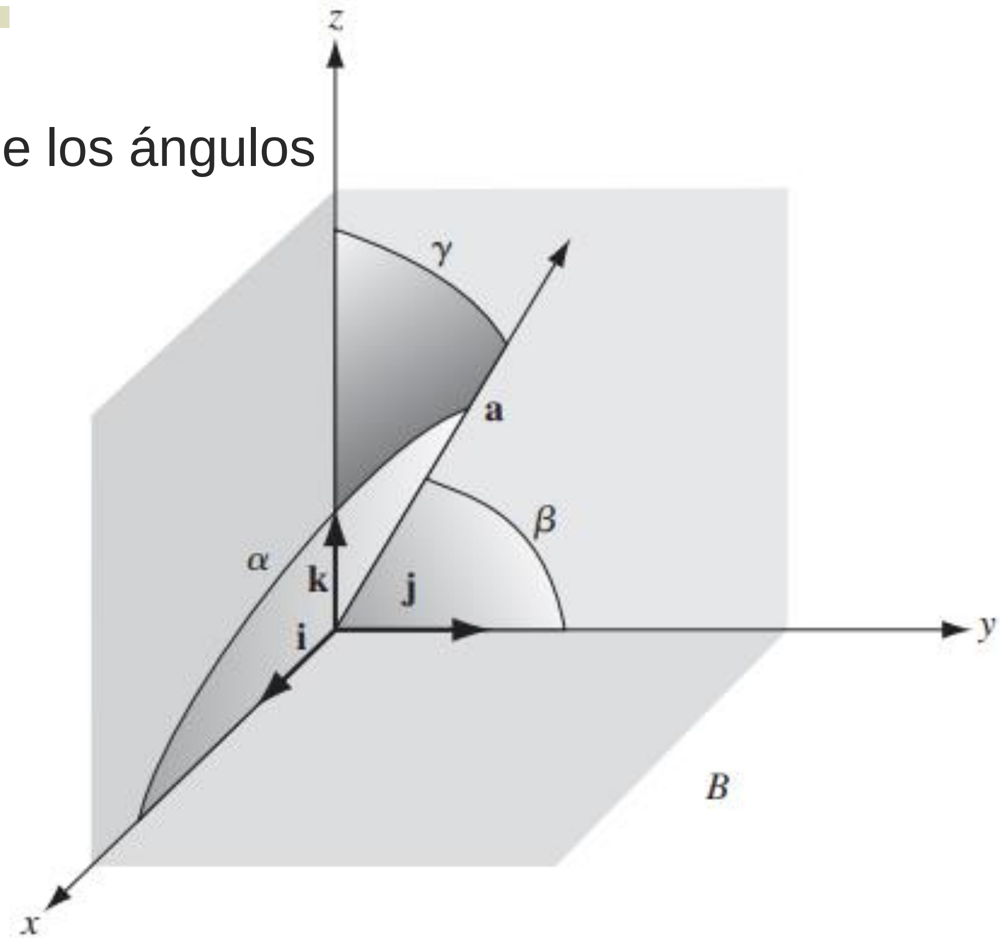
Cosenos directores de un vector

Que resolviendo para los cosenos de los ángulos

$$\cos\alpha = \frac{\hat{\imath} \circ \overrightarrow{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\hat{\jmath} \circ \overrightarrow{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k} \circ \overrightarrow{a}}{|\vec{a}|}$$



Se obtienen los cosenos directores del vector **a**

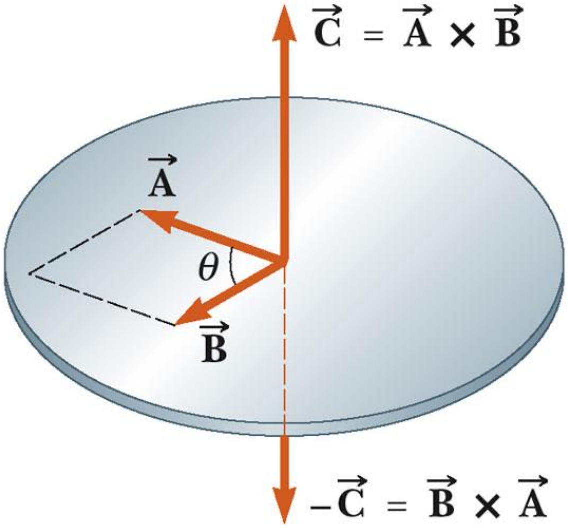
Producto vectorial

- Dados cualesquiera dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

El producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ está definido como un tercer vector, $\vec{\mathbf{C}}$ cuya magnitud es

$$C = \left|\vec{\mathbf{C}}\right| \equiv AB\sin\theta$$

- La dirección de C está dada por la regla de la mano derecha.



Propiedades del producto vectorial (también llamado producto cruz)

- El producto vectorial no es conmutativo
  - $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$
- Si $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo ($\theta = 0^o$ ó $\theta = 180^o$) a $\vec{\mathbf{B}}$ entonces $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$
  - Lo cual significa que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$
- Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, entonces

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB$$

Producto vectorial de vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

- Los signos se pueden intercambiar
  - Por ejemplo, $\hat{\mathbf{i}} \times \left(-\hat{\mathbf{j}}\right) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{k}}$

Ejercicio: Producto cruz

¿Cuál es el producto cruz de los vectores de posición:
A de magnitud 100 km dirección norte, y
B de magnitud 200 km con rumbo a 30° al sur del este?

Como dato se tiene que el ángulo entre los dos vectores es de 120°

Ejemplo de aplicación de producto cruz: el Torque

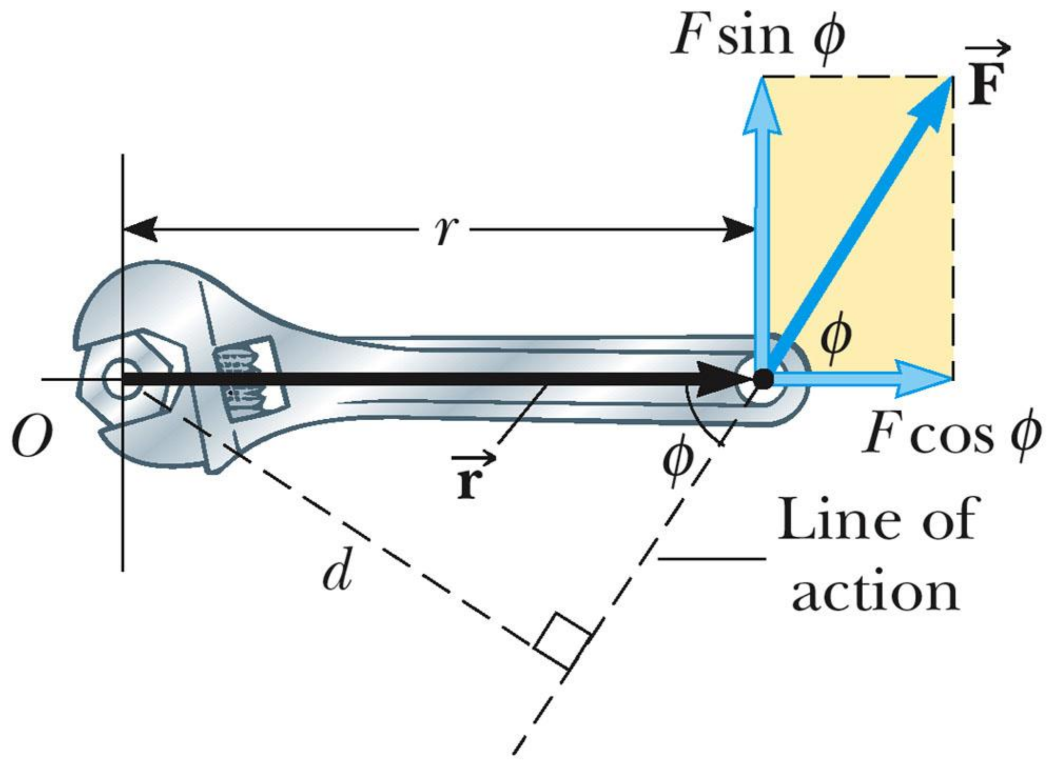
- El torque, τ, es la tendencia de una fuerza a provocar el giro de un objeto alrededor de algun eje. El torque es un vector, y su magnitud es:

$$|\tau| = F\ r \text{ sen } \phi = F\, d$$

  - **F** es la fuerza
  - ϕ es que ángulo que la fuerza forma con la horizontal
  - *d* es el *brazo de momento* (o brazo de palanca), que es la distancia perpendicular a la línea de acción de la fuerza, determinada desde el eje de rotación.

Torque, continúa…

- El brazo de momento, *d*, es la distancia *perpendicular* desde el eje de rotación a la línea dibujada a lo largo de la dirección de la fuerza
  - $d = r \text{ sen } \phi$



Torque, continúa…

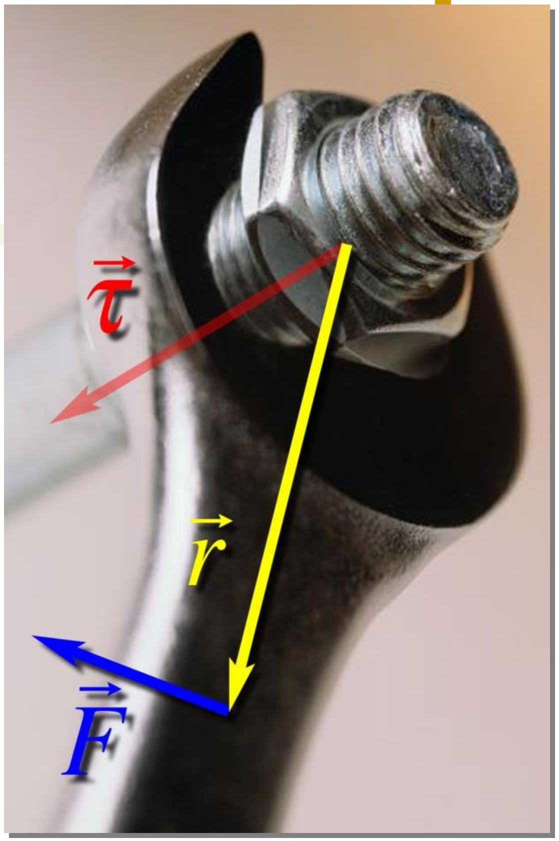
- La componente horizontal de la fuerza

(F cos ϕ) no tiene tendencia a producir rotación

- El torque posee dirección
  - Si la tendencia de giro de la fuerza es en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el torque será positivo
  - Si la tendencia de giro de la fuerza es en el sentido de las manecillas del reloj, el torque será negativo

Torque vs. Fuerza

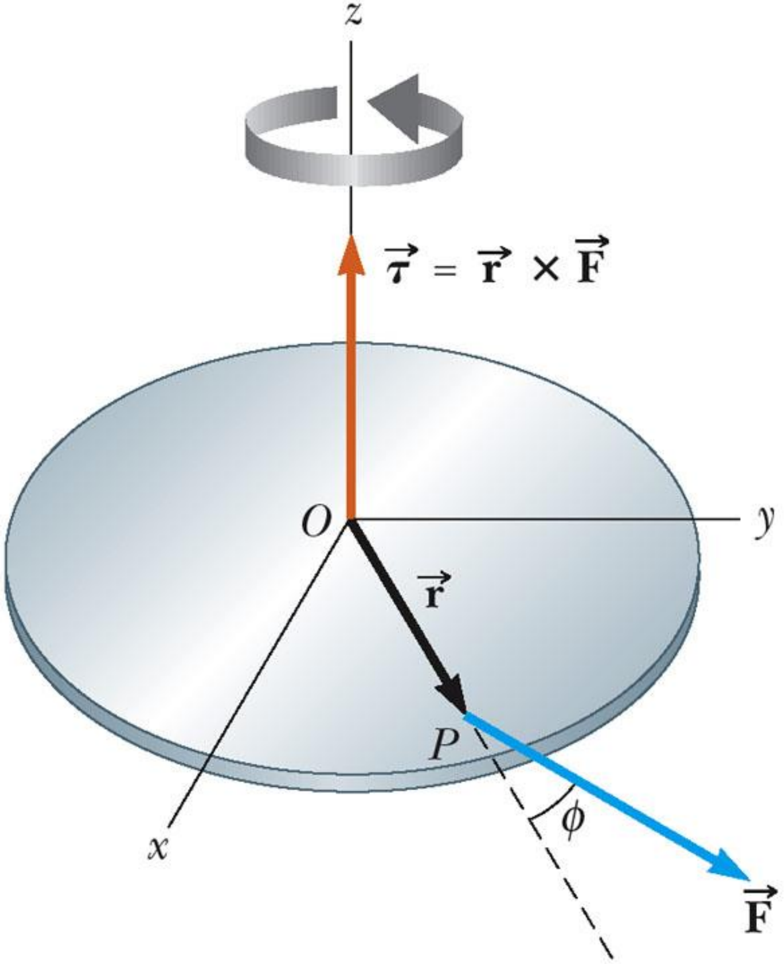
- Las fuerzas pueden producir cambios en el movimiento lineal (Segunda Ley de Newton)
- Las fuerzas pueden producir un cambio en el movimiento rotacional
  - La efectividad de este cambio depende de la fuerza y del brazo de momento
  - El cambio en el movimiento rotacional depende del torque:



- *Girar “clockwise” => atornillar*
- *Girar “counter-clockwise => desatornillar*

Torque como Producto Vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$



Unidades del torque

- En el SI de unidades son N·m
  - Aunque el torque es una fuerza multiplicada por una distancia, es muy diferente del trabajo (producto punto) y de la energía
  - Las unidades del torque se reportan como N·m y no se cambian a Joules