UNIDAD 7. SISTEMA DE PARTÍCULAS

Ejercicio 1. Un objeto de 500 g que se mueve a 5 m/s en dirección positiva del eje x choca con una pared. El choque dura aproximadamente 6 ms y el impulso que la pared proporciona al objeto tiene una magnitud de 1.2 Ns. Calcule la fuerza que produce ese impulso y la velocidad con que se mueve el objeto después del choque.

La fuerza que actúa sobre el objeto durante el choque con la pared es una fuerza que depende del tiempo que dura el choque. El impulso de esa fuerza es igual al cambio en la cantidad de movimiento del objeto que causa esa fuerza.

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$$

Por lo tanto, cuando se da un impulso a una partícula u objeto, ese impulso se transfiere de un agente externo a la partícula u objeto. Como la fuerza que produce ese impulso generalmente presenta variaciones en el tiempo que dura la colisión, es conveniente definir una fuerza promedio que actúa durante ese tiempo.

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt \equiv \bar{F}\Delta t$$

Entonces:

$$\vec{I} \equiv \bar{F}\Delta t \qquad \therefore \qquad \bar{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{1.2\ N \cdot s}{6 \times 10^{-3} s} = 200\ \mathrm{N}$$

Considerando el sistema formado por el objeto y la pared como un sistema aislado.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Por lo tanto:

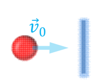
$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \qquad \therefore \qquad 1.2\ N \cdot s = (0.5\ kg)v - (0.5\ kg)5\frac{m}{s}$$

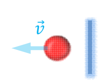
$$v = \frac{1.2\ N \cdot s\ + (0.5\ kg)5\frac{m}{s}}{0.5\ kg} = 7.4\frac{m}{s}$$

Obsérvese que en la parte más baja del anillo se consideró que la energía potencial del sistema es cero.

Ejercicio 2. Una pelota de 100.0 g colisiona con rapidez de 10.0 m/s en una pared vertical. Si después de la colisión, que dura 4.0 ms, la pelota rebota y sale disparada con rapidez de 10.0 m/s, determine el vector impulso y el vector fuerza impulsiva que genera el cambio en el vector cantidad de movimiento lineal.

Antes de la colisión





Después de la colisión

Como puedes observar en la representación, existe un cambio en la dirección del vector velocidad asociado con la pelota; por ello, será necesario recurrir a un espacio euclidiano para proceder con el análisis.

Si asumimos un espacio euclidiano unidimensional con el eje cartesiano x creciente a la derecha, entonces, la velocidad inicial tendrá componente positiva en su coordenada cartesiana x mientras que la velocidad después de la colisión será negativa en su coordenada cartesiana x.

Para determinar la magnitud del impulso, recurriremos al teorema de impulso–momento lineal.

$$\vec{\mathrm{I}} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

Para calcular los vectores de cantidad de movimiento lineal, basta con multiplicar al vector velocidad y la masa del objeto de estudio, en este caso, la masa de la pelota.

$$\vec{\mathrm{I}} = \mathrm{m}\vec{v} - m\vec{v}_0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

Ahora restemos los vectores velocidad, antes y después de la colisión, respetando el valor de las coordenadas cartesianas establecido por el espacio euclidiano elegido.

$$\vec{v}_0 = 10.0\ [m/s]\hat{\imath} \qquad\qquad \vec{v} = -10.0\ [m/s]\hat{\imath}$$

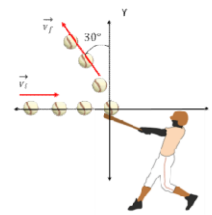
$$\vec{\mathrm{I}} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = (0.1)(-10.0\hat{\imath} - 10.0\hat{\imath}) = -2.0\ \mathrm{kgm/s}\ \hat{\imath}$$

La magnitud del vector impulso es 2.0 kgm/s con dirección de 180.0 grados.

Para calcular el vector fuerza impulsiva.

$$\vec{\mathrm{I}} = \vec{F}\Delta \mathrm{t} \quad \ldots \quad \vec{F} = \frac{\vec{\mathrm{I}}}{\Delta \mathrm{t}} \quad \ldots \quad \vec{F} = \frac{-2.0\hat{\imath}}{4.0\mathrm{x}10^{-3}} = 500.0\ \mathrm{N}\ \hat{\imath}$$

La magnitud del vector fuerza impulsiva es 500.0 N con dirección 180.0 grados con respecto al sistema de referencia.



Ejercicio 3. Una pelota de beisbol se aproxima a un bateador con una rapidez de 45 m/s, moviéndose horizontalmente justo antes de ser golpeada por el bate. El jugador batea la pelota dándole una rapidez de 55 m/s y con la dirección como se indica en la figura. La pelota tiene una masa de 145 g y está en contacto con el bate durante 2 ms, ¿cuál es el vector fuerza promedio que la bola ejerce sobre el bate durante su interacción?

De acuerdo con la definición de momento lineal, este se relación con la fuerza sobre una partícula como:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \ldots (1)$$

Y la fuerza promedio se puede aproximar como:

$$\sum \vec{F}_{prom} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p_f} - \vec{p_i}}{\Delta t} \qquad \ldots (2)$$

Donde esta fuerza es la que actúa sobre la pelota debido al bate. Por definición el momento inicial y final se relacionan con las velocidades inicial y final respectivamente:

$$\vec{p_i} = m\vec{V_i} \qquad \ldots (3)$$

$$\vec{p_f} = m\vec{V_f} \qquad \ldots (4)$$

De acuerdo con nuestro sistema (ver figura) de referencia la velocidad inicial y final se pueden se puede expresar como:

$$\vec{V_i} = 45\hat{\imath}\ m/s$$

$$\vec{V_f} = -55\sin 30°\ \hat{\imath}\ + 55\cos 30°\ \hat{\jmath}\ m/s$$

Por otra parte, la masa y el tiempo en unidades del Sistema Internacional: $m = 0.145\ kg$, $\Delta t = 2x10^{-3}s$

Sustituimos nuestros valores en las ecuaciones 3 y 4 y finalmente en la ecuación 2:

$$\sum \vec{F}_{prom} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p_f} - \vec{p_i}}{\Delta t} = \frac{m\vec{V_f} - m\vec{V_i}}{\Delta t} = \frac{m[\vec{V_f} - \vec{V_i}]}{\Delta t} = \frac{(0.145)[(-55\sin 30°\hat{\imath} + 55\cos 30°\hat{\jmath}) - 45\hat{\imath}]}{2x10^{-3}}$$

$$\sum \vec{F}_{prom} = -5256.25\hat{\imath} + 3453.17\hat{\jmath}\ \mathrm{N}$$

La fuerza promedio anterior es la que ejerce el bate sobre la pelota, para conocer la fuerza que ejerce la pelota sobre el bate sola bastará con aplicar la Tercera Ley de Newton (será la fuerza con dirección opuesta):

$$\sum \vec{F}_{prom} = 5256.25\hat{\imath}\ -\ 3453.17\hat{\jmath}\ \mathrm{N}$$

Ejercicio 4. Una pelota de golf de 50 g de masa se golpea con un palo de golf. La fuerza ejercida sobre la pelota por el palo varía desde cero, en el instante anterior al contacto, hasta un valor máximo (en el que la pelota se deforma) y luego vuelve a cero cuando la pelota se aleja del palo de golf. Suponiendo que la pelota viaja 200 m luego del golpe y con un ángulo de salida de 45°, calcule la magnitud del impulso causado por la colisión.

Dado que la fuerza ejercida por el palo de golf es una fuerza que cambia durante el tiempo que dura el golpe, por la aproximación del impulso se debe considerar esa fuerza como una fuerza promedio que actúa durante el tiempo que dura la colisión.

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt \equiv \bar{F} \Delta t$$

El impulso que produce esa fuerza está dado por:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Antes de golpear la pelota $v_i = 0$ pero v_f = velocidad con que se golpea la pelota, entonces:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - 0$$

$$\vec{I} = m\vec{v}_f$$

Usando las condiciones del movimiento de la pelota luego del golpe con el palo de golf:

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_{0x} v_y = v_{0y} - gt$$

Entonces, del recorrido de la pelota:

$$200\, m = 0\, m + v_{0x}t \qquad 0 = 0\, m + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Del análisis en el eje x se despeja el tiempo y se sustituye en la ecuación que proviene del análisis en el eje y:

$$t = \frac{200\, m}{v_{0x}} \qquad \therefore \qquad \frac{v_{0y}\, 200\, m}{v_{0x}} = \frac{1}{2}g\frac{(200\, m)^2}{(v_{0x})^2}$$

$$v_{0x}v_{0y} = \frac{1}{2}g\frac{(200\, m)^2}{200\, m} = \frac{1}{2}g\,(200\, m)$$

$$v_0{}^2(cos45°)(sen45°) = 981\frac{m^2}{s^2} \qquad \therefore \qquad v_0 = 44.29446918\, \frac{m}{s} \approx 44.29\frac{m}{s}$$

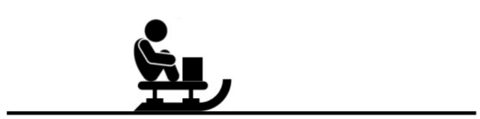
Por lo tanto, considerando la magnitud del vector velocidad:

$$I = mv_f = 0.050\, kg\left(44.29\frac{m}{s}\right) = 2.214723459\, kg \cdot \frac{m}{s} \approx 2.21\ \text{N·s}$$

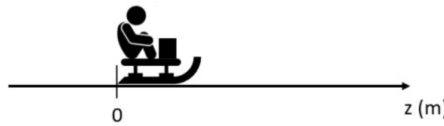
Ejercicio 5. En una pista de hielo un niño con masa de 40 kg está sentado sobre en un trineo con masa de 10 kg y quiere simular una propulsión de reacción lanzando ladrillos desde el trineo. Si se ignora cualquier tipo de fuerza de fricción; y el niño tiene tres ladrillos de 2 kg de masa cada uno, los cuales lanza con una rapidez horizontal de 10 m/s. Determine la velocidad alcanzada por el niño en su trineo, sí:

a) lanza un solo ladrillo.

b) los lanza todos juntos.



El primer paso para resolver este problema es colocar un sistema de referencia, ya que el ímpetu es un vector. Se considera que el movimiento se realiza en una sola dimensión.



a) Cuando se lanza el primer ladrillo se debe considerar que se debe cumplir el principio de conservación del ímpetu, es decir:

$$\vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}$$

$$\Sigma p_z = |\vec{p}_{trineo-inicial}| + |\vec{p}_{ladrillo-inicial}| = |\vec{p}_{trineo-final}| + |\vec{p}_{ladrillo-final}|$$

$$\Sigma p_z = m_{trineo}|\vec{v}_{trineo-inicial}| + m_{ladrillo}|\vec{v}_{ladrillo-inicial}| = m_{trineo}|\vec{v}_{trineo-final}| + m_{ladrillo}|\vec{v}_{ladrillo-final}|$$

Se sustituyen los datos del problema.

$$\Sigma p_z = (10\ kg + 40\ kg + 4\ kg)\left|0\frac{m}{s}\right| + (2\ kg)\left|0\frac{m}{s}\right| = -(10\ kg + 40\ kg + 4\ kg)|\vec{v}_{trineo-final}| + (2\ kg)\left|10\frac{m}{s}\right|$$

$$\Sigma p_z = \frac{0kgm}{s} = -(10\ kg + 40\ kg + 4\ kg)|\vec{v}_{trineo-final}| + (2\ kg)\left|10\frac{m}{s}\right|$$

Es posible notar que el trineo y el tabique están en reposo antes del movimiento, por lo que su velocidad inicial es 0 m/s y por consecuencia su ímpetu inicial total es 0 kgm/s. También hay que apuntar que la masa del trineo incluye la masa del niño y la masa de los otros dos tabiques restantes.

Se despeja la rapidez del trineo final.

$$|\vec{v}_{trineo-final}| = \frac{-20kg\ m/s}{-54\ kg} \qquad |\vec{v}_{trineo-final}| = 0.3704\ m/s$$

Si se desea expresar vectorialmente la respuesta, entonces la velocidad final del trineo es:

$$|\vec{v}_{trineo-final}| = -0.3704\ m/s\ \hat{k}$$

La velocidad final del trineo es negativa, ya que de acuerdo con el sistema de referencia que se colocó originalmente, el trineo se mueve hacia el eje negativo en el eje z.

b) Para resolver este inciso se tienen que seguir los mismos pasos que en el inciso anterior, excepto que ahora se arrojan los tres ladrillos juntos.

$$\vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}$$

$$\Sigma p_z = |\vec{p}_{trineo-inicial}| + |\vec{p}_{ladrillo-inicial}| = |\vec{p}_{trineo-final}| + |\vec{p}_{ladrillo-final}|$$

$$\Sigma p_z = m_{trineo}|\vec{v}_{trineo-inicial}| + m_{ladrillo}|\vec{v}_{ladrillo-inicial}| = m_{trineo}|\vec{v}_{trineo-final}| + m_{ladrillo}|\vec{v}_{ladrillo-fina}\ |$$

$$\Sigma p_z = (10\ kg + 40\ kg)\left|0\frac{m}{s}\right| + (6\ kg)\left|0\frac{m}{s}\right| = -(10\ kg + 40\ kg)|\vec{v}_{trineo-final}| + (6\ kg)\left|10\frac{m}{s}\right|$$

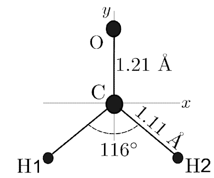
$$\Sigma p_z = 0kgm/s = -(10\ kg + 40\ kg)|\vec{v}_{trineo-final}| + (6\ kg)\left|10\frac{m}{s}\right|$$

$$|\vec{v}_{trineo-final}| = \frac{-60kg\ m/s}{-50\ kg} \qquad |\vec{v}_{trineo-final}| = 1.2\ m/s$$

Por lo tanto, la velocidad final del trineo es:

$$|\vec{v}_{trineo-final}| = -1.2\ m/s\ \hat{k}$$

Ejercicio 6. Determine la posición del centro de masa de la molécula de formaldehido, H_2CO. Las longitudes de enlace así como los ángulos de enlace, se muestran en la imagen.



La posición del centro de masa del sistema de 4 partículas se obtiene mediante:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i}{M}$$

En esta expresión se utilizó la notación de suma. Además, $M = \sum_{i=1}^{4} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ es la masa molecular y $\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} + m_4\vec{r_4}$ contiene a las masas y los correspondientes vectores de posición. En la figura, se etiquetó al hidrógeno que está en el tercer cuadrante como H1 y al que está en el cuarto cuadrante como H2.

Las distancias se expresan en ángstrom y las masas en unidades atómicas:

$$m_1 = m_{H1} = 1\,uma; \quad m_2 = m_{H2} = 1\,uma; \quad m_3 = m_O = 16\,uma; \quad m_4 = m_C = 12\,uma$$

Los vectores de posición son:

$$\vec{r}_1 = -(1.11\text{ Å})\,cos\,3\,2°\hat{\imath} - (1.11\text{ Å})\text{ sen }32°\hat{\jmath} = -0.941\text{ Å}\,\hat{\imath} - 0.588\text{ Å}\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_2 = (1.11\text{ Å})\,cos\,3\,2°\hat{\imath} - (1.11\text{ Å})\text{ sen }32°\hat{\jmath} = 0.941\text{ Å}\,\hat{\imath} - 0.588\text{ Å}\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{r}_4 = (1.21\text{ Å})\hat{\jmath}$$

Por lo tanto:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{(-2\times 0.588\text{ Å})(1\,uma) + (1.21\text{Å})(16\,uma)}{30\,uma}\hat{\jmath} = 0.606\text{ Å}\,\hat{\jmath}$$

El centro de masa se encuentra ubicado sobre el eje y debido a la definición del sistema de coordenadas y por la simetría de la molécula.

Ejercicio 7. En una molécula de amoníaco (NH_3), los tres átomos de hidrógeno (H) forman un triángulo equilátero; la distancia entre los centros de los átomos de hidrógeno es $16.28\text{x}10^{-11}$ m, de modo que el centro del triángulo está a $9.10\text{x}10^{-11}$ m respecto a cada átomo. El átomo de nitrógeno (N) se encuentra en la cúspide de la pirámide, y los tres hidrógenos constituyen la base (ver Figura 1). La distancia nitrógeno-hidrógeno es de $10.14\text{x}10^{-11}$ m, y la relación de masa atómica nitrógeno/hidrógeno es 13.9. Localice el centro de masa de la molécula respecto al átomo de nitrógeno.

El sistema analizar es una pirámide triangular, donde su base, conformada por 3 hidrógenos en los vértices, es un triángulo equilátero. Se trata de un sistema de alta simetría (ver Figuras 1 y 2).

El centro de masa de cualquier objeto es un punto donde se puede considerar que está concentrada toda su masa. Este concepto se puede aplicar a sistemas de partículas como la molécula de amoníaco. Para un objeto o sistema conformado por n partículas, la ubicación del centro de masa se define de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\vec{r}}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M}\sum m_n\,\vec{r}_n \qquad \ldots (1)$$

donde:

$\boldsymbol{\vec{r}}_{CM}$ es el vector de posición del centro de masa, con respecto a un sistema de 3 ejes coordenados x-y-z

m_1 es la masa de la partícula 1

$\boldsymbol{\vec{r}_1}$es elvector de posición de la partícula 1

$M = \sum m_1 + m_2 + \cdots + m_n$es la masa total del sistema.

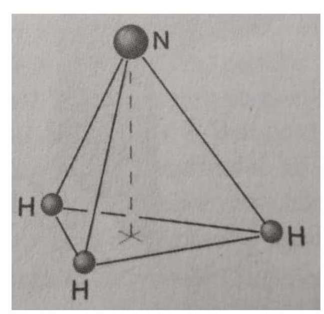


Figura 1. Disposición de la molécula de amoníaco en el espacio de 3 dimensiones espaciales *x-y-z*.

En las Figuras 2 y 3 se analizan las características de la base triangular de la molécula de amoníaco:

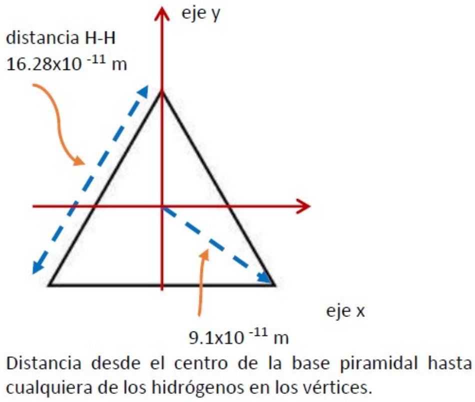


Figura 2. Base de la pirámide formada por 3 hidrógenos

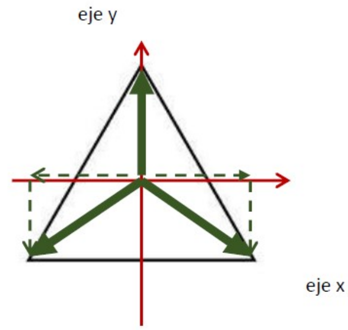


Figura 3. Descomposición de los vectores de posición de los 3 hidrógenos, ubicados en los vértices de la base de la pirámide, en el plano x-y

A partir del análisis de la Figura 3, se observa que, por la simetría del sistema, los vectores de posición de los átomos de hidrógeno a partir del origen, en el plano *x-y*, se cancelan. Esto dará como resultado que las posiciones del centro de masa, basadas en la ecuación 1, para los ejes x y y sean igual con cero (vea las ecuaciones 2 y 3).

$$\vec{x}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_n \vec{x}_n = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\vec{y}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_n \vec{y}_n = 0 \qquad \ldots (3)$$

Note que por conveniencia se ha escogido que el nitrógeno, en la cúspide de la pirámide tenga la posición (0, 0, 0) m. Recuerde que la elección de ejes coordenados es totalmente arbitraria, y se puede elegir convenientemente.

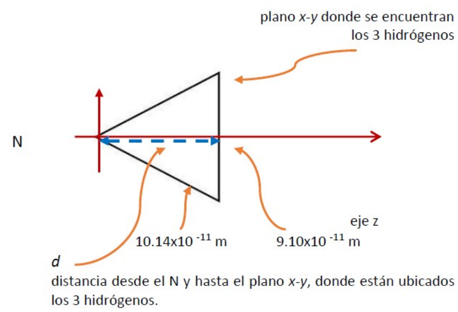


Figura 4. Vista lateral de la pirámide que forma la molécula de NH_3

Para determinar el centro de masa, ubicado sólo sobre el eje coordenado *z*, se necesita la distancia d, mostrada en la Figura 4. Se cuenta con toda la información para determinar esta distancia y se emplea el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(10.14x10^{-11}m)^2 - (9.10x10^{-11}m)^2} = 4.47x10^{-11}m \qquad \ldots (4)$$

Nuevamente, retomando la ecuación 1, pero ahora para el eje *z:*

$$\vec{z}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_n \vec{z}_n = \frac{13.9\,u\,(0) + 1\,u\,(4.47x10^{-1}\ \ m) + 1\,u\,(4.47x10^{-11}\,m) + 1\,u\,(4.47x10^{-11}\,m)}{13.9\,u + 1\,u + 1\,u + 1\,u} \qquad \ldots (5)$$

$$\vec{z}_{CM} = \frac{1}{16.9\,u}\,3\,u\,(4.47x10^{-11}\,m) = 7.93x10^{-12}m \qquad \ldots (6)$$

Entonces, el centro de masa de la molécula de amoníaco respecto al átomo de nitrógeno, está ubicado en la posición 7.93x10^{-12} m, que es muy cercano al nitrógeno, como era de esperarse, ya que es el átomo más másico.

Ejercicio 8. Se lanza un proyectil en el aire desde el nivel del suelo y debería caer a 110 m. De imprevisto, en el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa. Inmediatamente después de la explosión, la componente horizontal de la velocidad en uno de los fragmentos es cero y cae directamente al suelo. Despreciando la resistencia del aire, determine

a) la distancia a la que cae el otro fragmento a partir del punto de lanzamiento.

b) si la masa del fragmento que cae directamente hacia abajo es el doble de la masa del otro fragmento, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará el más ligero?

a) En este caso el sistema sólo consta del proyectil, por lo que todas las fuerzas generadas por la explosión son internas. La única fuerza externa que actúa sobre el sistema es el peso del propio proyectil; esto implica que el centro de masa, que está en todo momento a mitad de camino entre los fragmentos, continúa moviéndose a lo largo de su trayectoria parabólica como si no hubiera ocurrido la explosión. Sea $x = 0$ la posición inicial del proyectil; por lo que las posiciones finales x_1 y x_2 de los fragmentos se relacionan con la respectiva del centro de masa (x_{cm}) así:

$$(2m)x_{\text{cm}} = mx_1 + mx_2 \rightarrow 2x_{\text{cm}} = x_1 + x_2,$$

donde m es la masa de cada fragmento. De esta ecuación, considerando que en el impacto $x_{\text{cm}} = R$ y $x_1 = 0.5\,R$, donde $R = 110$ m es el alcance hipotético del proyectil sin explotar, se obtiene para x_2:

$$x_2 = 2x_{\text{cm}} - x_1 = 2R - 0.5R = 1.5R \rightarrow x_2 = 1.5(110 \text{ m}) = 165 \text{ m}.$$

b) En este caso sea m la masa del fragmento más ligero, por lo que la masa del restante es $2m$. De manera similar al inciso previo:

$$(m + 2m)x_{\text{cm}} = 2mx_1 + mx_2 \rightarrow 3x_{\text{cm}} = 2x_1 + x_2,$$

$$x_2 = 3x_{\text{cm}} - 2x_1 = 3R - 2(0.5)R \rightarrow x_2 = 2R = 2(110 \text{ m}) \rightarrow x_2 = 220 \text{ m}.$$

Ejercicio 9. Un sistema se compone de tres partículas, cuyas masas son 1.5 kg, 4 kg y 1 kg, respectivamente. La primera partícula tiene una velocidad constante de (3 m/s, –1 m/s, –2 m/s), la segunda tiene una velocidad de (–1 m/s, 6 m/s, 4 m/s). Además, se sabe que el centro de masa del sistema de partículas se encuentra en reposo. Determine la velocidad de la tercera partícula.

La velocidad del centro de masa de este sistema de partículas está dada por:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

La incógnita en esta ecuación es el vector $\vec{v}_3$ al despejarlo, queda:

$$\vec{v}_3 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v}_{CM} - m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_3}$$

Simplificando un poco la expresión anterior, como sigue:

$$\vec{v}_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3}\vec{v}_{CM} - \frac{m_1}{m_3}\vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_3}\vec{v}_2$$

facilitará realizar los cálculos.

Lo único que falta es sustituir cada uno de los datos del problema, que se resumen a continuación:

$$m_1 = 1.5\ kg\ , m_2 = 4\ kg\ , m_3 = 1\ kg$$

$$\vec{v}_1 = \left(3\ \frac{m}{s}\ , -1\ \frac{m}{s}\ , -2\ \frac{m}{s}\right), \vec{v}_2 = \left(-1\ \frac{m}{s}\ , 6\frac{m}{s}\ , 4\ \frac{m}{s}\right), \vec{v}_{CM} = (0\ , 0\ , 0)\ ,$$

Lo cual da como resultado, lo siguiente:

$$\vec{v}_3 = \frac{1.5\,kg + 4\,kg + 1\,kg}{1\,kg}(0\,,0\,,0) - \frac{1.5\,kg}{1\,kg}\left(3\,\frac{m}{s}\,,-1\,\frac{m}{s}\,,-2\,\frac{m}{s}\right) - \frac{4\,kg}{1\,kg}\left(-1\,\frac{m}{s}\,,6\,\frac{m}{s}\,,4\,\frac{m}{s}\right)$$

Al efectuar los productos de escalar por vector, se obtiene lo siguiente:

$$\vec{v}_3 = (0\,,0\,,0) + \left(-4.5\frac{m}{s}\,,1.5\frac{m}{s}\,,3\frac{m}{s}\right) + \left(4\frac{m}{s}\,,-24\frac{m}{s}\,,-16\frac{m}{s}\right)$$

Finalmente, al sumar los vectores, se obtiene el resultado del problema:

$$\vec{v}_3 = \left(-0.5\frac{m}{s}\,,-22.5\frac{m}{s}\,,-13\frac{m}{s}\right)$$

Ejercicio 10. Un sistema de dos partículas se encuentra en movimiento. En t = 0 s una de las dos partículas se encuentra en el origen, en ese mismo instante, la posición de la segunda partícula es (x_2, 4.0) m y su masa es 0.30 kg. La posición del centro de masa del sistema, también en t = 0 s, es (x_{cm}, 1.6) m. Además, la velocidad del centro de masa sigue la función (1.25m/s³)t² $\hat{\imath}$. Determine el vector fuerza externa que actúa sobre el sistema en t = 5.0 s.

Para calcular la fuerza externa sobre el sistema es necesario utilizar la segunda ley de Newton, en términos del sistema de partículas, utilizando la aceleración del centro de masa $\vec{a}_{\text{CM}}$:

$$\vec{F}_{\text{ex}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \qquad \ldots (1)$$

En donde, M es la masa del sistema de partículas y $\vec{a}_{\text{CM}}$ puede ser obtenida con la función de velocidad dada.

Dado que conocemos las posiciones en y del centro de masa y una de las partículas, es necesario utilizar la ecuación para la determinación de la componente en y del centro de masa, y_{CM}.

$$y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \ldots (2)$$

En donde, $m_1 + m_2 = M$. Así, es posible obtener M con un despeje de la ecuación (2)

$$M = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{y_{CM}}$$

Resolviendo numéricamente:

$$M = \frac{(0kg)m_1 + (4.0m)(0.30kg)}{1.6m} = 0.75kg$$

Es posible calcular $\vec{a}_{\text{CM}}$ mediante:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} \qquad \ldots (3)$$

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}(1.25\,m/s^3)t^2\,\hat{\imath} = (2.50\,m/s^3)t\,\hat{\imath}$$

Conociendo $\vec{a}_{\text{CM}}$ y M, mediante la ecuación (1) se obtiene

$$\vec{F}_{\text{ext}} = (0.75\,kg)(2.50\,m/s^3)t\,\hat{\imath}$$

Por último, evaluando en t = 5.0 s obtenemos la respuesta final:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = (0.75\,kg)(2.50\,m/s^3)(5.0s)\,\hat{\imath}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 9.38\ \text{N}\,\hat{\imath}$$