Unidad 10. Dinámica de las rotaciones

Con material del e-book Física para ciencias e ingeniería, Vol. 1. Serway/Jewett, Cengage Leaning

Es usual que un gato aterrice de pie, sin importar en qué posición se le deje caer. Una película en cámara lenta muestra que la mitad superior de su cuerpo se tuerce en una dirección y la mitad inferior lo hace en la dirección opuesta ¡ Vaya tipo de rotación !

Modelo de objecto rígido

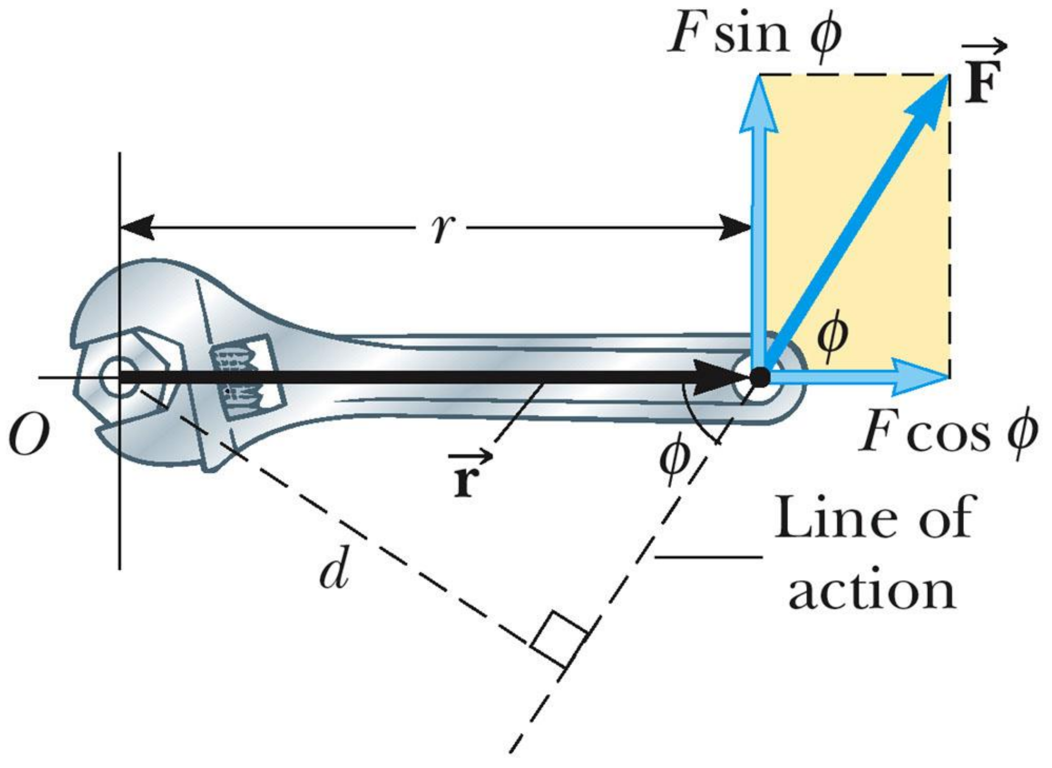
- Un objeto rígido es indeformable.
  - Las ubicaciones relativas de todas las partículas que conforman el objeto permanen constantes.
  - Los objetos reales son deformables hasta cierto punto, pero el modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones donde la deformación es despreciable.

10.1 Torque

- El torque, τ, es la tendencia de una fuerza a rotar un objeto alrededor de un ejes
  - el torque es un vector
  - $|\tau| = r\,F$ sen $\phi = F\,d$
    - **F** es la fuerza
    - ϕ es el ángulo entre la fuerza y el brazo de momento ***r***
    - *d* es el tamaño del vector brazo de momento o brazo de palanca ***r*** .

10.1 Torque

- *d*, es la distancia *perpendicular* desde el eje de rotación hasta la línea que sigue la dirección de la fuerza



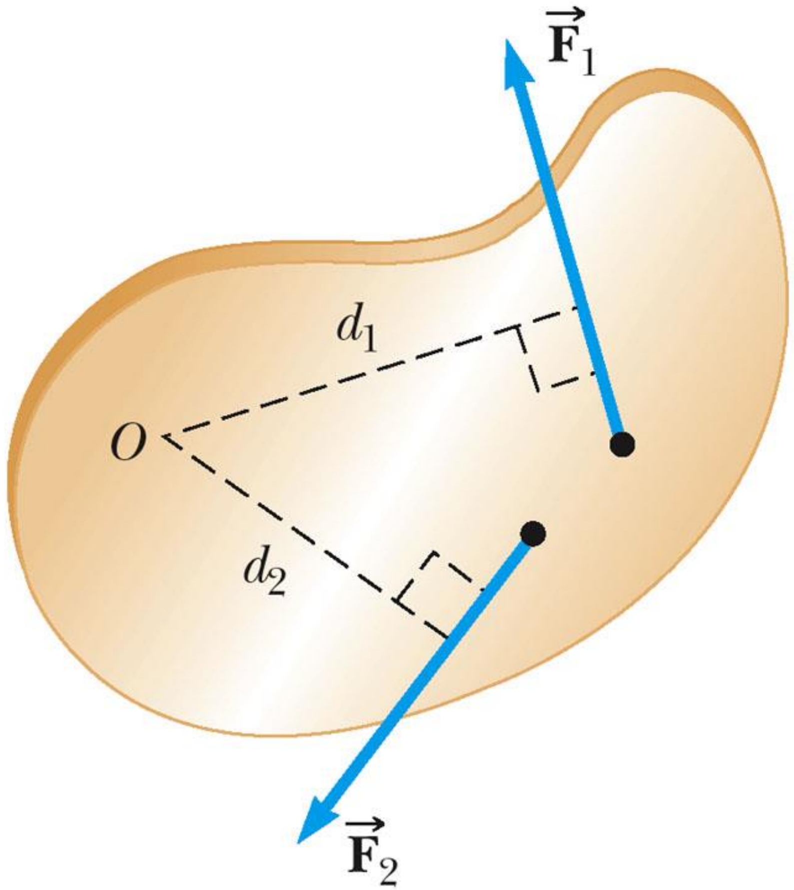
  - $d = r \text{ sen } \phi$

10.1 Torque

- La componente horizontal de la fuerza ($F \cos \phi$) no tiene una tendencia a producir rotación
- Dirección del torque
  - Si la tendencia de giro de la fuerza es contraria a las manecillas del reloj, el torque será positivo.
  - Si la tendencia de giro es como las manecillas del reloj, el torque será negativo.

Torque neto

- La fuerza $\mathbf{F}_1$ tenderá a causar una rotación contraria a las manecillas del reloj, alrededor de *O.*
- La fuerza $\mathbf{F}_2$ tenderá a causar una rotación como las manecillas del reloj, alrededor de *O.*
- $\tau_{net} = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$



Torque vs. Fuerza

- Las fuerzas pueden causar un cambio en un movimiento lineal
  - Descrito por la Segunda Ley de Newton.

- Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento rotacional
  - La efectividad de este cambio depende de la fuerza y del brazo de momento (o brazo de palanca)
  - El cambio en el movimiento rotacional depende del torque.

Las unidades del torque

- Las unidades del torque o momento de torsion o torca ¡ Cuántos sinónimos !

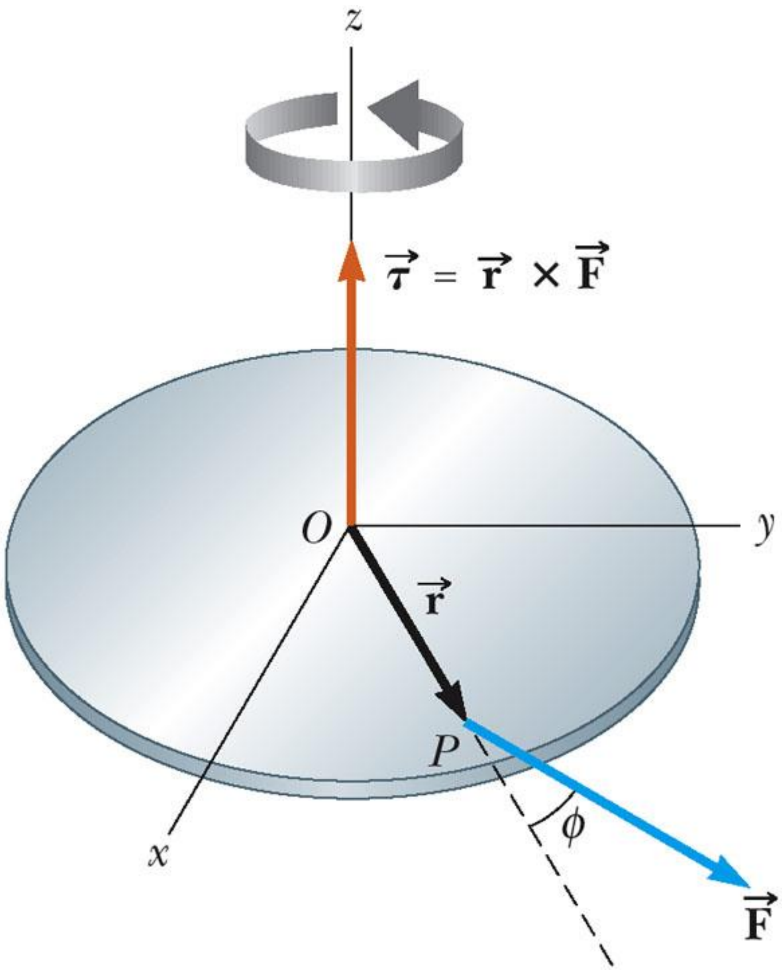
en el sistema SI units son N·m

  - Aunque la magnitud del torque es una distancia (brazo de palanca) multiplicada por una fuerza, se trata de una cantidad muy diferente del trabajo W y la energía.
  - Las unidades del torque se reportan en N·m y no se cambian a joule.

El torque como producto vectorial

- El torque es el vector resultante del **producto cruz** o **producto vectorial** entre los vectores posición (brazo de palanca) y fuerza

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$



Recordatorio del torque como producto vectorial

Una fuerza $\vec{F} = (2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})N$ se aplica a un objeto que está pivoteado a un eje fijo alineado a lo largo del eje coordenado z. La fuerza se aplica a un punto ubicado en

$$\vec{r} = (4.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})m$$

Encuente el vector momento de torsión aplicado al objeto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= [(4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m}] \\
&\quad \times [(2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}] \\
&= [(4.00)(2.00)\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \\
&\quad + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \\
&\quad + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\ \mathrm{N\cdot m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + 10.0\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}]\ \mathrm{N\cdot m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}})\ \mathrm{N\cdot m} \\
&= \boxed{2.0\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{N\cdot m}}
\end{aligned}$$

NOTE: Los dos vectores involucrados se encuentran en el plano xy. El vector momento de torsion de torsion es perpendicular a este plano, y solo tiene componente z.

El torque y la aceleración angular α de una partícula

- La magnitud del torque producido por una fuerza alrededor del centro de una circunferencia es

$$\tau = F_t\, r = (ma_t)\, r$$

- La aceleración tangencial $\boldsymbol{a_t}$ se relaciona con la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$

$$\Sigma\tau = \Sigma(ma_t)\, r = \Sigma(mr\alpha)\, r = \Sigma(mr^2)\, \alpha$$

- Si mr^2 es el momento de inercia de la partícula,

$$\boldsymbol{\Sigma\tau = I\alpha}$$

  - El torque es directamente proporcional a la aceleración angular y a la constante de proporcionalidad llamada momento de inercia.

Energía cinética rotational

- Un objeto que rota alrededor de un eje con una rapidez angular, ω, posee una energía cinética rotacional aun cuando no posea energía cinética traslacional.
- Cada partícula tiene una energía cinética de

$$K_i = 1/2\ m_i v_i^2$$

- Debido a que la velocidad tangencial depende de la distancia, *r*, desde el eje de rotación, podemos sustituir $v_i = \omega_i\ r$

Energía cinética rotational

- La energía cinética rotacional total de un objeto rígido es la suma de la energía de todas sus partículas

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

donde *I* es conocida como el momento de inercia.

Energía cinética rotational

- Existe una analogía entre la energía cinética asociada al movimiento lineal.
- ($K = 1/2\ mv^{2}$) y la energía asociada al movimiento rotacional ($K_R = 1/2\ I\omega^{2}$).
- La energía cinética rotacional no es un nuevo tipo de energía, la expression es diferente porque se aplicaa un objeto en rotación.
- Las unidades de la energía cinética rotacional son joule (J).

10.2 Momento de Inercia

- La definición del momento de inercia es

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

- Las dimensiones del momento de inercia son ML^2 y sus unidades en el SI son $kg \cdot m^2$
- Es posible calcular el momento de inercia de un objeto fácilmente considerando que es posible dividirlo en pequeños elementos de volumen, cada uno de masa Δm_i

10.2 Momento de Inercia

- Es posible escribir una expression para I en términos de Δm

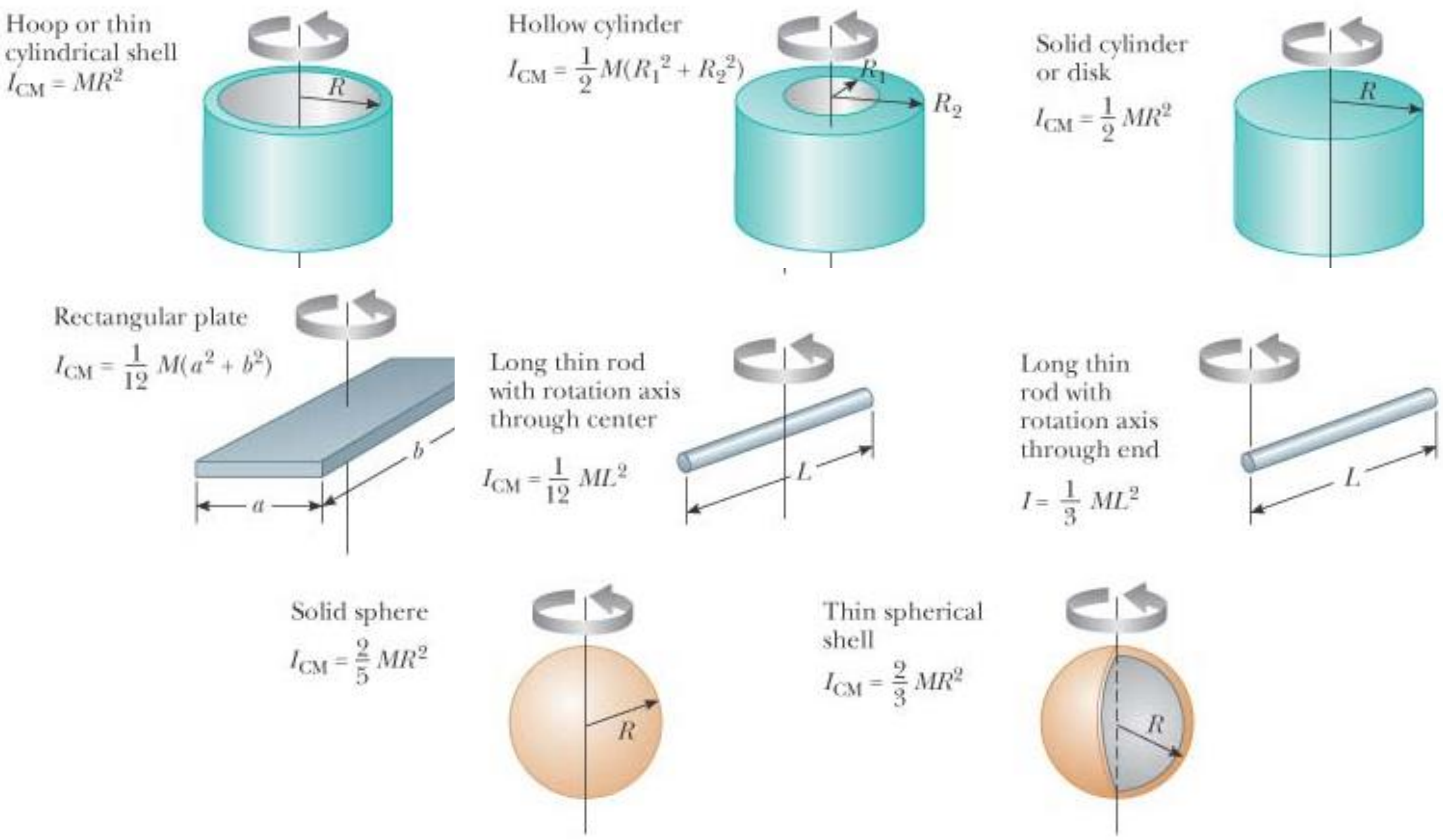
$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

- Con la consideración de un pequeño segmento de volume se obtiene,

$$I = \int \rho r^2 dV$$

- Si ρ es constante, es posible evaluar la integral para una geometría conocida.

Momentos de inercia de varios objetos rígidos



10.3 Ímpetu angular o cantidad de movimiento angular o momento angular

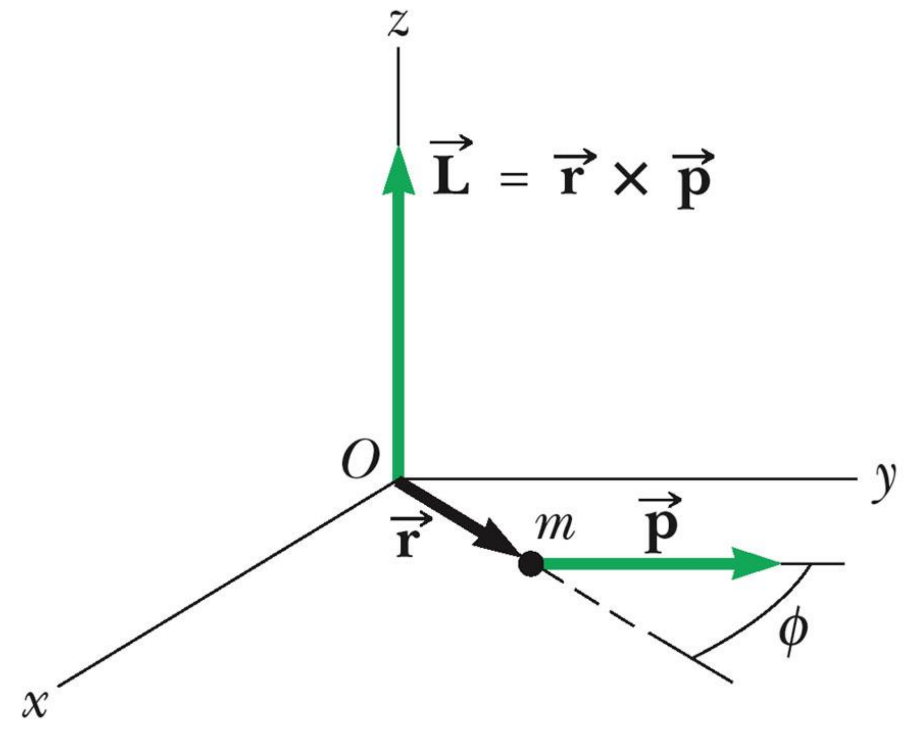
¡ Cuántos sinónimos !

- El ímpetu angular instantáneo $\vec{\mathbf{L}}$

de una partícula, relativa al origen *O*, se define como el producto cruz (o producto vectorial) del vector de posición instantánea $\vec{\mathbf{r}}$

de la partícula y el vector ímpetu lineal instantáneo $\vec{\mathbf{p}}$

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$



Ejemplo de cálculo de ímpetu angular empleando producto cruz

Una partícula de masa 2.0 kg se encuentra ubicada en el plano *xy* $\vec{r} = (6.00\,\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})m$ y se desplaza con velocidad $\vec{v} = (5.00\hat{\jmath})m/s$

Determine el vector cantidad de movimiento angular de la partícula.

$$\mathbf{r} = \left(6.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00t\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m}\right) \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 5.00\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 2.00\ \mathrm{kg}\left(5.00\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}\right) = 10.0\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 6.00 & 5.00t & 0 \\ 0 & 10.0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\left(60.0\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}\right)\hat{\mathbf{k}}}$$

Torque e Ímpetu angular

- El torque está relacionado con la cantidad de movimiento angular
  - De una manera similar a la fuerza que está relacionada con la cantidad de movimiento lineal

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

- Esta ecuación rotacional es análoga a la Segunda Ley de Newton
  - El torque y el ímpetu angular deben ser medidos empleando el mismo origen.

Más sobre el ímpetu angular

- Las unidades en el SI del ímpetu angular son $(kg \cdot m^2)/s$.
- Los ejes coordenados que se emplean para definir al vector torque y al vector ímpetu angular deben ser los mismos.
- En los casos que varias fuerzas actúan sobre un objeto, se debe emplear el torque neto.

10.3 Ímpetu angular de un sistema de partículas

- El ímpetu angular total de un sistema de partículas se define como el vector de la suma de los ímpetu angular de las partículas individuales $\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$

- Derivándolo con respecto al tiempo se obtiene el torque neto

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{tot}$$

Ímpetu angular de un objeto rígido

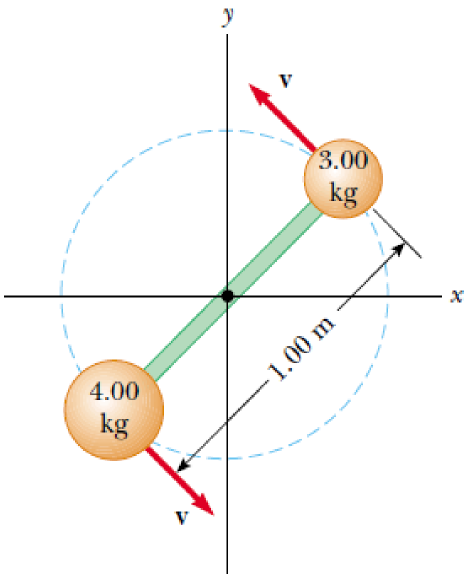
- Para encontrar el ímpetu angular de un objeto completo, sume los ímpetu angular de todas las partículas individuales

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i v_i r = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

  - Esto es análogo al ímpetu traslacional

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$$

Ejemplo de ímpetu angular de un objeto rígido

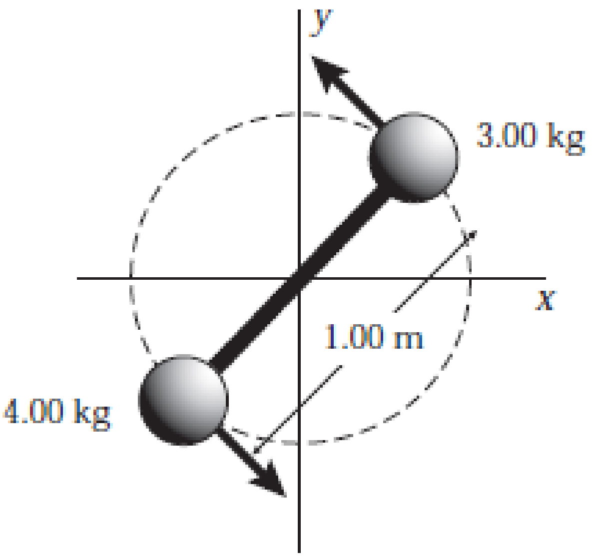


Una barra rígida ligera de longitud ℓ = 1.00 m se une a dos partículas con masas m_1 = 4.00 kg y m_2 = 3.00 kg, en sus extremos. La combinación rota en el plano xy respecto a un eje a través del centro de la barra.
Determine la cantidad de movimiento angular en torno al origen cuando la rapidez de cada partícula es 5.00 m/s.

$$L = \sum m_i v_i r_i$$
$$= (4.00\ \text{kg})(5.00\ \text{m/s})(0.500\ \text{m}) + (3.00\ \text{kg})(5.00\ \text{m/s})(0.500\ \text{m})$$

$L = 17.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, and

$$\boxed{\mathrm{L} = \left(17.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\right)\hat{\text{k}}}$$



Resumen de ecuaciones útiles

TABLE 10.3 A Comparison of Equations for Rotational and Translational Motion: Dynamic Equations

	Rotational Motion About a Fixed Axis	Translational Motion
Kinetic energy	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Equilibrium	$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0$	$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0$
Newton's second law	$\sum \boldsymbol{\tau} = I\alpha$	$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$
Newton's second law	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$
Momentum	$L = I\omega$	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$
Conservation principle	$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$	$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$
Power	$\mathcal{P} = \tau\omega$	$\mathcal{P} = Fv$

10.4 Conservación de ímpetu angular

- El ímpetu angular total de un sistema se conserva si el torque externo neto que actúa sobre el sistema es
  - Torque neto = 0 -> significa que el sistema está aislado
- $\vec{L}_{tot} = \text{constant} \rightarrow \vec{L}_{tot,i} = \vec{L}_{tot,f}$
- Para un sistema de partículas,

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \Sigma \mathbf{L}_n = \text{constante}$$

Resumen de Leyes de Conservación

- Para un sistema aislado

(1) Conservación de la Energía:

$$E_i = E_f$$

(2) Conservación del ímpetu o cantidad de movimiento (lineal):

$$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$$

(3) Conservación del ímpetu angular o cantidad de movimiento angular:

$$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$$