Ondas estacionarias.
Ejemplo de cálculo de incertidumbres

elihm@correo.unam.mx

Marzo 2019

*este documento no ha sido revisado/editado y puede contener errores tipográficos.

1) Densidad lineal de la cuerda a partir de mediciones directas.

De acuerdo a los datos de la masa y la longitud total de la cuerda, se encontró que la densidad lineal de la cuerda es:

$$\mu = \frac{0.01236 \text{ kg}}{3.015 \text{ m}} = 0.004099502 \text{ kg/m}$$

La incertidumbre asociada de μ es:

$$u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{m}{\ell}}{\partial m}\right)^2 \cdot u_c^2(m) + \left(\frac{\partial \frac{m}{\ell}}{\partial \ell}\right)^2 \cdot u_c^2(\ell)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\ell}\right)^2 \cdot u_c^2(m) + \left(\frac{m}{\ell^2}\right)^2 u_c^2(\ell)}$$

$$u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{1}{3.015 \text{ m}}\right)^2 \cdot (0.00001 \text{ kg})^2 + \left(\frac{0.01236 \text{ kg}}{(3.015 \text{ m})^2}\right)^2 \cdot (0.001 \text{ m})^2} = 0.0000035984 \text{ kg/m} \approx 0.000004 \text{ kg/m}$$

$$\therefore \mu = (0.004100 \pm 0.000004) \text{ kg/m}$$

2) Cálculo de la longitud de onda promedio de cada armónico a partir de mediciones de la distancia entre dos nodos sucesivos.

Se sabe que $\lambda = 2d$.

Por lo tanto, al aplicar la ley de propagación de la incertidumbre se encuentra que:

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial 2d}{\partial d}\right)^2 \cdot u_c^2(d)} = \sqrt{(2)^2 \cdot u_c^2(d)} = 2 \cdot u_c(d)$$

En este caso, se considera que la incertidumbre asociada a la medición de la distancia es igual a la resolución del instrumento porque sólo se hizo una medición y por lo tanto no tiene sentido hablar de incertidumbre tipo A. Entonces $u_c(d) = 0.001$m y

$$u(\lambda) = 2 \cdot u_c(d) = 2 \cdot 0.001 \text{ m} = 0.002 \text{ m}$$

3) Incertidumbres asociadas a la rapidez de propagación.

3.1 La rapidez a partir de datos de masa y de densidad lineal es escrita en términos de las variables medidas directamente: masa de la cuerda (m), longitud total de la cuerda (ℓ)y masa de la pesa (M).

$$\text{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{m/\ell}} = \sqrt{\frac{Mg\ell}{m}}$$

$$\text{v} = \sqrt{\frac{Mg\ell}{m}}$$

Ejemplo con la masa más pequeña:

$$\text{v} = \sqrt{\frac{(0.15088\ \cancel{\text{kg}})\ (9.78\text{ m s}^{-2})\ (3.015\ \text{ m})}{0.01236\ \cancel{\text{kg}}}} = 18.9722871\text{ m/s}$$

Se asumirá que la aceleración de la gravedad no tiene incertidumbre (aunque esto no es realmente cierto). Por lo tanto, la incertidumbre asociada se encuentra al aplicar la ley de propagación de la incertidumbre.

$$u(\text{v}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\sqrt{\frac{Mg\ell}{m}}}{\partial m}\right)^2 \cdot u_c^2(m) + \left(\frac{\partial\sqrt{\frac{Mg\ell}{m}}}{\partial M}\right)^2 \cdot u_c^2(M) + \left(\frac{\partial\sqrt{\frac{Mg\ell}{m}}}{\partial \ell}\right)^2 \cdot u_c^2(\ell)}$$

$$u(\text{v}) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}m^{-3/2}\sqrt{Mg\ell}\right)^2 \cdot u_c^2(m) + \left(\frac{1}{2}M^{-1/2}\sqrt{\frac{g\ell}{m}}\right)^2 \cdot u_c^2(M) + \left(\frac{1}{2}\ell^{-1/2}\sqrt{\frac{Mg}{m}}\right)^2 \cdot u_c^2(\ell)}$$

$$u(\mathsf{v}) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{Mg\ell}{m^3}\right) \cdot u_c^2(m) + \left(\frac{1}{4}\frac{g\ell}{mM}\right) \cdot u_c^2(M) + \left(\frac{1}{4}\frac{Mg}{m\ell}\right) \cdot u_c^2(\ell)}$$

Ejemplo con la masa más pequeña.

$$u(\mathsf{v}) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{(0.15088\ \cancel{\mathrm{kg}})\ (9.78\ \mathrm{m\ s^{-2}})\ (3.015\ \ \mathrm{m})}{0.01236^3\ \cancel{\mathrm{kg^3}}}\right)(10^{-10}\ \cancel{\mathrm{kg^2}}) + \left(\frac{1}{4}\frac{(9.78\ \mathrm{m\ s^{-2}})\ (3.015\ \ \mathrm{m})}{(0.01236\ \cancel{\mathrm{kg}})\ (0.15088\ \cancel{\mathrm{kg}})}\right)(10^{-10}\ \cancel{\mathrm{kg^2}}) + \left(\frac{1}{4}\frac{(0.15088\ \cancel{\mathrm{kg}})\ (9.78\ \cancel{\mathrm{m}}\ \mathrm{s^{-2}})}{(0.01236\ \cancel{\mathrm{kg}})\ (3.015\ \cancel{\mathrm{m}})}\right)(10^{-6}\ \mathrm{m^2})}$$

$$u(\mathsf{v}) = 0.0083186\ \mathrm{m/s} \approx 0.008\ \mathrm{m/s}$$

Aplicando el redondeo adecuado: $\mathsf{v} = (18.972 \pm 0.008)\ \mathrm{m/s}$

3.2 La rapidez a partir de datos de frecuencia y longitud de onda se encuentra al aplicar

$$\mathsf{v} = \lambda_n f_n = 2d_n f_n$$

Donde d_n es la distancia entre dos nodos sucesivos en el armónico n medida experimentalmente. Ejemplo:

$$\mathsf{v} = 2(0.322\ \mathrm{m})\ (53.8\ \mathrm{s^{-1}}) = 34.6472\ \mathrm{m/s}$$

La incertidumbre asociada es:

$$u(\mathsf{v}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\ 2df_n}{\partial d}\right)^2 \cdot u_c^2(d) + \left(\frac{\partial\ 2df_n}{\partial f_n}\right)^2 \cdot u_c^2(f_n)} = \sqrt{4f_n^2 \cdot u_c^2(d) + 4d^2 \cdot u_c^2(f_n)}$$

$$u(\mathsf{v}) = \sqrt{4(53.8\ \mathrm{s^{-1}})^2 \cdot (0.002\ \mathrm{m})^2 + 4(0.322\ \mathrm{s^{-1}})^2 \cdot (0.1\ \mathrm{s^{-1}})^2} = 0.224629473\ \mathrm{m/s} \approx 0.2\ \mathrm{m/s}$$

Aplicando el redondeo adecuado: $\mathsf{v} = (34.6 \pm 0.2)\ \mathrm{m/s}$