# FÍSICA II. UNIDAD 5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

## 5.2 (b) DIFERENCIA DE POTENCIAL ELECTROSTÁTICO GENERADO POR DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA.

Para determinar el potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga, se divide la carga en elementos diferenciales de carga, dq, y se encuentra el potencial eléctrico total a través de la integración (muy sencilla) de "una sucesión" de cargas puntuales infinitesimales

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ}{r}$$

Éste método resulta muy simple, si se le compara con la integración del vector campo E, ya que estamos integrando cantidades escalares. Al final de este documento aparece un ejercicio resuelto que ilustra la forma de proceder.

## 5.3 EL VECTOR CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DE LA FUNCIÓN ESCALAR ASOCIADA AL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO.

La ecuación que relaciona al potencial eléctrico V con el campo eléctrico E, es la siguiente:

$$|\,E\,| = -\frac{dV}{ds}$$

Presentaré brevemente su deducción. Ecuaciones indispensables, que Ud. ya conoce:

$$V = {}^{U}\!/_{q} \qquad\qquad W = -\Delta U \qquad\qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

Iniciamos con el trabajo infinitesimal dW que produce una fuerza eléctrica F sobre una partícula con carga q, para moverla a lo largo de un desplazamiento infinitesimal d**s**

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{s} = \boxed{q\vec{E} \circ d\vec{s} = -q\ dV}$$

Observe que hay un producto punto: los vectores campo E y desplazamiento infinitesimal ds guardan un ángulo interno θ, por lo que se debe considerar.

$$|E|\cos\theta = -\frac{dV}{|ds|}$$

Simplificando la situación, se escoge que dos vectores sean paralelos, por lo que queda

$$|\,E\,| = -\frac{dV}{ds}.$$

**"El campo eléctrico es igual a la derivada negativa del potencial con respecto al desplazamiento ds".**

Del signo negativo se deriva también otro enunciado importante**: "El potencial decrece en la dirección del campo E"** . Se le pide observar con cuidado los gráficos de Superficies Equipotenciales que se vieron en un tema anterior, para que corrobore este hecho.

Recordando que el campo eléctrico es un campo vectorial en tres dimensiones, a partir del campo escalar del potencial V podemos obtener las coordenadas cartesianas de dicho campo eléctrico, de la siguiente manera: una herramienta útil del cálculo es el operador gradiente $\vec{\nabla}$, también llamado "nabla", que permite obtener las **derivadas parciales** de una función.

Derivar parcialmente significa derivar con respecto a una sola variable a la vez, manteniendo todo lo demás constante. Como el campo eléctrico es función de tres coordenadas espaciales (x, y, z), se requiere obtener las derivadas parciales del potencial V con respecto a la posición en x, y, z.

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}V \equiv -\left( {}^{\partial V}\!/_{\partial x}, {}^{\partial V}\!/_{\partial y}, {}^{\partial V}\!/_{\partial z} \right)$$

Así, las coordenadas cartesianas del campo E se obtienen con las siguientes derivadas parciales

$$|E_x| = -{}^{\partial V}\!/_{\partial x} \qquad |E_y| = -{}^{\partial V}\!/_{\partial y} \qquad |E_z| = -{}^{\partial V}\!/_{\partial z}$$

Vea los siguientes sencillos ejemplos resueltos:

Ejercicios En una región del espacio, el potencial electrostático se describe por:

$$V = x^2 y + 3xyz + zy^2$$

Determine el campo eléctrico en esa región

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy + 3yz \qquad E_x \overset{-\frac{\partial V}{\partial x}}{=} -(2xy + 3yz)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 3xz + 2zy \qquad E_y \overset{-\frac{\partial V}{\partial y}}{=} -(x^2 + 3xz + 2zy)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 3xy + y^2 \qquad E_z \overset{-\frac{\partial V}{\partial z}}{=} -(3xy + y^2)$$

**Ejercicio 2** En cierta región del espacio, el potencial está expresado por la siguiente función

$$V = x^2 + 2xy$$

el potencial está expresado en volts y la distancia en metros.
Determínese el campo eléctrico en el punto $x = 2$, $y = 2$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -2x - 2y = E_x$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -2x = E_y$$

Evaluadas las componentes del campo en los puntos $x = 2$ $y = 2$

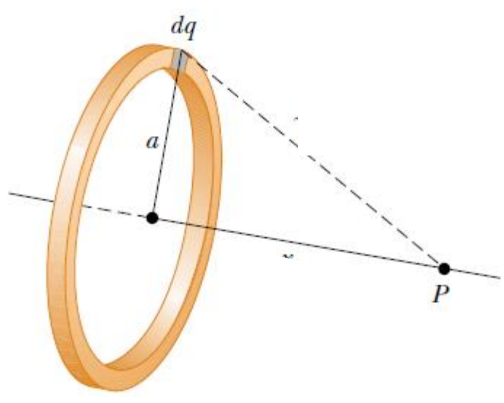
$$E_x = -2(2) - 2(2) = -4 - 4 = -8 \ \frac{\text{volt}}{m}$$

$$E_y = -2(2) = -4 \ \text{volt}/m$$

$$|E|_{\substack{x=2\\y=2}} = \sqrt{\left(-8\,\frac{V}{m}\right)^2 + \left(-4\,\frac{\text{volt}}{m}\right)^2} = 8.9\,\frac{V}{m}$$

Importante resaltar la consistencia de unidades.

Ahora un ejercicio donde combinemos el uso de ambos temas vistos, *Tomado de Serway/Jewett, Física Vol.2*
.




**Potencial electrostático debido a un anillo con carga uniforme**

A) Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto P, ubicado sobre el eje central z, a una distancia $\ell$ de un anillo de carga negativa uniforme de radio a y carga total Q

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ}{r}$$

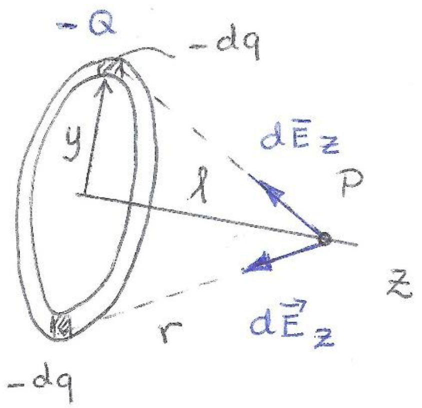
$z$

B) Encuentre una expresión para la magnitud del campo eléctrico en el punto P

$$|\,E\,| = -\frac{dV}{ds}$$

Distribución continua de carga

a) $$V = \int \frac{k(-dq)}{r} = \int \frac{k(-dq)}{\sqrt{y^2+l^2}}$$

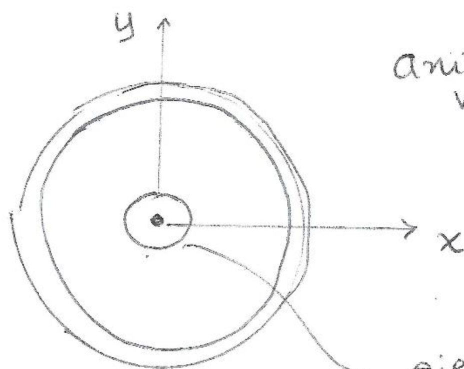



$$V = \frac{k}{\sqrt{y^2+l^2}} \int -dQ$$

$$\boxed{V = -\frac{kQ}{\sqrt{y^2+l^2}} = -kQ(y^2+l^2)^{-1/2}}$$

única variable

El eje central perpendicular es el eje z, donde $y=0$, $x=0$.




anillo visto de frente

eje z sale del plano de la hoja

b) $$E = -\frac{dV}{ds}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

La distancia $l$ está sobre el eje z entonces $l = z$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[-kQ(y^2+z^2)^{-1/2}\right]$$

$$E_z = -\frac{1}{\cancel{2}}(kQ)(\cancel{2}z)(y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{kQz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{TOTAL} = \vec{E}_z = -\frac{kQl}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

Vector que apunta hacia el anillo