UNIDAD 5. TRABAJO Y ENERGÍA

Ejercicio 1. Una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{l} = (2.00\hat{\imath} - 5.00\hat{\jmath})$m. Si durante el desplazamiento, una fuerza constante $\vec{F} = (3.00\hat{\imath} + 4.00\hat{\jmath})$N actúa sobre la partícula, calcule:

a) el trabajo realizado por la fuerza.

b) la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento ($F_{\parallel}$).

c) el ángulo interno formado por ambos vectores.

a) Puesto que en este caso la fuerza involucrada es constante, simplemente el trabajo que realiza es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

$$W = (2.00)(3.00) + (-5.00)(4.00) = -14.0 \text{ J}$$

b) En este caso como $\vec{F} \cdot \vec{l} = F_{\parallel} l$, entonces

$$F_{\parallel} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{l}}{l} = \frac{-14.0}{\sqrt{29.0}} \text{N} = -2.60 \text{ N}$$

donde $l = \sqrt{\vec{l} \cdot \vec{l}} = \sqrt{29.0}$ m.

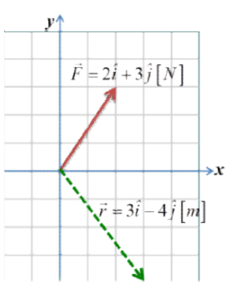
c) Puesto que $\vec{F} \cdot \vec{l} = Fl\cos\varphi$, entonces

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{l}}{Fl}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-14.0}{5.0 \cdot \sqrt{29.0}}\right)^{\circ} = 121°,$$

donde $F = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{25.0}$ N.

Ejercicio 2. Considera despreciables los rozamientos. Una partícula se mueve en el plano *xy*, desde el (0,0) m a la posición (3,-4) m por efecto de una fuerza $\vec{F} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\,[N]$. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza sobre la partícula durante este desplazamiento?

Se emplea la definición de trabajo en términos del producto punto entre vectores. El vector fuerza está explícito, por lo que solo hay que definir el vector desplazamiento, que en este caso inicia en el origen.



$$W = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{0,0}^{3,-4} \vec{F}_{(xy)} \bullet d\vec{r}_{(xy)}$$

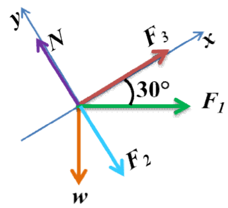
Considerando la fuerza constante y que el desplazamiento está definido, entre dos puntos, como:

$$\int_{0,0}^{3,-4} d\vec{r}_{(xy)} = \vec{r}\,\Big|_{0,0}^{3,-4} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

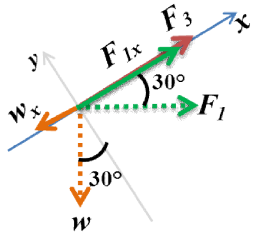
$$W = \vec{F} \bullet \vec{r} = (2,3) \bullet (3,-4) = 6 - 12 = -6 \text{ J}$$

Ejercicio 3. Ubloque de 3.0 kg se mueve hacia arriba por un plano inclinado 30° bajo la acción de las tres fuerzas: F_1 es horizontal y de 40 N de magnitud; F_2 es normal al plano y de 20 N de magnitud; F_3 es paralela al plano y de 30 N de magnitud. Determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas, cuando el bloque (y el punto de aplicación de cada fuerza) se mueve 80 cm hacia arriba del plano inclinado.

Para resolver el ejercicio es necesario realizar un esquema del problema y posteriormente un diagrama de cuerpo libre para identificar fácilmente todas las fuerzas involucradas en el desplazamiento.



Las fuerzas que actúan en el eje x que es la dirección del desplazamiento.

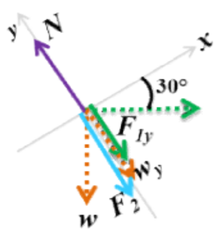


$$W_{F_{1x}} = (F_1 cos30)(0.8)cos0 = 27.71 \text{ J}$$

$$W_{F_3} = (F_3)(0.8)cos0 = 24 \text{ J}$$

$$W_{w_x} = (mgsen30)(0.8)cos180 = -11.77 \text{ J}$$

Las fuerzas que actúan en el eje y, que no contribuyen al desplazamiento y por lo tanto NO realizan trabajo.



$$W_{F_{1y}} = (F_1 sen30)(0.8)cos270 = 0 \text{ J}$$

$$W_{F_2} = (F_2)(0.8)cos270 = 0 \text{ J}$$

$$W_{w_y} = (mgcos30)(0.8)cos270 = 0 \text{ J}$$

$$W_N = (N)(0.8)cos90 = 0 \text{ J}$$

Ejercicio 4. Un objeto de masa 3.0 g modifica su velocidad de $\vec{V}_0 = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}[{}^{m}/_{s}]$ a $\vec{V} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}[{}^{m}/_{s}]$ por efecto de una fuerza constante que actúa durante 1.2 s. Determine, en joule, el trabajo que realiza la fuerza en este intervalo de tiempo.

Este ejercicio puede resolverse de forma muy sencilla usando el teorema del trabajo, W, y el cambio en la energía cinética: $W = \Delta E_c$. Se sabe que: $E_c = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}\right|^2$.

Primero se transforma la masa a kilogramo, m = 3.0 g = 3.0×10^{-3} kg y se calcula la magnitud de las velocidades involucradas:

$$\vec{V}_0 = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow \left|\vec{V}_0\right| = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{V}_{(1.2s)} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow \left|\vec{V}_{(1.2)}\right| = \sqrt{(8)^2 + (4)^2} = \sqrt{80}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Por consiguiente

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{(1.2)}\right|^2 - \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_0\right|^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left|\vec{V}_{(1.2)}\right|^2 - \left|\vec{V}_0\right|^2\right\}$$

Sustituyendo se obtiene

$$W = \frac{1}{2}(3\times10^{-3}kg)\left\{\left(\sqrt{80}\frac{m}{s}\right)^2 - \left(\sqrt{40}\frac{m}{s}\right)^2\right\}$$

$$W = \frac{1}{2}(3\times10^{-3}[kg])\left\{80\left[\frac{m^2}{s^2}\right] - 40\left[\frac{m^2}{s^2}\right]\right\} = 60\times10^{-3}\left[\frac{kg\ m^2}{s^2}\right]$$

Finalmente simplificando y usando la definición de Joule

$$W = 6\times10^{-2}[\text{J}]$$

Ejercicio 5. Una bala de 11.0 g que viaja con una rapidez 700 m/s, golpea un bloque de madera en un punto fijo, penetra la madera y se desplaza una distancia de 6.0 cm dentro del bloque, antes de detenerse. Con el Teorema del trabajo y la variación de la energía cinética, determine la fuerza promedio que el bloque de madera ejerció sobre la bala.

El ejercicio propone encontrar la magnitud de un vector de fuerza, en particular del vector que se opone al movimiento de la bala en el interior del bloque que madera, y que resulta ser el vector de fuerza de fricción cinética. Una forma de resolverlo, que no la única, se presenta a continuación.

Observe la Figura 1 que ilustra el sistema bajo estudio, en particular en los momentos antes de que la bala, que inicialmente viaja a una rapidez v_{1i} = 700 m/s, entre al bloque de madera.

Figura 1. Bala antes de ingresar al bloque de madera

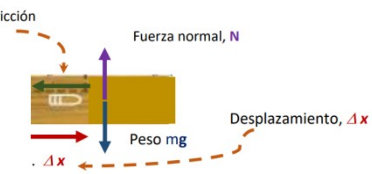


Figura 2. Bala en reposo, una vez que ha recorrido 6.0 cm dentro de la madera. Se muestra el diagrama de vectores.

La Figura 2 ilustra el instante en que la bala llega al reposo, habiendo sido frenada desde su ingreso, por la fuerza promedio que el bloque de madera ejerció sobre ella, y que corresponde precisamente a la fuerza que se opone al movimiento: la fuerza de fricción cinética $\overrightarrow{f_k}$.

Con respecto al teorema a emplear para la resolución, éste afirma que: *Cuando se realiza trabajo sobre un sistema y el único cambio en éste es en su rapidez, el trabajo neto efectuado sobre el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema, que se expresa con la ecuación:*

$$W_{neto} = K_f - K_i \qquad \ldots \text{(A)}$$

A la expresión anterior se le conoce como el Teorema del trabajo y la variación de la energía cinética. Ahora bien, el trabajo neto que el bloque de madera (agente externo) ejerce sobre la bala (que es el sistema bajo estudio), se determina con la fuerza neta o fuerza resultante $\sum \vec{F} = \vec{F}_{neta}$ sobre el sistema, de la siguiente manera:

$$W_{neto} = \int \vec{F}_{neta} \bullet d\vec{r} \qquad \ldots \text{(B)}$$

Recordemos que el trabajo mecánico, que es una función escalar, se determina a través del producto punto de dos vectores: el vector fuerza neta aplicada y el vector de desplazamiento.

Como se requiere conocer la fuerza neta que realiza el trabajo neto, se justifica la necesidad del diagrama de vectores de la Figura 2. Las fuerzas perpendiculares (mg y N) al vector de desplazamiento Δx, no contribuyen al trabajo neto: esto es por la definición del producto punto o producto escalar que se emplea en la ecuación (B). Sin embargo, la fuerza de fricción cinética f_k, que es antiparalela al vector de desplazamiento Δx, sí contribuye al trabajo neto realizado, por los mismos argumentos de producto de vectores.

Para la situación bajo estudio, consideraremos que es válido el uso de una fuerza neta promedio que aplica el bloque sobre la bala, y que dicha fuerza promedio tiene, por lo tanto, una magnitud constante. Nuestra intuición al respecto de la situación que ocurre nos lleva a pensar que esta fuerza es variable conforme ocurre el desplazamiento al interior de la madera, pero no contamos con información para estimar esta variación, de manera que la consideraremos como un valor promedio constante.

Entonces, la función escalar del trabajo, a partir de la ecuación (B) queda

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \bullet \Delta\vec{r} \qquad \ldots (1)$$

El análisis de vectores responsables del trabajo neto, concluyó que sólo el vector fuerza de fricción cinética $\overrightarrow{f_k}$participa. Y por la definición del producto escalar podemos escribir la siguiente ecuación:

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \circ \Delta\vec{r} = \overrightarrow{f_k} \circ \Delta\vec{x} = |\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}| \cos\theta \qquad \ldots (2)$$

Observe los vectores colocados en la Figura 2: el desplazamiento sólo ocurre en el eje horizontal x; θ es el ángulo entre los vectores fuerza neta y desplazamiento, los vectores son antiparalelos

$$W_{neto} = |\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}|\cos\theta = |\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}|\cos 180° = -|\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots (3)$$

Ahora que tenemos una expresión adecuada para conocer el trabajo neto, retomaremos el Teorema de la ecuación (A): la bala, inicialmente en movimiento, posee energía cinética $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. Al ingresar a la madera, la fuerza de fricción que es la incógnita que buscamos, provocará en ella una aceleración negativa, que la llevará finalmente a alcanzar el estado de reposo, la magnitud de la energía cinética final será cero, esto es, $K_f = 0$.

$$W_{neto} = -K_i \qquad \ldots (4)$$

Podemos obtener una nueva ecuación al igualar la expresión (3) con la expresión (4)

$$W_{neto} = -K_i = -|\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots(5)$$

De donde es posible resolver para la magnitud de la fuerza de fricción cinética $|\overrightarrow{f_k}|$

$$-\frac{1}{2}mv_i^2 = -|\overrightarrow{f_k}||\Delta\vec{x}| \qquad \ldots (6)$$

$$|\overrightarrow{f_k}| = \frac{\frac{1}{2}mv_i^2}{|\Delta\vec{x}|} = \frac{1}{2}\frac{(11.0\,x10^{-3}kg)(700\frac{m}{s})^2}{6.00x10^{-2}\,m} = 4.5x10^4\frac{kg\,m}{s^2} = 4.5x10^4 N$$

Note que se han sustituido las magnitudes de las cantidades con sus unidades, lo que permite realizar el análisis completo y obtener el resultado consistente de la magnitud de la fuerza buscada

$$|\overrightarrow{f_k}| = 4.5X10^4\ N$$

Esta es la magnitud de la fuerza promedio que el bloque de madera ejerció sobre la bala, cuya dirección es opuesta al vector desplazamiento.

Ejercicio 6. La fuerza que actúa sobre una partícula varía como se muestra en la figura 1. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza en la partícula conforme se mueve:

a) de x = 0 a x = 8.0 m.
b) de x = 8.0 m a x = 10.0 m.
c) de x = 0 a x = 10.0 m.

Figura 1

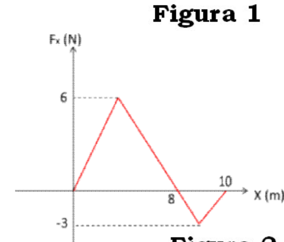
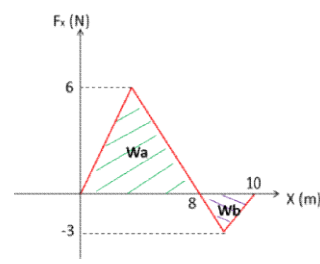


Figura 2



En este caso el trabajo es efectuado por una fuerza variable y está representado por el área bajo la curva. Bastará con aproximar el área de nuestra curva con el área de un triángulo según sea el caso correspondiente, (Figura 2)

El área para cualquier triángulo se puede calcular con:

$$Área = \frac{1}{2}(base)(altura) \qquad \ldots (1)$$

a) Para el trabajo de x = 0 a x = 8.0 m (área sombreada en verde en la Figura 2), sustituimos los valores correspondientes en la ecuación 1 en unidades del Sistema Internacional para obtener el valor del trabajo en Joules:

Área = Trabajo, W   base = 8 - 0 = 8 m   Altura = 6 – 0 = 6 N

$$Wa = \frac{1}{2}(8\,m)(6\,N) = 24\,J$$

b) Para el trabajo de x = 8.0 m a x = 10.0 m (área sombreada en violeta), sustituimos los valores correspondientes en la ecuación 1 en unidades del Sistema Internacional para obtener el valor del trabajo en Joules:

Área = Trabajo, W   Base = 10 - 8 = 2 m   Altura = |-3| – 0 = 3 N

$$Wb = -\frac{1}{2}(2\ m)(3\ N) = -3\ \mathrm{J}$$

El signo negativo del resultado se debe a que el área correspondiente se ubica por debajo de la horizontal. Lo anterior se explica al cambio de la dirección de la fuerza aplicada.

c) El trabajo de x = 0 a x = 10.0 m corresponde a la suma de los trabajos Wa y Wb obtenidos en los incisos anteriores (trabajo total)

$$Trabajo\ total = Wa + Wb = 21\ \mathrm{J}$$

Ejercicio 7. Se lanza hacia arriba por un plano inclinado (α = 20º), un paquete de 12 lb_f con una rapidez inicial de 30 ft/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el paquete y el plano inclinado es de 0.20. Determine la distancia a la cual el paquete llega al reposo.

Para resolver el ejercicio recurriremos al teorema trabajo y cambio en la energía cinética, $W = E_c - E_{c0}$.

En el inciso a nos solicitan la distancia que recorre el objeto cuando llega al reposos, así que podemos considerar que la energía cinética final, E_C, es cero, tal que:

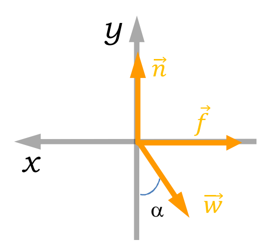
$$W = -E_{c0}$$

Sustituyendo el trabajo en la ecuación anterior por su definición:

$$\vec{F}\bullet\Delta\vec{r} = -E_{c0} \qquad \dots (1)$$

La magnitud del término $\Delta\vec{r}$, representa la distancia que recorre el paquete desde el inicio de su movimiento hasta que alcanza el reposo.

Para determinar la fuerza $|\vec{F}|$ que realiza trabajo sobre el paquete, es necesario recurrir al diagrama de cuerpo libre para obtener la suma de fuerzas en cada eje.



$$\Sigma F_x = -|\vec{f}| - w_x \qquad \dots (2)$$

$$\Sigma F_y = |\vec{n}| - w_y \qquad \dots (3)$$

Debido al marco de referencia elegido, únicamente en el eje x existe desplazamiento así que sólo la fuerza en este eje, F_x, realiza trabajo. Para encontrar el valor de F_x, en la ecuación 2, emplearemos que $|\vec{f}| = \mu|\vec{n}|$.

Si despejamos la fuerza normal de la ecuación 3 y sustituimos en la ecuación 2, tenemos

$$F_x = -\mu w_y - w_x \qquad \dots (4)$$

Si sustituimos la ecuación 4 en la ecuación 1.

$$(-\mu w_y - w_x)|\Delta\vec{r}| = -E_{c0}$$

Desarrollando el término de la energía cinética inicial y cambiando la masa por el peso.

$$(-\mu w_y - w_x)|\Delta\vec{r}| = -\frac{|\vec{w}||\vec{v}_0|^2}{2g}$$

Cambiando w_x y w_y, por su relación con el ángulo de inclinación y la magnitud del peso.

$$(-\mu|\vec{w}|cos\alpha - |\vec{w}|sen\alpha)|\Delta\vec{r}| = -\frac{|\vec{w}||\vec{v}_0|^2}{2g}$$

Eliminado la magnitud del peso.

$$(-\mu cos\alpha - sen\alpha)|\Delta\vec{r}| = -\frac{|\vec{v}_0|^2}{2g}$$

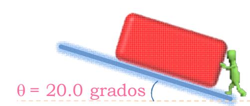
Sustituyendo los valores conocidos y despejando la magnitud del desplazamiento, el cual representa la distancia que recorre el paquete, tenemos:

$$[-(0.20)cos20.0 - sen20.0]|\Delta\vec{r}| = -\frac{(30ft/s)^2}{2(32.2\,ft/s^2)}$$

$$[-0.5299]|\Delta\vec{r}| = -13.9751\,ft$$

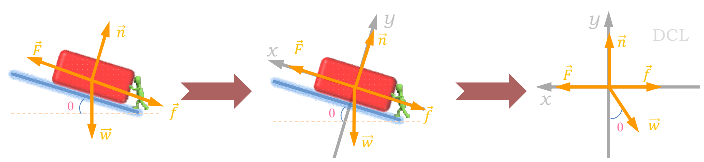
$$|\Delta\vec{r}| = 26.37\,ft$$

Ejercicio 8. Un objeto de 50.0 kg, inicialmente en reposo, se mueve hacia arriba de una superficie inclinada 20.0° sobre la horizontal por efecto de una fuerza aplicada de 400.0 N que es constante y paralela a la superficie. Determine el trabajo total que debe realizarse para que el bloque suba 1.0 m de altura. Considere que el coeficiente de fricción vale 0.10.



Para resolver elegiremos un espacio euclidiano en donde el eje cartesiano x apunta en la dirección del movimiento del objeto mientras que el eje cartesiano y se mantendrá perpendicular a la trayectoria del objeto.

Con el espacio euclidiano definido, entonces, determinemos la magnitud de la fuerza resultante apoyándonos en el diagrama de cuerpo libre.



Dada la distribución de fuerzas en el DCL podemos expresar que la suma de fuerzas en cada eje cartesiano será:

$$\sum F_x : |\vec{F}| - |\vec{f}| - |\vec{w}|sen\theta = ma_x \qquad \sum F_y : |\vec{n}| - |\vec{w}|cos\theta = 0\text{ N}$$

Sustituyendo los valores dados por el ejercicio podemos determinar la fuerza resultante F_x.

$$\sum F_y : |\vec{n}| - |\vec{w}|cos\theta = 0\text{ N} \quad \ldots \quad |\vec{n}| - |\vec{w}|cos\theta = 0 \quad \ldots \quad |\vec{n}| = |\vec{w}|cos\theta$$

$$|\vec{n}| = (50.0)(9.81)cos20.0 = 460.92\text{ N}$$

$$\sum F_x : |\vec{F}| - |\vec{f}| - |\vec{w}|sen\theta = ma_x \quad \ldots \quad \sum F_x = |\vec{F}| - |\vec{f}| - |\vec{w}|sen\theta \quad \ldots \quad \sum F_x = |\vec{F}| - \mu|\vec{n}| - |\vec{w}|sen\theta$$

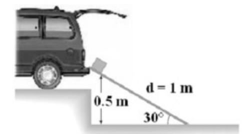
$$\Sigma F_x = (400.0) - (0.10)(460.92) - (50.0)(9.81)sen20.0 = 186.15\text{ N}$$

Para determinar el trabajo total, nos hace falta encontrar la magnitud del desplazamiento que sufre el objeto, para ello, plantearemos un triángulo rectángulo dado que el ejercicio nos brinda la información de la inclinación del plano y la altura que alcanza el objeto; entonces, podemos suponer que la altura representará el cateto opuesto del triángulo rectángulo en donde la hipotenusa será el desplazamiento, obteniéndose un valor de 2.92 m.

Ahora podemos sustituir en la ecuación referente al trabajo. En donde el ángulo α refiere al ángulo que forma la fuerza resultante F_x y el desplazamiento.

$$W_{Total} = |F_x||\Delta x|cos\alpha = (186.15)(2.92)\cos 0 = 543.56\text{ J}$$

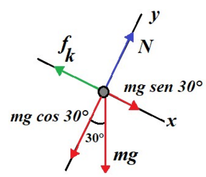
Ejercicio 9. **Una caja de 2 kg se ubica en la parte alta de una rampa como se muestra en la figura. La caja parte del reposo y desliza sobre la rampa. La fuerza de fricción de la rampa sobre la caja vale 7 N. Al llegar a la parte baja de la rampa la caja se mueve sobre el piso hasta detenerse. Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso es de 0.30, determine:**



- **a) ¿Cuánto trabajo realiza el peso de la caja cuando recorre la rampa?**
- **b) ¿Cuánto vale el trabajo de la fuerza de fricción cuando la caja recorre la rampa?**
- **c) ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción cinética entre la rampa y el bloque?**
- **d) ¿Qué distancia recorre la caja sobre el piso?**

La caja se desliza sobre el plano por efecto de la gravedad (su peso) y la fricción, una fuerza constante, se opone al movimiento durante ese deslizamiento. Las fuerzas involucradas en esta etapa del movimiento, el peso y la fricción, realizan trabajo cuando el bloque se desliza hasta llegar a la parte baja del plano con una velocidad diferente a la que inicialmente tiene luego de partir del reposo.

Para calcular esos trabajos se necesita saber cómo se distribuyen las fuerzas involucradas en el movimiento de la caja sobre el plano y para ello es necesario un diagrama de cuerpo libre (DCL) de la caja.



La componente del peso que realiza trabajo es la que corresponde al eje x de acuerdo con el DCL.

$$W_{peso} = m\vec{g}_x \cdot \vec{d} = (mgsen30°)\, d\, cos0° = (2\ kg)\left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right) sen30°\ (1m)(1) = 9.81\ \text{J}$$

El trabajo de la fuerza de fricción esta dado por:

$$W_{fricción} = \overrightarrow{f_k} \cdot \vec{d} = (7\ N)(1\ m)\cos 180° \ = -\ (7\ N)(1\ m) = -7\ \text{J}$$

De acuerdo con el DCL, en el eje y no existe movimiento y por lo tanto cuando se aplica la segunda ley:

$$|\vec{N}| - mg\ cos30° = 0 \quad \therefore \quad |\vec{N}| = mgcos30°$$

Como la fuerza de fricción es:

$$|\vec{f_k}| = \mu_k |\vec{N}|$$

Entonces el valor del coeficiente de fricción cinética entre la caja y la rampa es:

$$\mu_k = \frac{|\vec{f}_k|}{|\vec{N}|} = \frac{7\ N}{mgcos30°} = 0.4119726691 \approx 0.41$$

Para obtener la distancia que la caja recorre luego de abandonar la rampa se necesita conocer la velocidad con la que la caja llega al final de la rampa. Esta velocidad está dada por la relación entre el trabajo total en la rampa (trabajo de la fuerza de fricción y del peso) y el cambio en la energía cinética de la caja al recorrer la rampa (teorema trabajo-energía).

$$W_{total} = W_{fricción} + W'_{peso} = \Delta K$$

Considerando que la caja parte del reposo, K_i = 0 y entonces:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

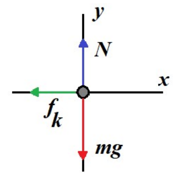
Por lo tanto:

$$W_{total} = W_{fricción} + W'_{peso} = \Delta K \quad \Rightarrow\ 9.81\ \text{J} - 7\text{J} = \frac{1}{2}(2\ kg)v_{f1}^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(2)(2.81\ \text{J})}{2\ kg}} = 1.676305461\ \frac{m}{s} \approx 1.68 \frac{m}{s}$$

Luego esta velocidad se hace cero cuando la caja se detiene al recorrer una distancia desconocida sobre el piso. Para que la caja se detenga la fricción realiza trabajo sobre la caja. Este trabajo es igual al cambio en la energía cinética de la caja al recorrer una distancia desconocida y por lo tanto esa distancia se obtienen nuevamente con el teorema trabajo-energía.

Se realiza un DCL cuando la caja se mueve sobre el piso para ver cómo se distribuyen las fuerzas durante el movimiento de la caja en el piso.



El peso no realiza trabajo porque el peso es un vector perpendicular al desplazamiento que se realiza sobre el piso (eje *x*), es decir que en términos vectoriales $|\vec{N}|$ es perpendicular a d (desplazamiento en el eje *x*). Por lo tanto, el trabajo del peso es mgd cos 90° = 0 J y entonces W_{peso} = 0 J.

El trabajo de la fricción es entonces:

$$W_{fricción} = \Delta K$$

$$|\vec{f_k}| = \mu_k|\vec{N}| = \mu_k mg \quad \therefore \quad W_{fricción} = \mu_k mg\ d\ cos180° = \Delta K$$

Considerando que la caja llega al reposo, K_f = 0 y entonces:

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

La velocidad inicial es ahora la velocidad con la que la caja llega a la parte baja de la rampa y por lo tanto la distancia se puede obtener de esta relación:

$$W_{fricción} = \mu_k mg\ d\cos 180° = \Delta K$$

$$-\mu_k mg\ d = 0 - \tfrac{1}{2}(2\ kg)v_i^2$$

$$d = \frac{(2\ kg)\left(1.676305461\ \frac{m}{s}\right)^2}{(2)(0.30)(2\ kg)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)} = 0.4774040093\ m = 0.48\ m$$

Ejercicio 10. En las televisiones antiguas, para generar cada punto de luz en la pantalla, se tenía que acelerar un electrón y hacerlo chocar contra la pantalla. Determine la magnitud de la velocidad del electrón justo antes de chocar contra la pantalla, si se sabe que se realizó un trabajo de 2.7 x 10^6 eV sobre dicho electrón, el cual se encontraba inicialmente con una rapidez de 0.1 cm/s.

Para empezar, hay que convertir las unidades de trabajo y de rapidez que se proporcionaron en el problema, a fin de tener unidades uniformes para realizar los cálculos.

Primero, para convertir el trabajo neto, es necesario recordar que el factor de conversión es 1 eV = 1.602 x 10^{-19} J

Y la conversión da como resultado:

$$W_{neto} = 2.7x10^6 eV\left(\frac{1.602x10^{-19}\text{J}}{1eV}\right) = 4.3254x10^{-1}\ \text{J}$$

Por otro lado, hay que convertir el dato de la rapidez inicial, de 0.01 cm/s a m/s. Esto da como resultado:

$$|\vec{v_0}| = 0.1\frac{cm}{s}\left(\frac{1m}{100\ cm}\right) = 1\ x\ 10^{-3}\frac{m}{s}$$

Para conocer la magnitud de la velocidad justo antes de la colisión a partir del trabajo neto realizado sobre el electrón y de su rapidez inicial, es necesario utilizar el teorema del trabajo y la energía cinética, que nos indica que

$$W_{neto} = \frac{m|\overrightarrow{v_f}|^2}{2} - \frac{m|\overrightarrow{v_0}|^2}{2}$$

Al escribir esta ecuación, se aprecia que además de los datos ya proporcionados, se requiere conocer la masa del electrón. Al investigarla en la literatura, se encuentra que m = 9.1 x 10^{-31} kg. Con ese dato, resulta que la única incógnita en el teorema del trabajo y la energía cinética es la rapidez final. Al despejar, se tiene

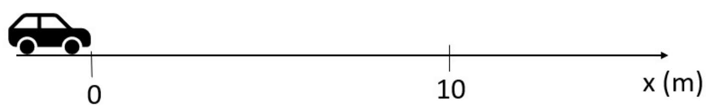
$$|\overrightarrow{v_f}| = \sqrt{\frac{2W_{neto}}{m} + |\overrightarrow{v_0}|^2}$$

Y sustituyendo los datos del problema, se obtiene el siguiente resultado:

$$|\overrightarrow{v_f}| = \sqrt{\frac{2(4.3254\times10^{-1}\ J)}{9.1\times10^{-3}\ \text{kg}} + \left(1\times10^{-3}\,\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$|\overrightarrow{v_f}| = 9.75\times10^{8}\,\frac{m}{s}$$

Ejercicio 11. Un automóvil de 1500 kg de masa se mueve con velocidad constante de $\vec{v} = 100\ km/h\ \hat{\imath}$ y comienza a frenar hasta detenerse en una distancia de 10 m. Calcule el trabajo que realiza la fuerza de fricción para que el auto se detenga y también calcular la potencia disipada por dicha fuerzan objeto de 50.0 kg.



Para resolver este problema primero debemos establecer el cero de nuestro sistema de referencia cuando el auto comienza a frenar para después se utiliza el teorema de trabajo - energía cinética.

Primero se hace la conversión de unidades de la rapidez.

$$100\ \frac{km}{h}\left(\frac{10^3 m}{1\ km}\right)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 27.78\ m/s$$

Empleando el teorema trabajo – energía cinética.

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{Final}\right|^2 - \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{Inicial}\right|^2$$

Recordemos que la energía cinética final vale 0 J ya que cuando el auto se detiene su rapidez es 0 m/s. Por lo tanto:

$$W = \Delta E_c = -\frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{Inicial}\right|^2 = -\frac{1}{2}(1500\ kg)\left(27.78\frac{m}{s}\right)^2 = -578796.3\ \text{J}$$

El trabajo que se obtuvo es el que realiza la fuerza resultante, es decir, la fuerza de fricción pues es la única que realiza trabajo para que el auto se detenga.

Para calcular la potencia es necesario conocer el tiempo que le toma al auto detenerse. Esto se puede resolver planteando las ecuaciones paramétricas de posición y velocidad.

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad v_x = v_{0x} + a_x t$$

Sustituimos los datos del problema en el sistema de ecuaciones.

$$10 = 27.78t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad 0 = 27.78 + a_x t$$

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene que el tiempo en el que el auto se detiene es 0.72 s con una aceleración constante en la dirección x de –38.58 m/s^2.

Con el valor del tiempo se puede calcular la potencia disipada por la fuerza de fricción, considerando el valor absoluto del trabajo.

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{578796.3\ \mathrm{J}}{0.72\ s} = 803883.75\ \mathrm{W}$$

Ejercicio 12. Un escalador está colgando de una cuerda de 20.0 m en un precipicio. Un rescatista sube al escalador recorriendo los 20.0 m en un tiempo de 15.0 s con rapidez y fuerza constante. Si el escalador tiene una masa de 70.0 kg, calcule la potencia media que desarrolla el rescatista.

Para calcular la potencia media requerimos de dos puntos de análisis, en este caso el punto inicial será en 0.0 s y el final en 15.0 s. Para obtener la potencia media emplearemos el trabajo realizado por el rescatista en ese intervalo, utilizando:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \dots (1)$$

En donde,

$$\Delta W = W_f - W_0 \qquad\qquad \Delta t = t_f - t_0$$

La definición que se empleará de trabajo será:

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|cos\theta \qquad \dots (2)$$

En donde el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ existe únicamente en el eje vertical y, y su magnitud equivale a 20.0 m. El ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es cero grados, y por lo tanto $cos\theta = 1$.

La fuerza $\vec{F}$ que realiza trabajo es efectuada por el rescatista. Esta tiene que tener como mínimo la magnitud del peso del escalador, para lograr subirlo. Por lo tanto,

$$|\vec{F}| = |\vec{w}| = m|\vec{g}| \qquad \dots (3)$$

Ahora, sustituyendo el resultado de (3) en (2) obtenemos el trabajo efectuado por el rescatista

$$W = (m|\vec{g}|)(|\Delta\vec{r}|) \qquad \dots (4)$$

Como se adelantó, calcularemos potencia media con la ecuación (1). Sabemos que tanto el tiempo, como el trabajo inicial tienen una magnitud de cero, por lo tanto la ecuación (1) se puede simplificar a:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_f - W_0}{t_f - t_0} = \frac{W_f}{t_f}$$

Para terminar sustituimos la expresión del trabajo ejercido por el rescatista obtenida en (4) en la expresión anterior:

$$P_m = \frac{(m|\vec{g}|)(|\Delta\vec{r}|)}{t_f} \qquad \dots (5)$$

Por último, resolvemos numéricamente:

$$P_m = \frac{70.0kg(9.81\,m/s^2)(20.0m)}{15.0s} = 915.6\ \mathrm{J}/s = 915.6\ Watt$$