UNIDAD 4. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Ejercicio 1. Un objeto de 3.00 kg se somete a una aceleración conocida $\vec{a} = (2.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})m/s^2$.

a) Obtenga la fuerza resultante que actúa sobre él.

b) La magnitud y dirección de la fuerza resultante.

a) Usamos la definición de la segunda Ley de Newton para obtener la expresión de la fuerza usando la información de la aceleración (vector) y la masa (escalar):

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = (6.00\hat{\imath} + 15.00\hat{\jmath})\ \frac{kg\ m}{s^2}$$

Con la respuesta anterior, usando las componentes se obtiene tanto la magnitud como la dirección del vector fuerza.

$$|\vec{F}| = \sqrt{(6.00)^2 + (15.00)^2} = \sqrt{261.00} = 16.16\ \mathrm{N}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{15.00}{6.00}\right) = 68.20\ ° \approx 68°$$

Ejercicio 2. Se tienen tres partículas en movimiento y se desea saber cuáles de esas partículas se encuentran en ausencia de fuerzas. Para ello, inicialmente se midió la posición de todas ellas como función del tiempo, usando cierto marco de referencia. Esa medición dio los siguientes resultados:

$\vec{r}_A$ ($3t^2 - 6t + 8,\ 4t^2 - 3t + 10,\ t^2 + 4t + 7$)

$\vec{r}_B$ ($4t^2 - 2,\ 3t^2 - 1,\ t^2 + t + 1$)

$\vec{r}_C$ ($4t^2 - 10t,\ 3t^2 + t - 10,\ t^2 + 5t + 3$)

Para corregir la ausencia de un marco inercial establecido, considere que la partícula C está libre en todo momento, es decir, durante todo su movimiento, no está sujeta a ninguna fuerza. Con base en esa información, utilice la primera ley de Newton para determinar cuál de las otras dos partículas se encuentran libres, es decir, en ausencia de fuerzas.

Primero determinaremos la posición de todas las partículas como función del tiempo, usando el marco de referencia inercial situado en la partícula C. Esto se logra a través de la resta de los vectores de posición con respecto a la partícula C. Por ejemplo, para la partícula A, la posición en el nuevo marco de referencia será:

$$\vec{r}_A{}' = \vec{r}_A - \vec{r}_C$$

$\vec{r}'_A$ = ($3t^2 - 6t + 8,\ 4t^2 - 3t + 10,\ t^2 + 4t + 7$) – ($4t^2 - 10t,\ 3t^2 + t - 10,\ t^2 + 5t + 3$) = ($-t^2 + 4t + 8,\ t^2 - 4t + 20,\ -t + 4$)

Lo mismo se realiza para la partícula B, obteniendo el siguiente resultado:

$$\vec{r}_B{}' = \vec{r}_B - \vec{r}_C$$

$\vec{r}'_B$ = ($10t - 2,\ -t + 9,\ -4t - 2$)

De acuerdo a las nuevas posiciones con respecto a la partícula C y recordando que las partículas libres se mueven siguiendo un movimiento rectilíneo uniforme, en un marco de referencia inercial, podemos observar que la única partícula que se mueve así es la partícula B pues su posición como función del tiempo es una función lineal, es decir, no hay un término cuadrático en el tiempo.

En el caso de la partícula A, la posición como función del tiempo es $\vec{r}'_A$ = ($-t^2 + 4t + 8,\ t^2 - 4t + 20,\ -t + 4$) lo que denota que no sigue el movimiento rectilíneo uniforme, porque contiene el término t^2 tanto en la componente x como en la componente y de su posición.

Ejercicio 3. Un esquiador de 72 kg está siendo acelerado por una motocicleta de nieve en una superficie plana. La motocicleta que jala al esquiador mediante una cuerda, se encuentra aplicando una fuerza de magnitud 240 N en un ángulo de 20 grados respecto a la horizontal. Además, el coeficiente de fricción entre los esquíes y la superficie del hielo es de μk = 0.25. Con estos datos obtenga la magnitud de la aceleración del esquiador.

Planteamiento

El esquiador está siendo jalado por la motocicleta, la fuerza que afecta al esquiador es una fuerza de tensión, debido a la cuerda que lo jala. Dado que existe una fuerza total sobre el esquiador, este sufrirá una aceleración, es un sistema dinámico. Para calcular la magnitud de la aceleración emplearemos la segunda ley de Newton.

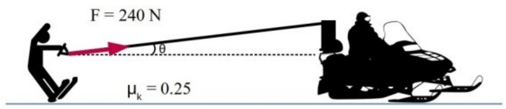


Fig 1. Esquema del problema

Usaremos un diagrama de cuerpo libre (DCL) para ilustrar las fuerzas que afectan a nuestro sistema, en este caso el objeto de estudio es el esquiador.

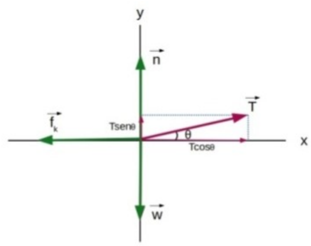


Fig 2. Diagrama de cuerpo libre del esquiador.

En donde $\vec{T}$ corresponde a la fuerza de tensión, antes mencionada, la cual es ejercida por la motocicleta, $\vec{w}$ es el peso del esquiador, $\vec{n}$ la fuerza normal que el suelo ejerce en el esquiador y $\vec{f}_k$ es la fuerza de fricción cinética, dado al movimiento sobre la superficie. $|\vec{T}|\cos\theta$ es la componente en x de la tensión (T_x) y $|\vec{T}|\text{sen}\theta$ es la componente en y (T_y), obtenidas a través de funciones trigonométricas.

Suma de fuerzas.

Una vez analizado el DCL se plantea la ecuación:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

La cual analizaremos en dimensión x y y.

a) Componentes en x

$$\Sigma F_x = ma_x$$

Observamos las fuerzas en x en el diagrama de cuerpo libre y lo sustituimos por la suma de la fuerza, como resultado se obtiene

$$\Sigma F_x = |\vec{T}|cos\theta - |\vec{f}_k| = ma_x \quad \dots (1)$$

Dado que la tensión es un vector que no aparece sobre un eje, es necesario usar su componente en x, representada como $T_x = |\vec{T}|\cos\theta$. El sistema se encuentra en movimiento acelerado hacia la derecha en el marco de referencia elegido, por esta razón la componente en x de la aceleración es $+a_x$.

b) Componentes en y

$$\Sigma F_y = ma_y$$

De forma análoga al inciso anterior se obtiene

$$\Sigma F_y = |\vec{n}| + |\vec{T}|sen\theta - |\vec{w}| = 0 \quad \dots (2)$$

En el eje vertical no existe movimiento, por esta razón a_y = 0 m/s² y por tanto el producto ma_y = 0 N.

c) Definición de $|\vec{f}_k|$

Para resolver a_x en la ecuación (1) necesitamos la definición de $|\vec{f}_k|$:

$$|\vec{f}_k| = \mu_k|\vec{n}| \quad \dots (3)$$

Resolución del sistema de ecuaciones.
Como se apuntó, se busca obtener a_x, así que se necesita despejar la ecuación (1):

$$a_x = \frac{|\vec{T}|cos\theta - |\vec{f}_k|}{m} \quad \dots (4)$$

Para esto se requiere $|\vec{f}_k|$ de la ecuación (3), pero dado que $|\vec{n}|$ es una incógnita se despeja primero de la ecuación (2):

$$|\vec{n}| = |\vec{w}| - |\vec{T}|sen\theta \quad \dots (5)$$

Y así, se sustituye después (5) en (3):

$$|\vec{f}_k| = \mu_k(|\vec{w}| - |\vec{T}|sen\theta) \quad \dots (6)$$

y posteriormente (6) en (4) para obtener una ecuación con variables conocidas:

$$a_x = \frac{|\vec{T}|cos\theta - \mu_k(|\vec{w}| - |\vec{T}|sen\theta)}{m} \quad \dots (7)$$

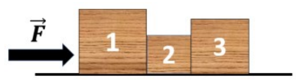
Sustituyendo:

$$a_x = \frac{(240\text{ N})cos20° - 0.25\left(\left(9.81\,{}^{m}/_{s^2}\right)(72\ kg) - (240\text{ N})sen20°\right)}{72\ kg}$$

$$a_x = 0.96\ {}^{m}/_{s^2}$$

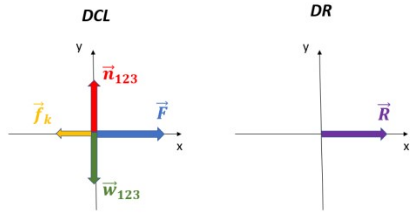
Evaluación.
El resultado es consistente con lo planteado en el problema, el esquiador avanza con aceleración constante hacia la derecha, de magnitud 0.96 m/s² ya que la componente en a_y = 0 m/s².

Ejercicio 4. Tres bloques de madera son empujados por una fuerza horizontal de magnitud de 200 N. Entre la superficie y los bloques existe un coeficiente de fricción cinético de 0.3. Las masas de los tres bloques son de m_1 = 15 kg, m_2 = 7 kg y m_3 = 10 kg. Calcula la magnitud del vector aceleración de las tres cajas y la magnitud de la fuerza que ejerce la caja 2 sobre la 1.



Para resolver este ejercicio tenemos que plantearnos una pregunta importante. ¿A quién voy a escoger como mi sistema físico, la caja 1, 2 ó 3? Porque dependiendo de esto son la cantidad de incógnitas que voy a tener en mi sistema de ecuaciones.

Podemos plantear el sistema físico como las tres cajas y hacer un diagrama de cuerpo libre, para dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el sistema.



Si realizamos una suma de fuerzas por componentes, obtenemos un sistema de ecuaciones.

$$\Sigma F_y = |\vec{n}_{123}| - m_{123} g = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\Sigma F_x = |\vec{F}| - \mu_k |\vec{n}_{123}| = m_{123} a_{123} \quad \ldots (2)$$

Sustituimos los datos que nos proporcionan en el problema, para lo cual se deben sumar la masa de los bloques, m_{123}:

$$\Sigma F_y = |\vec{n}_{123}| - (32\ kg)\left(9.81\ {}^{m}/_{s^2}\right) = 0 \quad \ldots (3)$$

$$\Sigma F_x = 200 - (0.3)|\vec{n}_{123}| = (32\ kg) a_{123} \quad \ldots (4)$$

Podemos observar que se puede despejar la fuerza normal de la ecuación 3.

$$|\vec{n}_{123}| = 313.92\ \text{N}$$

Sustituimos la fuerza normal en la ecuación 4.

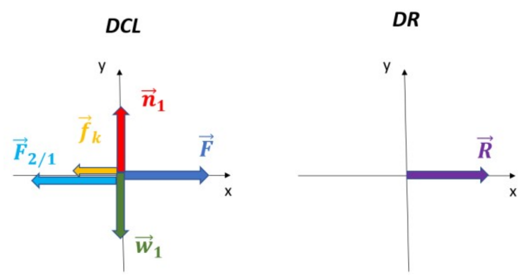
$$200 - (0.3)(313.92) = (32\ kg) a_{123}$$

Despejamos la magnitud de la aceleración para las tres cajas. Que por supuesto es la misma para las tres.

$$|\vec{a}_{123}| = 3.31\ {}^{m}/_{s^2}$$

Ahora para calcular la magnitud de la fuerza que la caja 2 ejerce sobre la 1, necesitamos plantear el sistema físico en otro lugar. Es decir, podemos escoger la caja 1 como mi sistema o la caja 2, en todo caso la magnitud de la fuerza debe de ser la misma por la tercera Ley de Newton.

Vamos a escoger la caja 1 como nuestro sistema físico y hacer un diagrama de cuerpo libre.



Se hace suma de fuerza por componentes y se obtienen el sistema de ecuaciones.

$$\Sigma F_y = |\vec{n}_1| - m_1 g = 0 \quad \ldots (5)$$

$$\Sigma F_x = |\vec{F}| - \mu_k |\vec{n}_1| - |\vec{F}_{2/1}| = m_1 a_{123} \quad \ldots (6)$$

Se sustituyen en las ecuaciones todos los datos del problema que se conocen.

$$\Sigma F_y = |\vec{n}_1| - (15\ kg)\left(9.81\ {}^{m}/_{s^2}\right) = 0 \quad \ldots (7)$$

$$\Sigma F_x = 200 - (0.3)|\vec{n}_1| - |\vec{F}_{2/1}| = (15\ kg)\left(3.31\ {}^{m}/_{s^2}\right) \quad \ldots (8)$$

Podemos notar que se puede despejar la fuerza normal de la ecuación (7).

$$|\vec{n}_1| = 147.15\ \text{N}$$

Sustituimos la fuerza normal en la ecuación 8.

$$\Sigma F_x = 200 - (0.3)(147.15\text{ N}) - |\vec{F}_{2/1}| = (15\ kg)\left(3.31\ {}^{m}/_{s^2}\right)$$

Despejamos la magnitud de la fuerza que la caja 2 ejerce sobre la caja 1.

$$|\vec{F}_{2/1}| = 106.25\text{ N}$$

Ejercicio 5. Se requiere mover un mueble cuyo peso es 1000 N a través del piso horizontal. Para comenzar su movimiento, se sabe que se requiere jalarlo con una fuerza horizontal de 460 N. Por otra parte, cuando el mueble ha partido del reposo, se puede mantenerlo en movimiento a velocidad constante jalándolo con 400 N de fuerza. Calcule respectivamente los coeficientes de fricción estática (μ_s) y cinética (μ_k).

Se debe aplicar la segunda ley de Newton antes de que el mueble parta del reposo y después de ello. Analicemos primero antes de que el mueble parta del reposo.

Si el mueble inicialmente se jala con una fuerza de tensión $|\vec{T}|$ dirigida hacia el eje x positivo, entonces la fuerza de fricción estática $\vec{f}_s$ apunta en la dirección $-\hat{\imath}$. Por lo que

$$\Sigma F_x = |\vec{T}| - |\vec{f}_{s(\text{máx.})}| = 0 \rightarrow |\vec{f}_{s(\text{máx.})}| = |\vec{T}| = 460\text{ N}$$

A lo largo del eje y, actúan sobre el mueble su peso $|\vec{w}|$ y la fuerza normal $|\vec{N}|$. Así

$$\Sigma F_y = |\vec{N}| - |\vec{w}| = 0 \rightarrow |\vec{N}| = |\vec{w}| = 1000\text{ N}$$

Combinando estas ecuaciones, se obtiene que

$$\mu_s = \frac{|\vec{f}_{s(\text{máx.})}|}{|\vec{N}|} = \frac{460\text{ N}}{1000\text{ N}} = 0.46$$

Por otra parte, cuando el movimiento del mueble es a velocidad constante, la fuerza de fricción cinética $\vec{f}_k$ corresponde a la de tensión $|\vec{T}'|$ necesaria al jalarlo bajo estas condiciones:

$$\Sigma F_x = |\vec{T}'| - |\vec{f}_k| = 0 \rightarrow |\vec{f}_k| = |\vec{T}'| = 400\text{ N}$$

Por lo que

$$\mu_k = \frac{|\vec{f}_k|}{|\vec{N}|} = \frac{400\text{ N}}{1000\text{ N}} = 0.40$$

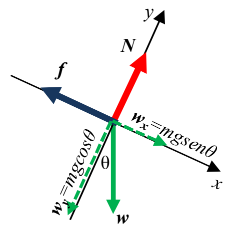
Ejercicio 6. Un patinador de “snowboard” se mueve cuesta abajo por una pendiente con θ = 22°. Suponga que el coeficiente de fricción cinético entre la tabla y la nieve es de 0.21 y la velocidad en un instante dado es 8.3 m/s en dirección de la pendiente.

a) ¿Cuál será la rapidez del patinador a lo largo de la pendiente 100 m más abajo?
b) ¿Cuánto tarda el patinador en alcanzar esta rapidez?
c) ¿Cuál tendría que ser el ángulo de la pendiente para que el patinador se deslizara con velocidad constante?

ANÁLISIS.

a) Para obtener la rapidez es necesario conocer la aceleración, para ello se requiere realizar un diagrama de cuerpo libre para identificar las fuerzas que actúan sobre el sistema, plantear y resolver el sistema de ecuaciones.
b) Con los datos del problema y conociendo la aceleración se puede calcular el tiempo usando la ecuación general de cinemática.
c) Si el patinador se desliza con velocidad constante, la aceleración será cero, se podrá usar el diagrama de cuerpo libre para plantear un nuevo sistema de ecuaciones, donde ahora la incógnita es el ángulo.

Se realiza un diagrama de cuerpo libre con las fuerzas descritas en el problema (peso, normal y fricción) y se establecen las ecuaciones para la suma de fuerzas por componentes. En este caso, el sistema de referencia se toma positivo en la dirección del movimiento (+x) y positivo hacia arriba.



a) Rapidez 100 metros más abajo.

Principio de superposición. Suma por componentes:

$\Sigma F_x = mgsen\theta - |\vec{f}| = ma_x$ ...(1)

$\Sigma F_y = |\vec{N}| - mgcos\theta = 0$ ...(2)

$|\vec{f}| = \mu_k |\vec{N}|$ ...(3)

De la ecuación (2) se obtiene la normal $|\vec{N}|$ y se sustituye en (3). Así la fuerza de fricción queda definida como: $|\vec{f}| = \mu_k mgcos\theta$ y se sustituye en (1) para despejar la aceleración:

$$mgsen\theta - \mu_k mgcos\theta = ma_x$$

$$gsen\theta - \mu_k gcos\theta = a_x$$

$$a_x = g(sen\theta - \mu_k cos\theta)$$

$$a_x = 9.81(sen22 - 0.21cos22) = 1.76\ {}^{m}/_{s^2}$$

Usando la ecuación general de cinemática:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(4)$$

$$v(t) = v_0 + at \quad ...(5)$$

Datos:

$x(t) = 100\ m$ $\quad v_0 = 8.3\ m/s$ $\quad a = 1.76\ m/s^2$ $\quad v(t) = v_2 = ?$

En las ecuaciones (4) y (5) la incógnita es el tiempo, por tanto, despejamos t de (4) y sustituimos en (5) para eliminar esa incógnita y dejarla en término de los datos conocidos.

De (5) $\quad t = \frac{v_2 - v_0}{a}$ ... (5')

Sustituimos en (4)

$$x = v_0\left(\frac{v_2 - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_2 - v_0}{a}\right)^2$$

Desarrollando

$$x = \frac{1}{a}v_0(v_2 - v_0) + \frac{1}{2a}(v_2 - v_0)^2$$

$$2xa = 2v_0(v_2 - v_0) + (v_2 - v_0)^2$$

$$2xa = 2v_0v_2 - 2{v_0}^2 + {v_2}^2 - 2v_0v_2 + {v_0}^2$$

$$2xa = -2{v_0}^2 + {v_2}^2 + {v_0}^2$$

$$2xa = {v_2}^2 - {v_0}^2$$

Finalmente despejamos la incógnita v_2

$$v_2 = \sqrt{2xa + {v_0}^2}$$

Sustituyendo los datos:

$$v_2 = \sqrt{2(100)(1.76) + (8.3)^2} = 20.52\ m/s$$

b) Tiempo para alcanzar la rapidez obtenida en a)

Se cuentan con todos los datos para calcular el tiempo de la ecuación (5') obtenida en el desarrollo anterior.

$$t = \frac{v_2 - v_0}{a} \quad \ldots(5')$$

$$t = \frac{20.52 - 8.3}{1.76} = 6.94\ s$$

c) Nuevo ángulo (α) si la velocidad es constante.

$$\Sigma F_x = \cancel{m}gsen\alpha - \mu_k \cancel{m}gcos\alpha \ = \cancel{m}\cancel{a}_x$$

$$gsen\alpha - \mu_k gcos\alpha = 0$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \mu_k$$

$$tan\alpha = \mu_k \quad \ldots \quad \alpha = tan^{-1}\mu_k$$

$$\alpha = tan^{-1}0.21 = 11.86° \approx 12°$$

Ejercicio 7. Se lanza hacia arriba por un plano inclinado (θ = 30º) un paquete de 10 lbf (peso) con una velocidad inicial de 25 ft/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el paquete y el plano inclinado es de 0.20 calcula la distancia a la cual el paquete llega al reposo.

Al realizar el diagrama de cuerpo libre, podemos encontrar las ecuaciones:

$$\Sigma F_x = -|\vec{w}|sen\theta - \left|\vec{f}\right| = ma_x \quad \ldots(1)$$

$$\Sigma F_y = \left|\vec{N}\right| - |\vec{w}|cos\theta = 0 \quad \ldots(2)$$

Despejando de (2) la magnitud de la fuerza normal y sustituyendo en (1), tenemos:

$$-|\vec{w}|sen\theta - \mu_k|\vec{w}|cos\theta = \frac{|\vec{w}|}{g}a_x$$

$$-sen\theta - \mu_k cos\theta = \frac{a_x}{g}$$

Despejando la aceleración y sustituyendo los valores conocidos

$$-(sen\theta + \mu_k cos\theta)g = a_x$$

$$a_x = -(sen30 + 0.20cos30)(32.2ft/s^2) = \ -21.67ft/s^2$$

Si recurrimos a la ecuación $v_2{}^2 = v_0{}^2 + 2as$ en donde s representa la distancia recorrida y sustituimos los valores conocidos, con v_2 = 0 ft/s debido a que se llega al reposo, podemos dar solución al ejercicio.

$$0 = (25)^2 + \ 2(-21.67)s$$

$$s = \frac{(25)^2}{2(21.67)} = 14.42\ ft$$

Ejercicio 8. Con una barra horizontal extensible (ver Figura 1), se sostiene un objeto de 75 kg entre dos paredes como se ilustra en la Figura 2. Las fuerzas iguales F ejercidas por la barra contra las paredes, pueden modificarse por ajuste de la longitud de la barra. Sólo la fricción entre los extremos de la barra y de las paredes sostiene el sistema. El coeficiente de fricción estática entre ambas superficies es μ_s= 0.41. Encuentre el valor mínimo de las fuerzas F, $F_{mín}$, para que el sistema permanezca en reposo.

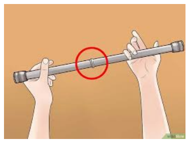


Figura 1. Barra extensible

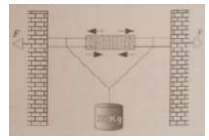


Figura 2. Esquema del sistema a analizar

El ejercicio propone encontrar la magnitud de un vector de fuerza. Una forma de resolverlo, que no la única, se presenta a continuación. Haremos uso de las leyes de Newton del movimiento. En particular, la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \vec{F}_{neta} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} \qquad \ldots \text{(A)}$$

que nos dice que "la rapidez de cambio del ímpetu de un cuerpo es igual a la fuerza resultante, $\vec{F}_{neta}$, que actúa sobre el cuerpo y sigue la dirección de la fuerza". $\vec{p}$ es el vector ímpetu y su magnitud es igual al producto mv.

La variación del ímpetu con respecto al tiempo se obtiene de la derivada del producto de dos funciones; pero para la situación particular que estamos analizando, la masa es una cantidad constante, es decir, $\frac{d\,m}{dt} = 0$. Por otra parte, $\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{a}$. Observe:

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \frac{d\,(\overrightarrow{mv})}{dt} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d\,m}{dt} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Entonces la forma de la ecuación de segunda Ley de Newton que usaremos es

$$\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a} \qquad \ldots. \text{(B)}$$

El enunciado del problema menciona que el sistema debe permanecer el reposo, por lo que esta condición de estado de equilibrio estático se cumple cuando

$$\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a} = \vec{0} \qquad \ldots \text{(C)}$$

Es menester elaborar diagramas de cuerpo libre o diagramas de vectores, para analizar las fuerzas presentes y poder determinar la fuerza F incógnita que aparece ilustrada en la Figura 2. Note que el sistema es simétrico: esto nos permitirá hacer simplificaciones y, considerar y analizar sólo parte del sistema.

El sistema bajo estudio se puede modelar considerando sólo dos dimensiones espaciales. Así, las ecuaciones del balance de fuerzas de segunda ley de Newton para equilibrio estático, quedan

$$\vec{F}_{neta,x} = m\,\vec{a}_x = \vec{0}\vec{F}_{neta,y} = m\,\vec{a}_y = \vec{0} \qquad \ldots \text{(D)}$$

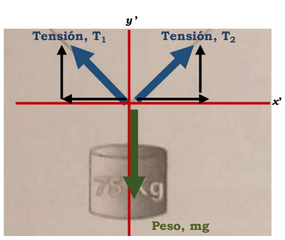


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre 1, DCL1

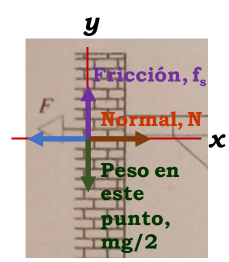


Figura 4. Diagrama de cuerpo libre 2, DCL2

Los diagramas de cuerpo libre deben estar asociados a un sistema de ejes coordenados arbitrarios. En este caso se presentan dos diagramas de cuerpo libre, el primero de ellos (DCL1, Figura 3),estudia la parte del sistema que comprende la masa de 75 kg y los cables que están en contacto con ella y que la sostienen en reposo, y tiene asociados los ejes x´ - y´.

El segundo diagrama de cuerpo libre (DCL2, Figura 4) analiza la situación de la pared del lado izquierdo, justo en un punto donde se puede considerar que la barra aplica la fuerza F sobre ella. Así, se ilustran además la fuerza normal a la superficie, N, la fuerza de fricción estática, f_s, que se opone al movimiento descendente y el peso que se experimenta en ese punto. Sus ejes coordenados arbitrarios se designan como x, y.

De manera intuitiva, podemos considerar que el peso experimentado en ese punto en la pared es igual a la mitad del peso del objeto de 75 kg, ya que el peso total es soportado por el sistema completo y sólo estamos analizando la mitad de él, por un argumento de simetría. Pero debemos comprobarlo por lo que procederemos a analizar el DCL1, sin perder de vista que la incógnita que buscamos es la fuerza F.

Es importante aclarar que, en esta propuesta de resolución se considera que: i) los cables son inextensibles y de masa despreciable; ii) la barra extensible tiene masa despreciable; en ambos casos, las masas so despreciables si se les compara con la masa de 75 kg.

El punto de arranque será la ecuación (C). Analizando el diagrama de cuerpo libre 1, DCL1, de la Figura 3, notamos que las fuerzas presentes son las tensiones de los cables, que se ubican precisamente a lo largo de éstos y el peso de la masa, que es un vector que siempre apunta hacia el centro de la Tierra. La ecuación queda:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a} = \vec{0} \qquad \dots (1)$$

Debe notarse que ambas tensiones T_1y T_2, se encuentran en el plano cartesiano de dos dimensiones, y que por lo tanto se pueden descomponer en sus componentes ortogonales (ver Figura 3). Comencemos con el análisis en el eje x horizontal

$$\vec{F}_{neta,x} = \vec{T}_{1x'} + \vec{T}_{2x'} = m\vec{a}_{x'} = \vec{0} \qquad \dots (2)$$

que escribiéndola en términos del tamaño y la dirección de los vectores de fuerza, resulta en

$$F_{neta,x'} = T_{1x'} - T_{2x'} = 0 \qquad \dots (3)$$

Por un argumento de simetría del sistema, notamos que ambas componentes de fuerza en el eje x' son de la misma magnitud

$$|\vec{T}_{1x'}| = |\vec{T}_{2x'}| \qquad \dots (4)$$

Y entonces, de la ecuación (4) concluimos que, al ser del mismo tamaño y dirección opuesta, las componentes de la fuerza de tensión en el eje x horizontal se cancelan mutuamente

$$\vec{T}_{1x'} = \vec{T}_{2x'} \qquad \dots (5)$$

A partir de la ecuación (1) y analizando ahora las fuerzas presentes en el eje coordenado y'

$$\vec{F}_{neta,y'} = \vec{T}_{1y'} + \vec{T}_{2y'} + m\vec{g} = m\vec{a}_{y'} = \vec{0} \qquad \dots (6)$$

Nuevamente, por un argumento de simetría y de acuerdo al DCL1

$$|\vec{T}_{1y'}| = |\vec{T}_{2y'}| = T_{y'} \qquad \dots (7)$$

En términos del tamaño y la dirección de los vectores de fuerza, podemos escribir la ecuación (6) como

$$\vec{F}_{neta,y'} = T_{1y'} + T_{2y'} - mg = 2\,T_{y'} - mg = 0 \qquad \dots (8)$$

Y entonces, resolviendo para la componente vertical de la tensión, tenemos

$$T_{y'} = \frac{mg}{2} \qquad \dots (9)$$

Empleando argumentos de la 3era. Ley de Newton, para objetos en contacto a través de cables inextensibles, comprobamos que el tamaño de la tensión vertical es igual al tamaño del vector peso que se experimenta en el punto de análisis del DCL2, y que es exactamente mg/2. La intuición no falló, pero en sistemas más complejos y no simétricos es menester realizar este análisis de fuerza para no cometer errores.

Nos enfocamos ahora al estudio del DCL2 de la Figura 4, con sus ejes coordenados arbitrarios, para determinar la fuerza desconocida, F, que es nuestro objetivo. Con la aplicación de la ecuación (D) correspondiente, obtenemos

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{f_s} + \frac{m\vec{g}}{2} = m\vec{a} = \vec{0} \quad \dots (10)$$

Los balances de fuerza de segunda ley de Newton, tanto en el eje x como en el eje y, nos proporcionan las siguientes ecuaciones

$$\vec{F}_{neta,x} = \vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}_x = \vec{0} \quad \dots (11)$$

$$\vec{F}_{neta,y} = \vec{f_s} + \frac{m\vec{g}}{2} = m\vec{a}_y = \vec{0} \quad \dots (12)$$

Considerando la magnitud y dirección de las fuerzas participantes en el eje x horizontal obtenemos

$$F_{neta,x} = F - N = 0 \quad \dots (13)$$

Y por lo que respecta al eje y vertical

$$F_{neta,y} = f_s - \frac{mg}{2} = 0 \quad \dots (14)$$

Se atribuye a Leonardo Da Vinci (1452-1519) el descubrimiento experimental de la ley que empleamos para la fricción, en este caso la fricción estática f_s, que actúa sobre las superficies en reposo.

$$f_s = \mu_s N \quad \dots (E)$$

Sustituyendo esta expresión (E) en la ecuación (14) y haciendo un poco de álgebra obtenemos la fuerza normal N:

$$N = \frac{mg}{2\mu_s} \quad \dots (15)$$

Seguramente ya había observado que, a partir de la ecuación (13) podemos conocer la fuerza F incógnita

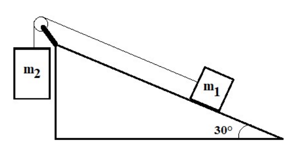
$$F = N = \frac{mg}{2\mu_s} \quad \dots (16)$$

Sustituyendo los valores numéricos correspondientes, y considerando que g = 9.81 m/s^2 obtenemos

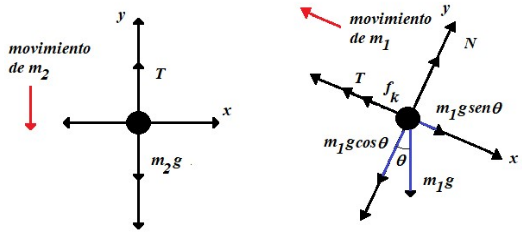
$$F = \frac{mg}{2\mu_s} = \frac{(75\ kg)(9.81\,{}^{m}/_{s^2})}{2(0.41)} = 897.3\ N \approx 900\ N \quad \dots (17)$$

El valor de la magnitud de la fuerza F obtenido, es el valor mínimo $\boldsymbol{F_{mín}}$que puede tomar para mantener el estado de reposo, ya que se ha determinado con un modelo de equilibrio estático (ecuaciones D), y empleando un coeficiente de fricción estático que corresponde a una fuerza de fricción presente en ausencia de movimiento. Un valor más pequeño en la magnitud de esta fuerza iniciará el movimiento descendente.

Ejercicio 9. En la siguiente figura, m_1 = 1.5 kg y m_2 = 2 kg. Ambos bloques parten del reposo y μ_k = 0.08 entre el bloque m_1 y el plano. Calcula la aceleración del sistema.



Los bloques forman un mismo sistema y entonces su aceleración es la misma. La fuerza de fricción que actúa sobre el bloque m_1 es cinética. Se considera que la cuerda que une a los bloques es inextensible y solo transmite la tensión. La polea es ideal y solo distribuye la tensión en la cuerda. Tomando en cuenta todo esto, al hacer un diagrama de cuerpo libre (DCL) para cada bloque, y considerando ambos como partículas puntuales se obtiene lo siguiente.



Con estos diagramas se aplica la segunda ley de Newton para determinar la condición de equilibrio dinámico en cada bloque considerando la dirección del movimiento de cada uno y así obtener un sistema de ecuaciones que permita determinar la aceleración del sistema. La dirección del movimiento de los bloques se propone las condiciones del problema (masa de los bloques, inclinación del plano y el valor del coeficiente de fricción cinética).

Es importante señalar que cuando existe fricción cinética el movimiento propuesto será válido si la aceleración que se obtiene es positiva. Cuando la aceleración que se obtiene es negativa se elige la dirección contraria y se vuelve a resolver el sistema de ecuaciones, y si la aceleración vuelve a ser negativa se concluye que el sistema está en equilibrio estático y no hay movimiento.

Para el bloque m_2

- en el eje x: no hay movimiento.
- en el eje y: $F_y = m_2a \quad \Rightarrow \quad m_2g - |\vec{T}| = m_2a$ (El bloque se mueve hacia abajo por eso T es negativa)

Para el bloque m_1:

En el DCL el ángulo del plano inclinado siempre se ubica entre el vector peso y el eje y negativo, por eso a la componente del peso en x se le asocia con el seno del ángulo y a la componente del peso en y el coseno del ángulo. El bloque m_1 se mueve hacia arriba por que el bloque m_2 cae debido a que su masa es mayor.

- en el eje x: $|\vec{T}| - m_1g\ sen30° - |\vec{f}_k| = m_1a$
- en el eje y: $|\vec{N}| - m_1\text{g}\ \cos 30° = 0$ (En el eje y no se mueve el bloque, su movimiento es en el eje x)

Del movimiento en el eje x para el bloque m_2 se obtiene:

$$|\vec{T}| = m_2g - m_2a$$

Sustituyendo $|\vec{T}|$ en el movimiento en el eje x para el bloque m_1 se determina la aceleración del sistema:

$$m_2g - m_2a - m_1g\ sen30° - |\vec{f}_k| = m_1a$$

$$m_1a + m_2a = m_2g - m_1g\ sen30° - |\vec{f}_k|$$

$$a = \frac{m_2g - m_1g\ sen30° - |\vec{f}_k|}{m_1 + m_2}$$

Luego, para la fuerza de fricción, se sabe que por definición: $|\vec{f}_k| = \mu_k|\vec{N}|$

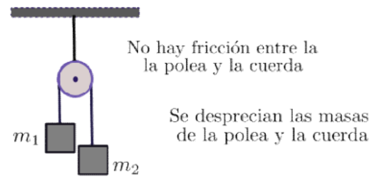
Del caso en el eje y para el movimiento del bloque m_1: $|\vec{N}| = m_1g\ cos\,30\ °$

Por lo tanto:

$$|\vec{f}_k| = \mu_k m_1 g\ cos\,30° \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_2g - m_1g\ sen30° - \mu_k m_1 g\ cos\,3\ \ °}{m_1 + m_2}$$

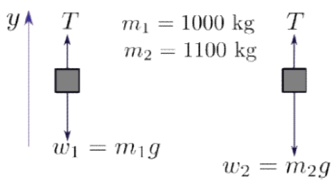
$$a = \frac{2\ kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right) - 1.5\ kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)sen30° - 0.08(1.5\ kg)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)cos\ \ °}{1.5\ kg + 2\ kg} = 3.212297\frac{m}{s^2} \approx 3.21\frac{m}{s^2}$$

Ejercicio 10. Un ascensor consiste en una caja de 1000 kg y un contrapeso de 1100 kg. Calcula la aceleración de la caja y la tensión.



En la figura se presenta un esquema simplificado del problema. Este dispositivo se conoce como máquina de Atwood.

A continuación, se presenta el diagrama de fuerzas de cada bloque en un sistema de referencia inercial. En él se muestran las magnitudes de la fuerza (la tensión) que ejerce la cuerda, T, y de los pesos de las cajas. Además, la tensión es la misma a lo largo de la cuerda.



Las ecuaciones de movimiento de las cajas son:

$$T - w_1 = m_1 a_1$$

$$T - w_2 = m_2 a_2$$

Además, las magnitudes de las aceleraciones de los bloques son iguales (la cuerda es rígida) pero tienen signo contrario pues, cuando una caja sube, la otra baja.

$$a_2 = -a_1$$

Por lo tanto,

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \qquad (1)$$

Al sustituir los datos del problema, se obtiene $a_1 = 0.47\ \mathrm{m/s^2}$. Dado que $a_1 > 0$, la caja 1 acelera hacia arriba. Además

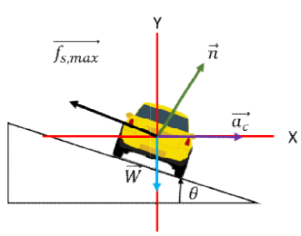
$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 10277.14\ \mathrm{N}$$

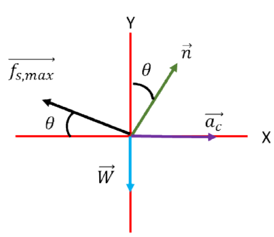
Nota también que, si las dos masas fueran iguales, a_1 y a_2 valdrían cero; es decir, las cajas estarían en equilibrio, se moverían a velocidad constante.

Ejercicio 11. Por una carretera peraltada 22.75°, circula un auto de 950 kg. Determina el intervalo de rapideces para que el auto pueda tomar una curva de radio 30 m sin patinar. El coeficiente de fricción estático entre la carretera y las ruedas del auto es de 0.3.

Para resolver el ejercicio situemos el sistema físico en el auto considerando que las fuerzas que actúan sobre el son la fuerza normal $|\vec{n}|$, el peso $|\vec{W}|$ y la fuerza de fricción estática máxima$|\vec{f}_{s,max}|$.

Debemos de considerar que las fuerzas de fricción, las cuales nos ayudarán a determinar la rapidez máxima y mínima a la cual el auto deberá tomar la curva peraltada. En el primer caso hemos considerado la fuerza de fricción para que el auto no se impacte con el centro de la curva. Debido a lo anterior, la dirección del vector fricción estática máxima deberá ser opuesta al centro de la curva.





En un sistema de referencia cartesiano hemos hecho coincidir la posición del sistema físico con el origen. Por geometría, el ángulo de peralte es el mismo que hace el vector fuerza normal con respecto a la vertical (eje y en este caso) así como el que el vector fuerza de fricción máxima tiene con respecto a la horizontal (eje x).

Al desarrollar la suma de fuerzas en cada eje podemos establecer que en la vertical la suma deberá de ser cero ya que no hay ninguna aceleración en ese eje, mientras que en el caso horizontal la suma de fuerzas deberá coincidir con el producto de la masa y la aceleración centrípeta. Lo anterior se puede expresar como:

$$\Sigma F_y: |\vec{n}|cos\theta + \left|\vec{f}_{s,max}\right|sen\theta - mg = 0 \quad \ldots(1)$$

$$\Sigma F_x: |\vec{n}|sen\theta - \left|\vec{f}_{s,max}\right|cos\theta = ma_c \quad \ldots(2)$$

Ahora recurriremos a la relación existente entre la magnitud de la fuerza de fricción y la magnitud de la fuerza normal, $\left|\vec{f}_{s,max}\right| = \mu_s|\vec{n}|$, tal que:

$$\Sigma F_y: |\vec{n}|cos\theta + \mu_s|\vec{n}|sen\theta - mg = 0 \quad \ldots(3)$$

$$\Sigma F_x: |\vec{n}|sen\theta - \mu_s|\vec{n}|cos\theta = ma_c \quad \ldots(4)$$

Con lo anterior hemos construido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

De la ecuación 3 despejamos a la magnitud de la fuerza normal:

$$|\vec{n}| = \frac{mg}{cos\theta + {}_{s}sen\theta}$$

Para sustituirla en la ecuación 4.

$$\left(\frac{mg}{cos\theta+\mu_s sen\theta}\right)(sen\theta) - \mu_s\left(\frac{mg}{cos\theta + {}_{s}sen\theta}\right)(cos\theta) = ma_c \quad \ldots(5)$$

Por otra parte, la aceleración centrípeta se relaciona con la rapidez tangencial de la siguiente manera:

$$a_c = \frac{V^2}{R} \quad \ldots(6)$$

Donde V es la rapidez del auto y R el radio de la curva en unidades del Sistema Internacional.

Sustituimos la magnitud de la aceleración centrípeta de la ecuación 6 en la ecuación 5:

$$\left(\frac{mg}{cos\theta+\mu_s sen\theta}\right)(sen\theta) - \mu_s\left(\frac{mg}{cos\theta + {}_{s}sen\theta}\right)(cos\theta) = m\left(\frac{V^2}{R}\right)$$

Simplificando la ecuación y despejando la rapidez, V,:

$$V = \pm\sqrt{\frac{gR}{cos\theta + {}_{s}sen\theta}[sen\theta - \mu_s cos\theta]}$$

Como estamos hablando de la magnitud de un vector, entonces tomaremos la solución positiva de la ecuación anterior. Sustituimos todos los términos en unidades SI:

$$V = \sqrt{\frac{(9.81\ m/s^2)(30\ m)}{cos(22.75°)+(0.3)(sen(22.75°))}[sen(22.75°) - (0.3)cos(22.75°)]} = 5.585\ \frac{m}{s}$$

El resultado anterior corresponde a la rapidez mínima a la que el auto puede tomar la curva con un peralte de 22.75° sin patinarse.

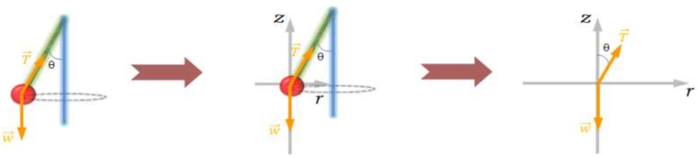
Para obtener la rapidez máxima debemos considerar el caso contrario, es decir, ahora trataremos de que el auto no salga derrapado por la orilla de la curva peraltada, por lo que la dirección de la fuerza de fricción estática máxima deberá apuntar en la dirección apuesta del caso anterior (al centro de la curva). El resultado de dicho análisis da una rapidez de 15.56 m/s.

Con los resultados anteriores se puede afirma que el intervalo de rapideces a las que se puede tomar la curva con radio de 30 m, ángulo de peralte de 22.75° y con un coeficiente de fricción estático de 0.3 es de:

$$(5.585\,, 15.560)\frac{m}{s}$$

Ejercicio 12. Un objeto de 45.0 kg gira con rapidez constante alrededor de un poste vertical sin cambiar de altura. Si la cuerda que está atada al bloque forma un ángulo de 15.0 grados con la vertical y esta mide 1.2 m, determina la magnitud de la tensión y el periodo del movimiento circular.

Dado que el objeto tiene masa existirá el peso y como el objeto está atado de una cuerda, entonces, existirá una fuerza de tensión.



$$\sum F_r : |\vec{T}|sen\theta = ma_R$$
$$\sum F_z : |\vec{T}|cos\theta - |\vec{w}| = 0\text{ N}$$

Se eligió el eje cartesiano z como el eje perpendicular al eje radial debido a que la trayectoria circular se está describiendo en un plano horizontal y la suma de fuerzas en el eje cartesiano z se igualó a cero pues el texto plantea que la altura de la trayectoria circular no cambia.

Para determinar la magnitud de la tensión, recurriremos a la suma de fuerzas en el eje cartesiano z pues podemos determinar el peso del objeto y tenemos el ángulo que se forma con la vertical.

$$\sum F_z : |\vec{T}|cos\theta - |\vec{w}| = 0\text{ N} \quad \ldots \quad |\vec{T}|cos\theta - |\vec{w}| = 0 \quad \ldots \quad |\vec{T}| = \frac{|\vec{w}|}{cos\theta} = \frac{mg}{cos\theta} \quad \ldots \quad |\vec{T}| = \frac{(45.0)(9.81)}{cos15.0} = 457.02\text{ N}$$

En cuanto al valor del periodo del movimiento circular, es requerido retomar la ecuación de desplazamiento angular para una trayectoria circular, $\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2}$

Dado que el movimiento se da con rapidez constante, entonces la aceleración angular vale 0 rad/s² y para determinar la velocidad angular necesitamos la aceleración radial y el radio del movimiento circular, ya que:

$$a_R = \omega^2 R$$

El valor de la aceleración radial puede obtenerse de la suma de fuerzas en el eje radial debido a que ya se conoce la magnitud de la tensión.

$$\sum F_r : |\vec{T}|sen\theta = ma_R \quad \ldots \quad |\vec{T}|sen\theta = ma_R \quad \ldots \quad a_R = \frac{|\vec{T}|sen\theta}{m} \quad \ldots \quad a_R = \frac{457.02sen15.0}{45.0} = 2.63\text{ m/s}^2$$

Para determinar el radio del movimiento circular, asumiremos que la longitud de la cuerda representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es el radio del movimiento circular, tal que: el radio es 0.31 m.

empleando la ecuación para la aceleración radial, podemos determinar el valor de la velocidad angular.

$$a_R = \omega^2 R \quad \ldots \quad \omega = \sqrt{\frac{a_R}{R}} = \sqrt{\frac{2.63}{0.31}} = 2.91\text{ rad/s}$$

Finalmente, sabemos que el periodo está definido como el tiempo que tarda el objeto en completar un ciclo, es decir, cuando $\Delta\theta$ vale 2π radianes.

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2} \quad \ldots \quad \Delta\theta = \omega_0 t \quad \ldots \quad t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{2.91} = 2.16\text{ s}$$