Unidad 4: Balances de energía mecánica (Ecuación de Bernoulli) para fluidos en procesos metalúrgicos y de materiales

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA

PROFESOR: LUIS ENRIQUE JARDÓN PÉREZ

Índice

- Introducción
- Conceptos básicos en dinámica de fluidos
- Balance integral de masa
- Balance integral de momentum
- Ecuación de Bernoulli
- Pasos para desarrollar un modelo matemático
- Ejemplos

Introducción

¿Qué es la dinámica de fluidos?

¿Para que nos sirve conocerla como ingenieros químicos metalúrgicos?

¿Cómo conocemos la fluidodinámica de un sistema metalúrgico?

Introducción

La dinámica de fluidos estudia el movimiento de los fluidos y las fuerzas que lo ocasionan.

Cuando estudiamos el comportamiento dinámico de los fluidos, generalmente nos interesamos estudiar el mencionado fluido desde el punto de vista de los llamados fenómenos de transporte.

Es decir, nos interesa conocer la capacidad de los fluidos en movimiento de transportar materiales y/o propiedades de un lugar a otro, y del mecanismo por medio del cuales realizan dicho transporte.

Los fenómenos de transporte principales son:

- Transporte de masa
- Transporte de calor
- Transporte de especies químicas
- Transporte de momentum

Introducción

Los fenómenos de flujo de fluidos, están inherentemente asociados a la mayoría de los procesos industriales relacionados con la extracción y refinación de materiales, por lo que su estudio permite la comprensión de los procesos, ya sea macroscópicamente o microscópicamente.

Para ello emplea las diversas herramientas que la ingeniería de procesos puede ofrecer, siendo particularmente útiles el modelado físico y matemático.

Introducción

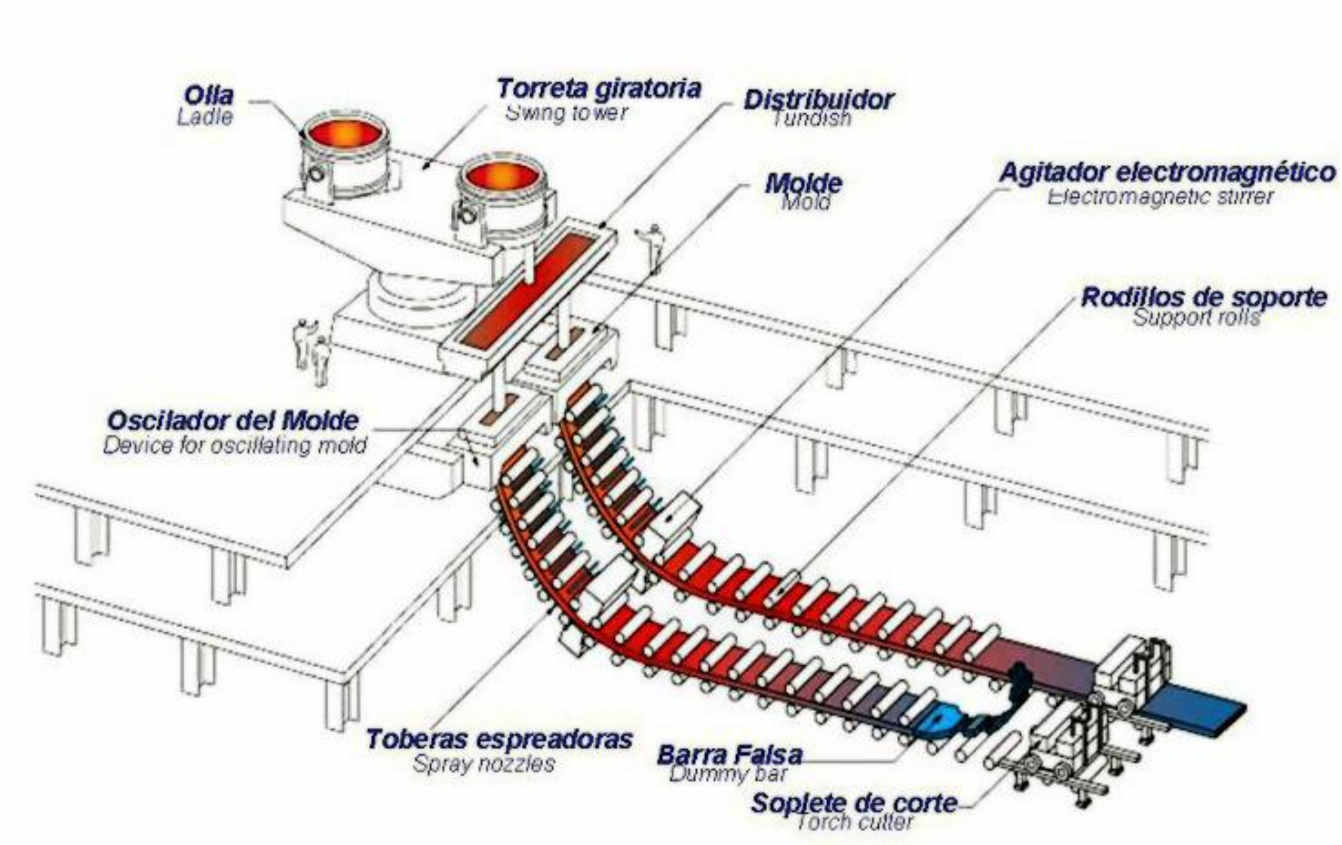


Figura.- Esquema del proceso de colada continua.

Introducción

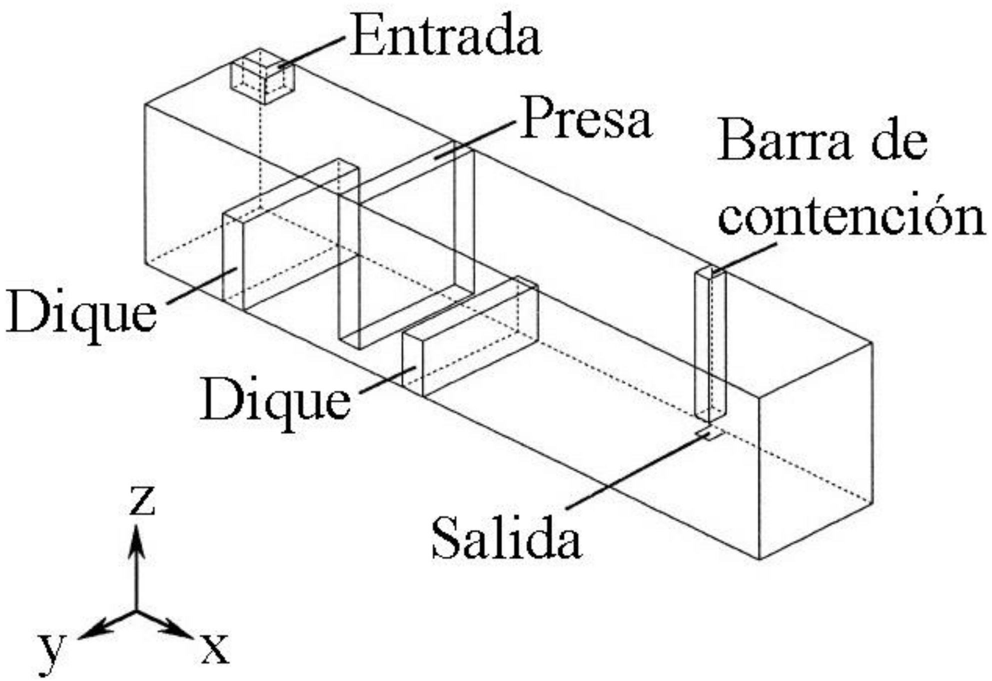


Figura.- Esquema del modelo con accesorios.

Zhang, L., Taniguchi, S., & Cai, K. (2000). Fluid flow and inclusion removal in continuous casting tundish. *Metallurgical and Materials Transactions B*, *31*(2), 253-266.

Estudio de la fluidodinámica de un distribuidor de colada continua mediante modelado matemático, incluyendo la remoción de inclusiones.

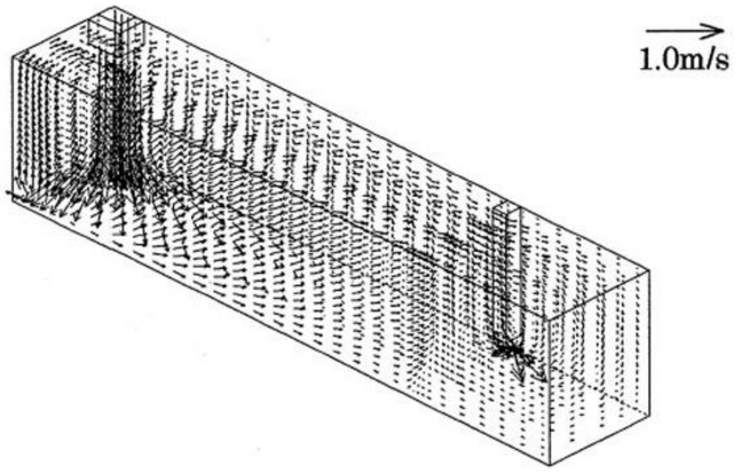
Consideran dos casos:

Sin accesorios

Con accesorios

Introducción

SIN ACCESORIOS



CON ACCESORIOS

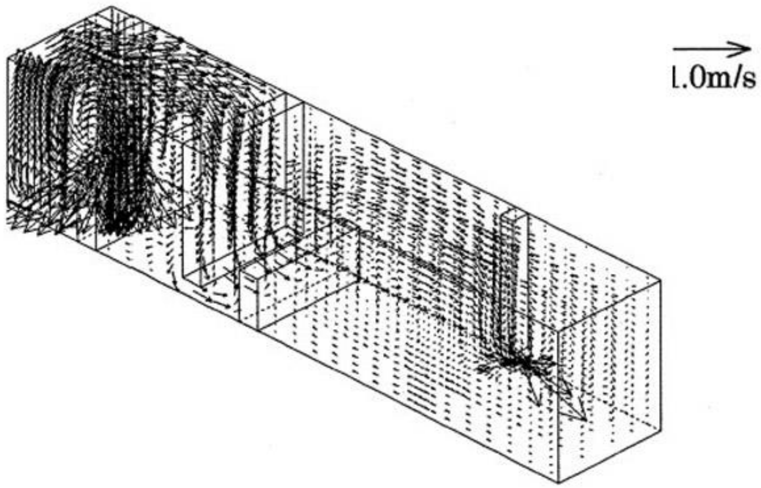
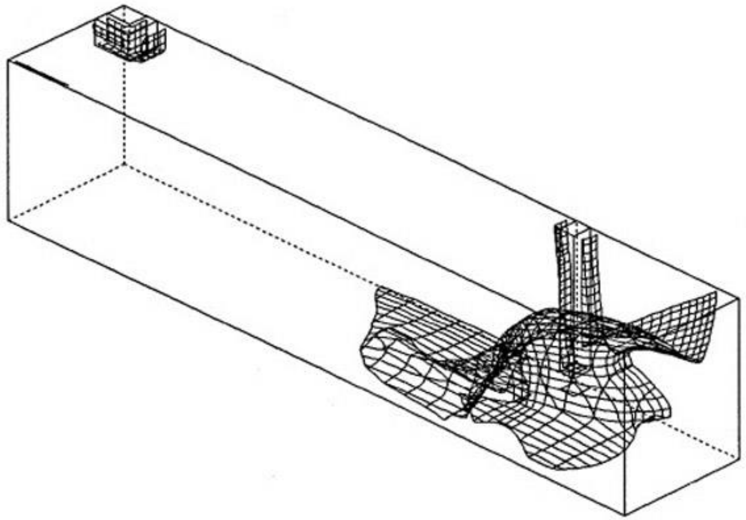


Figura.- Patrones de flujo.

Introducción

SIN ACCESORIOS



CON ACCESORIOS

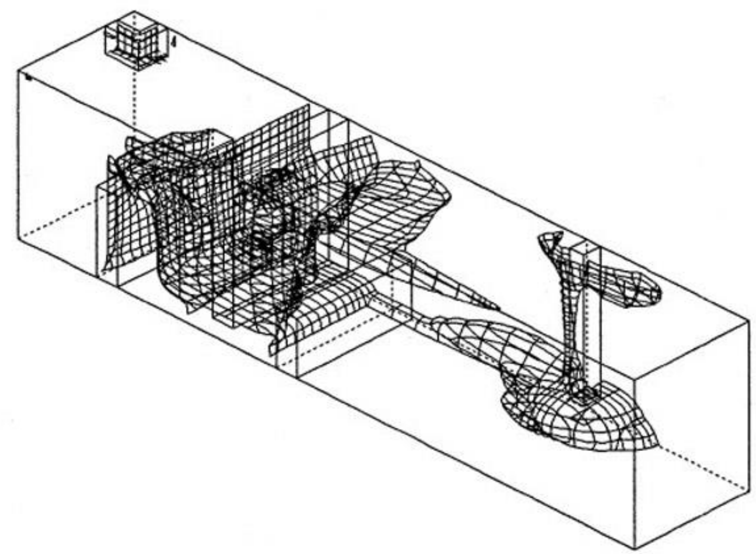
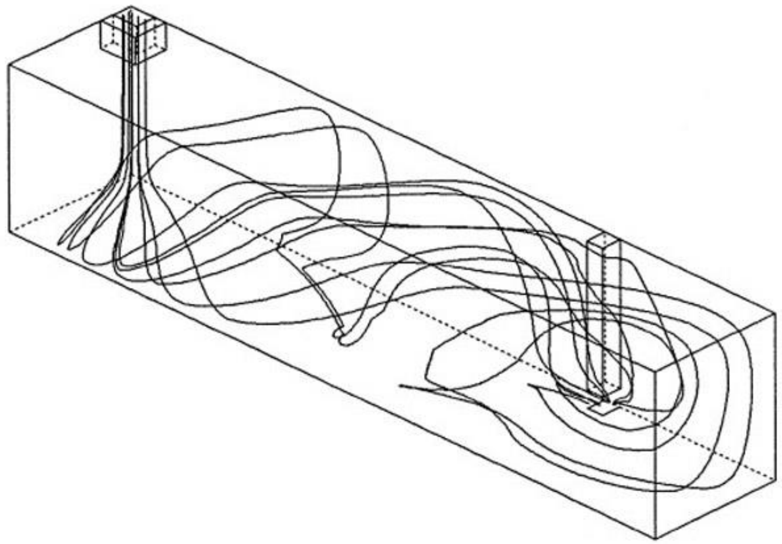


Figura.- Isocontornos de disipación de energía turbulenta (ε = 0.0001 m^2/s^3).

Introducción

SIN ACCESORIOS



CON ACCESORIOS

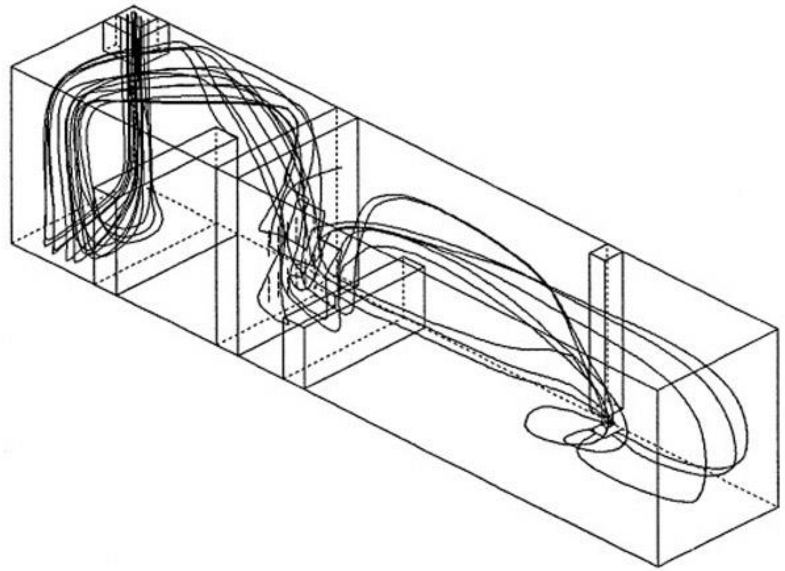


Figura.- Líneas de corriente.

Introducción

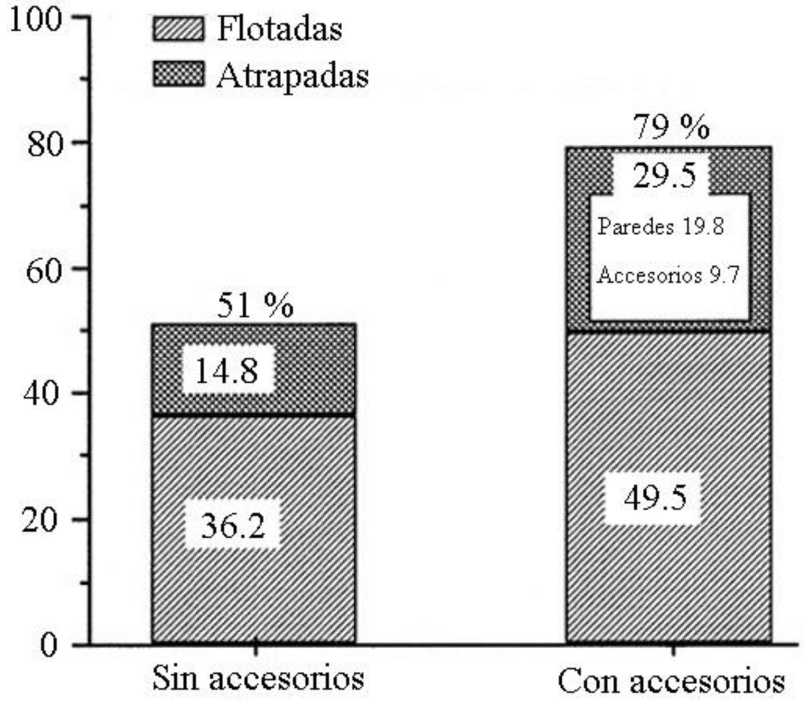


Figura.- Proporción de remoción de inclusiones.

El uso de accesorios:

- Incrementa el tiempo de residencia del acero fundido dentro del distribuidor.
- Mejora la cinética de remoción de inclusiones, además de la proporción de inclusiones removidas.

Esta mejoría en la eficiencia del distribuidor se debe principalmente a los cambios en la fluidodinámica debido a la presencia de los accesorios.

Introducción

Conocer la fluidodinámica y los fenómenos de transporte asociados a un proceso permite realizar análisis del mismo, buscando:

- Obtener y comprender los mecanismos controlantes del proceso.
- Evaluar el efecto de distintas variables de diseño y operación sobre la eficiencia del proceso.
- Optimizar las condiciones en las que opera el proceso.

Llegando a mejorías tanto en cinética como en costo de operación.

Introducción

Szekely, J. (2012). *Fluid flow phenomena in metals processing*. Elsevier.

Szekely, J., & Luis Gerardo Trapaga M. (1988). *Fenómenos de Flujo de Fluídos en Procesamiento de metales*. Limusa.

Daily, J. W., & Harleman, D. R. (1969). *Dinámica de los fluidos*. Editorial F. Trillas S. A.

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Fluido:

Un fluido es un material que presenta “fluidez”, pudiendo ser un material en fase liquida o gaseosa, su principal característica es que el volumen del fluido no preserva su forma a menos que se encuentre limitada por fuerzas externas.

Una definición más rigurosa indica que:

“Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente bajo un esfuerzo cortante, sin importar la magnitud del mismo”

Debe indicarse que esta definición solo es valida para los llamados fluidos “newtonianos”.

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Fuerza:

La fuerza se define como:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Y dado que la cantidad de movimiento (P), se define como:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

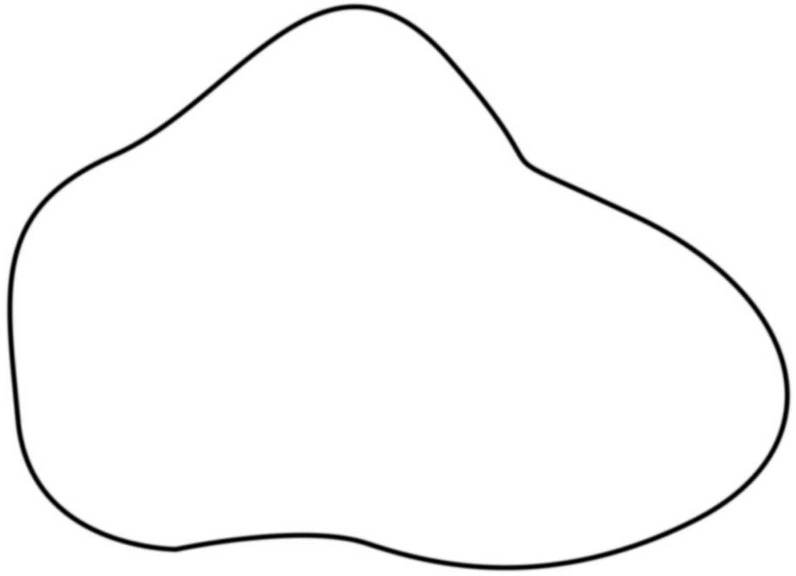
$$\vec{F} = \frac{d(\vec{P})}{dt}$$

Sus unidades son los Newtons [N] o unidades equivalentes:

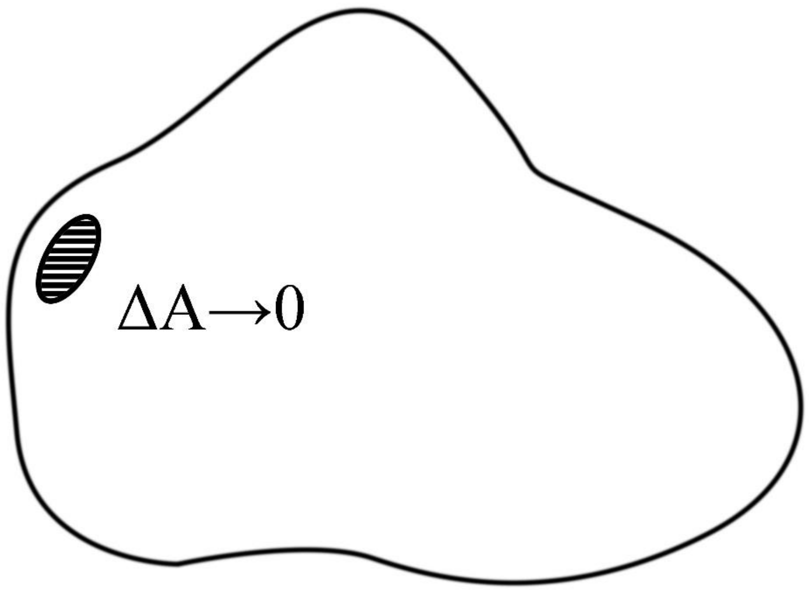
$$1\,[N] = 1\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

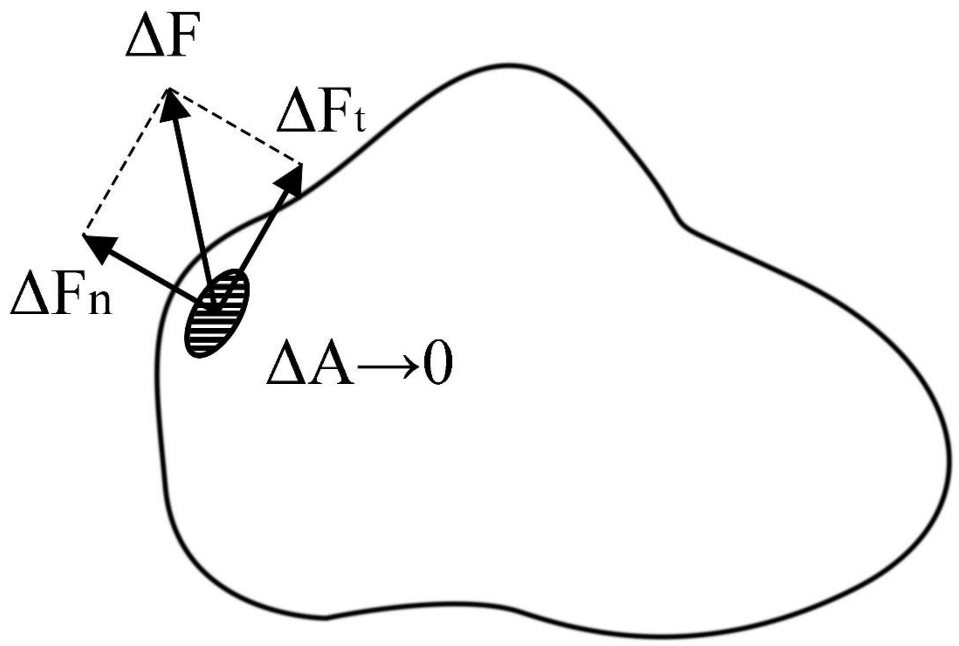
Tensor de esfuerzos:



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Donde:

ΔF_n es la fuerza normal al área del fluido

ΔF_t es la fuerza de corte sobre el área del fluido

Nosotros entonces podemos definir el esfuerzo normal y el esfuerzo de corte como:

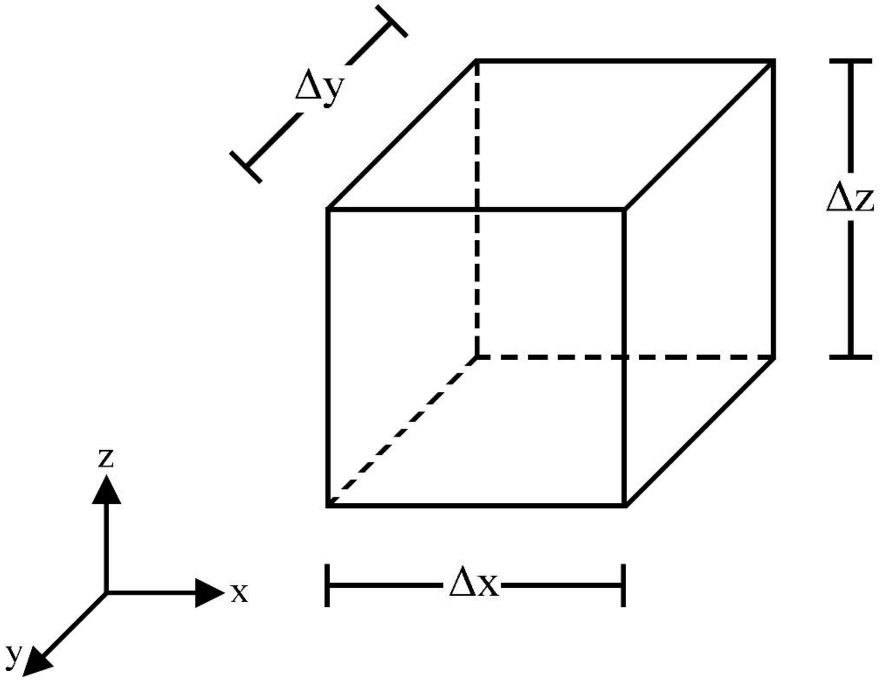
$$\tau_n = \left({}^{\Delta F_n}/_{\Delta A}\right)_{\Delta A \to 0}$$

$$\tau_t = \left({}^{\Delta F_t}/_{\Delta A}\right)_{\Delta A \to 0}$$

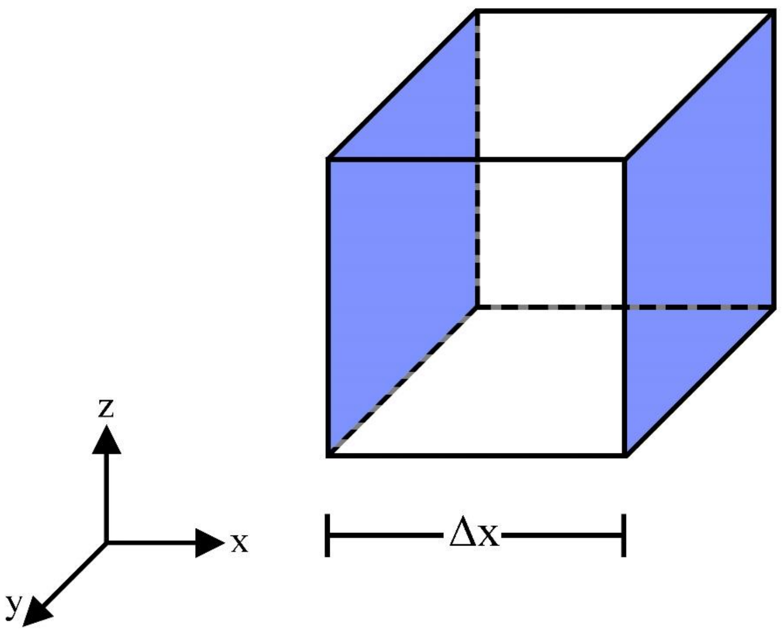
En otras palabras un esfuerzo considera no solo la dirección de aplicación, sino también el área sobre la que se aplica.

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

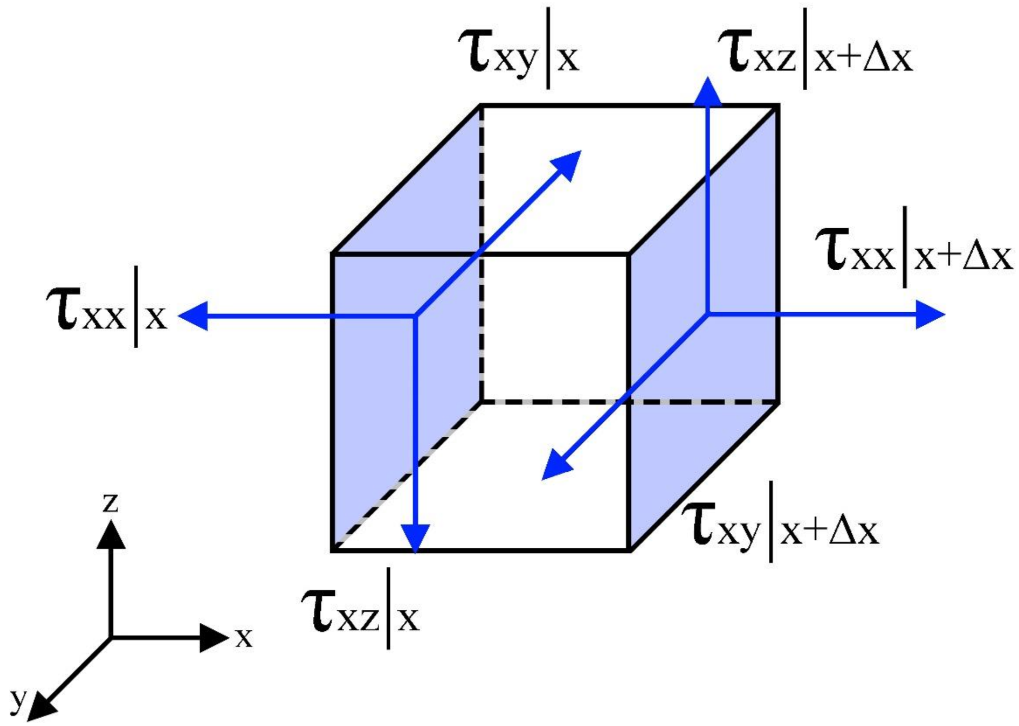
$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$$



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Esfuerzo sobre el área x en dirección x:

$$\tau_{xx}$$

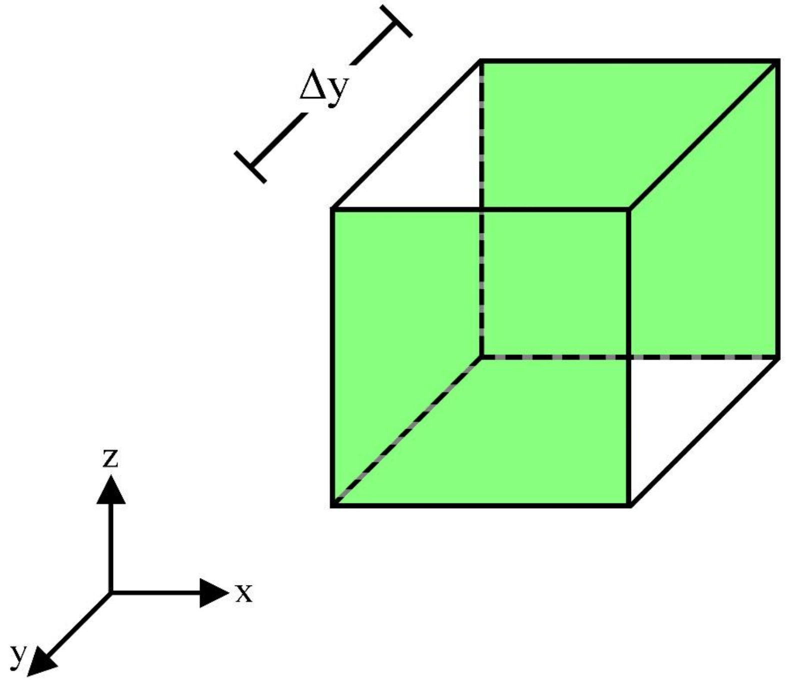
Esfuerzo sobre el área x en dirección y:

$$\tau_{xy}$$

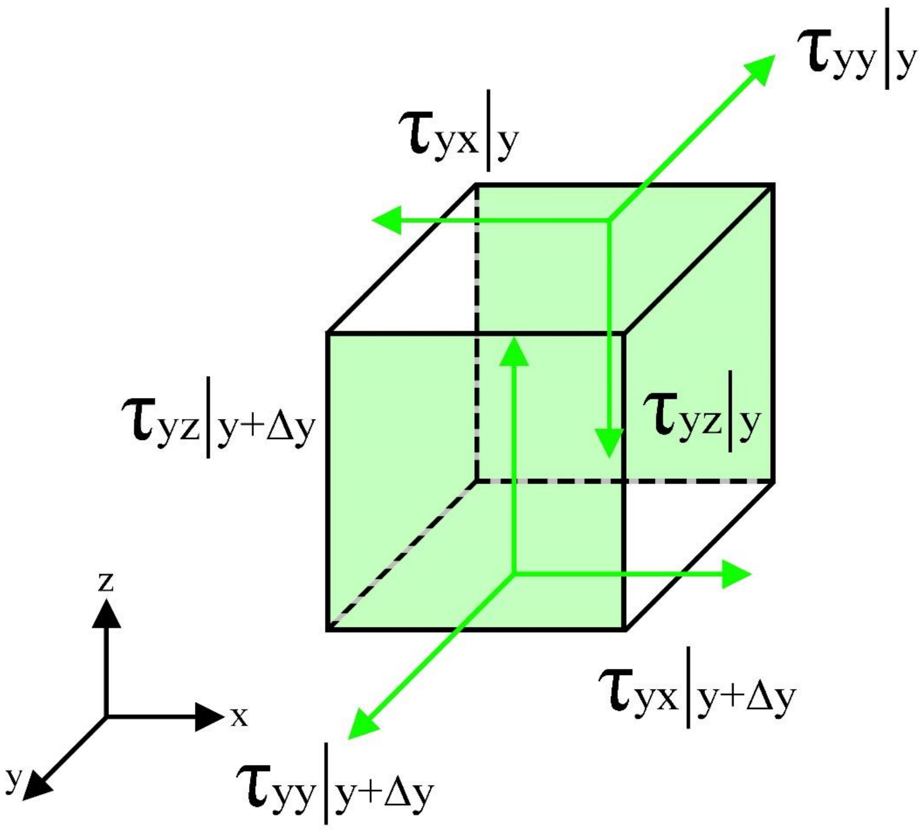
Esfuerzo sobre el área x en dirección z:

$$\tau_{xz}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Esfuerzo sobre el área y en dirección x:

$$\tau_{yx}$$

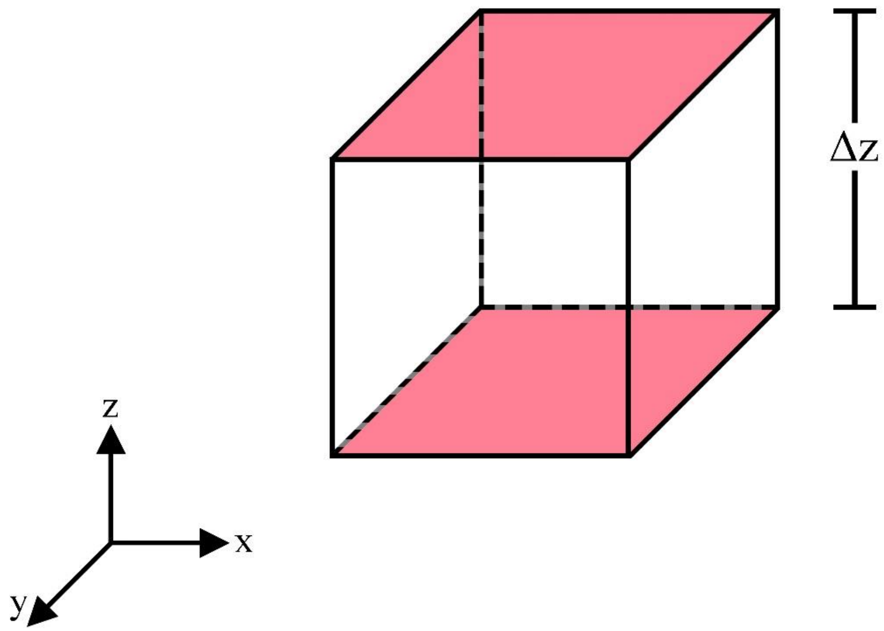
Esfuerzo sobre el área y en dirección y:

$$\tau_{yy}$$

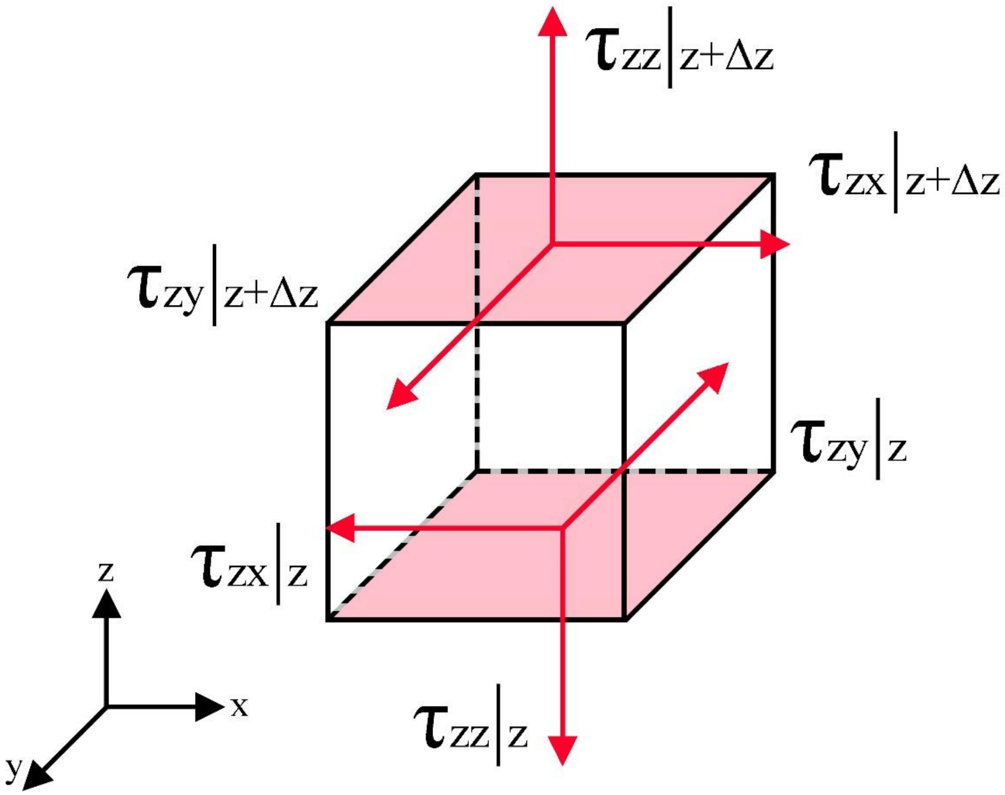
Esfuerzo sobre el área y en dirección z:

$$\tau_{yz}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Esfuerzo sobre el área z en dirección x:

$$\tau_{zx}$$

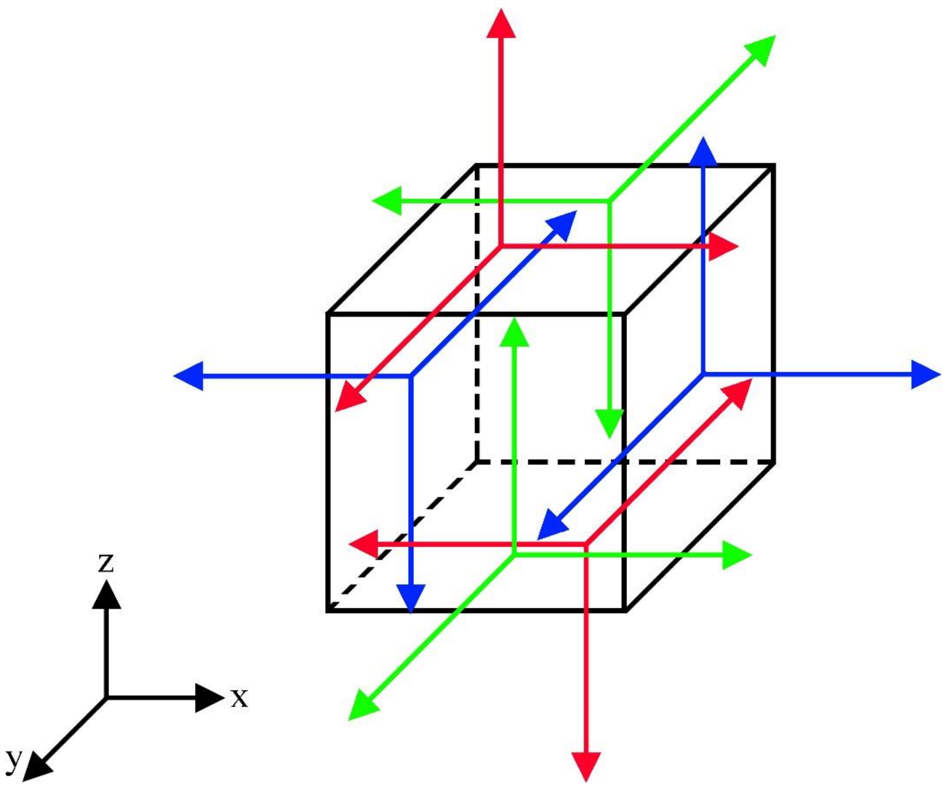
Esfuerzo sobre el área z en dirección y:

$$\tau_{zy}$$

Esfuerzo sobre el área z en dirección z:

$$\tau_{zz}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Por lo que habría que considerar los nueve esfuerzos que actúan sobre el elemento infinitesimal de fluido:

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Este tensor de esfuerzos presenta tres esfuerzos normales y seis esfuerzos cortantes, además de ser simétrico, es decir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Gradiente de presión:

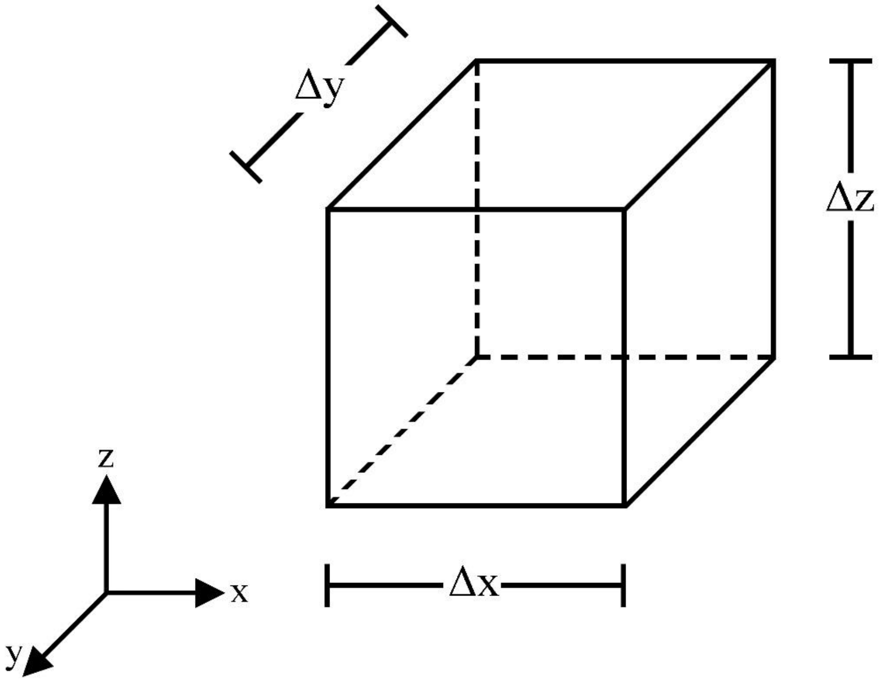
Tiene las mismas dimensiones que un esfuerzo, es decir:

$$p = \frac{F}{A}$$

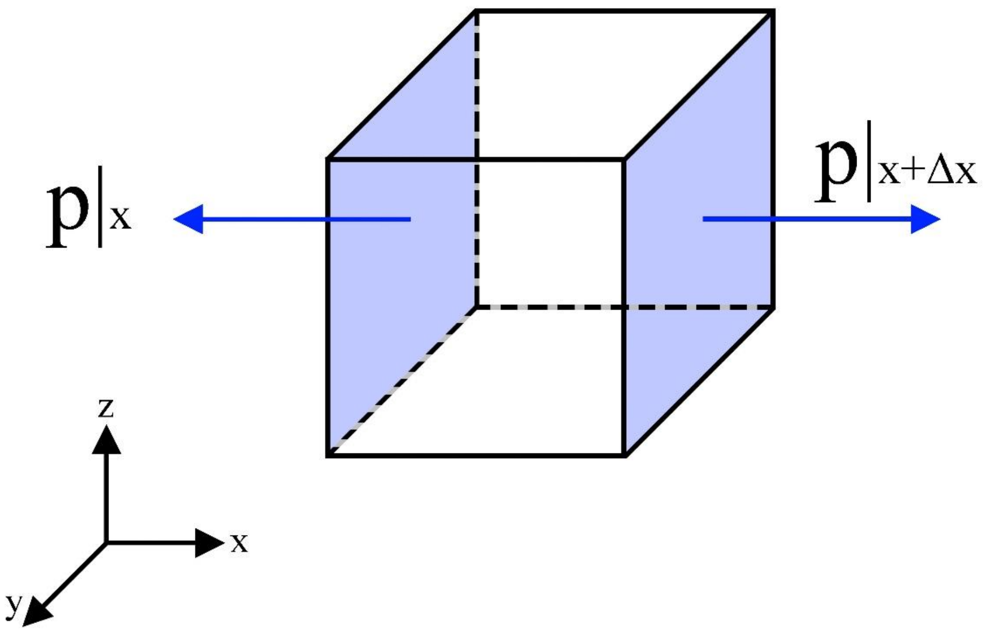
Pero a diferencia de un tensor, la presión que se aplica sobre un área definida es un escalar, es decir, actúa uniformemente en todas direcciones sobre esa área.

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

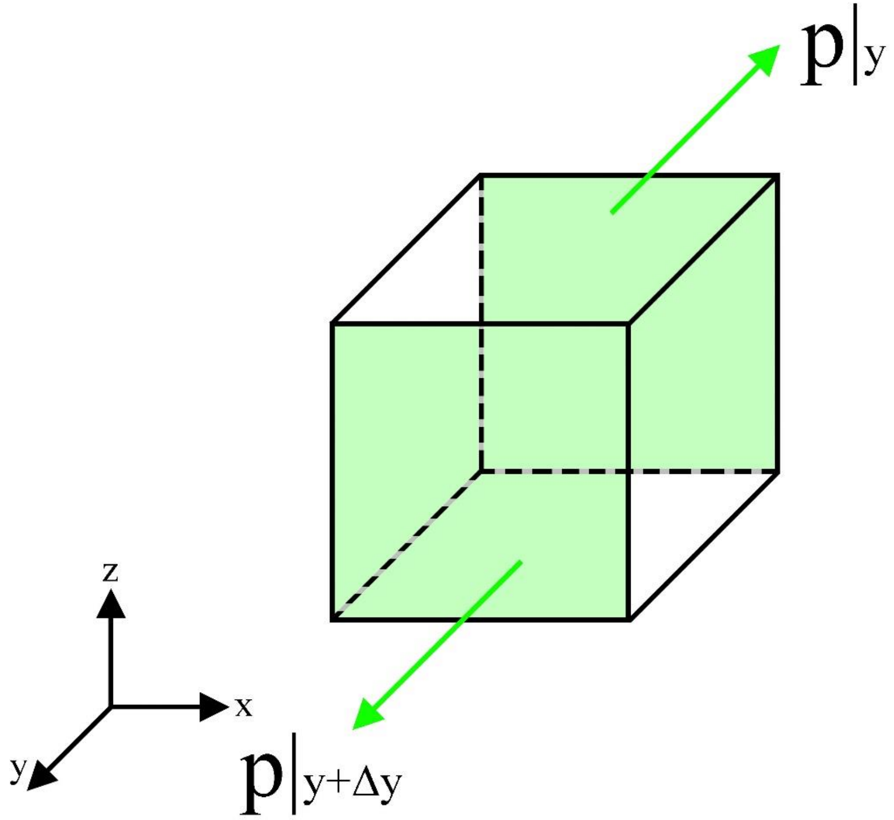
$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$



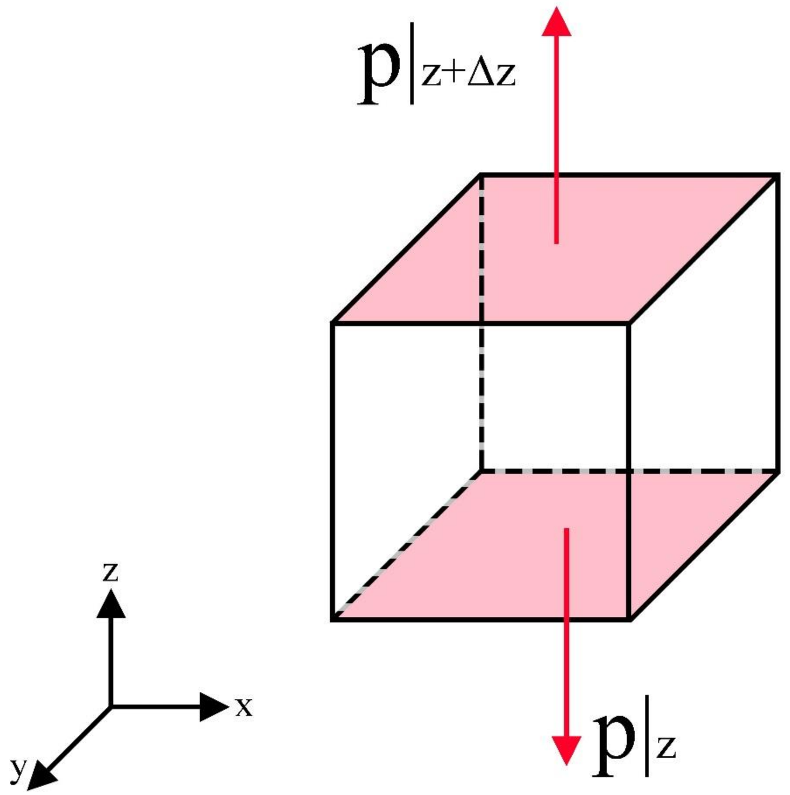
Conceptos básicos en dinámica de fluidos



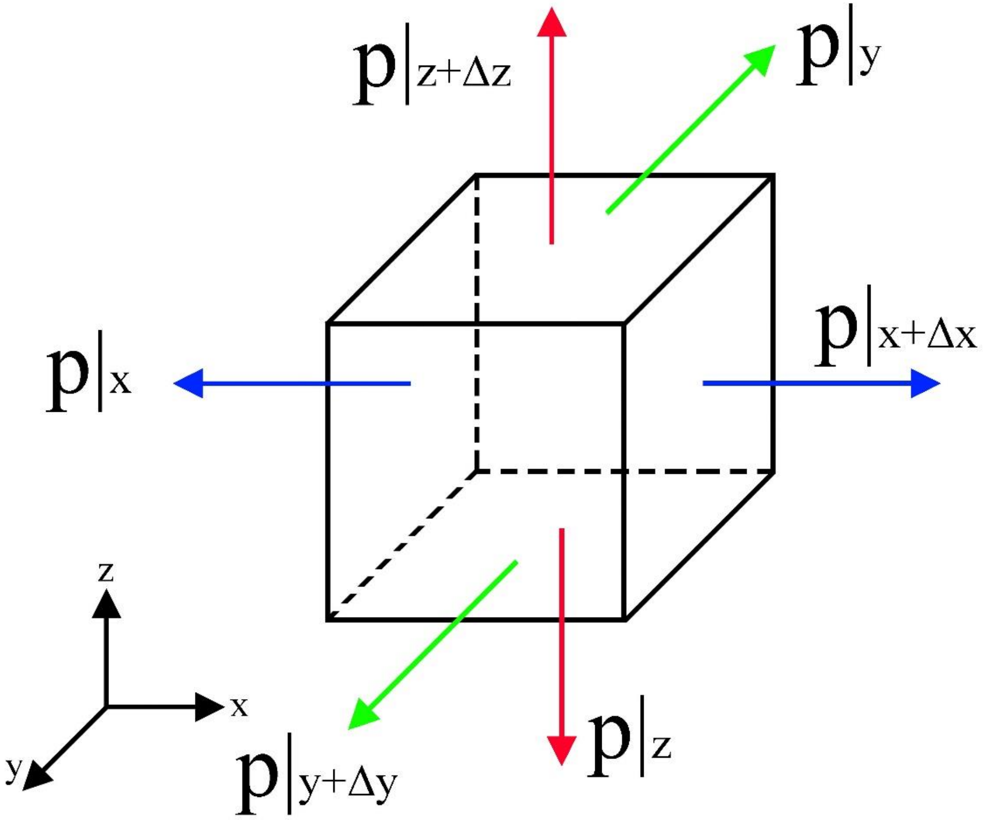
Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Condiremos la presión que actúa en la dirección x, evaluada en el punto x + Δx, la fuerza que actúa sobre el fluido debido a la presión en este punto esta definida como:

$$p|_{x+\Delta x}(\Delta y \Delta z)$$

Por lo que la fuerza neta debido a la presión en la dirección x la podemos cuantificar como:

$$p|_{x}(\Delta y \Delta z) - p|_{x+\Delta x}(\Delta y \Delta z)$$

Si dividimos por unidad de volumen obtenemos que:

$$F_{x,p} = \frac{p|_{x}(\Delta y \Delta z) - p|_{x+\Delta x}(\Delta y \Delta z)}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Por lo que:

$$F_{x,p} = \frac{p|_x - p|_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Dado que estamos considerando un elemento de fluido infinitesimal Δx, Δy, Δz → 0, con lo que:

$$F_{x,p} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

De la misma manera se obtiene que:

$$F_{y,p} = -\frac{\partial p}{\partial y} \qquad F_{z,p} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Por lo que en tres dimensiones, la fuerza que actúa sobre un elemento de fluido debido al gradiente de presión se define como:

$$F_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

O bien:

$$F_p = -\nabla p$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Viscosidad dinámica:

La viscosidad dinámica (μ), es una propiedad de los fluidos que se hace evidente cuando se aplica una fuerza a un fluido con el objetivo de moverlo.

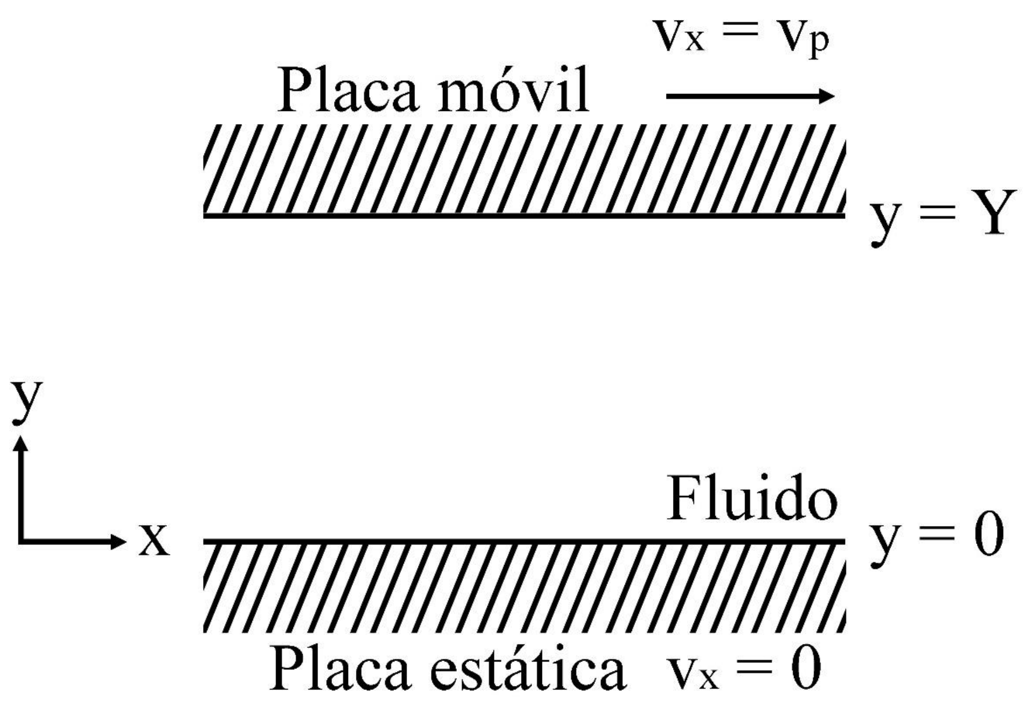
La viscosidad, en un fluido newtoniano, relaciona el movimiento de un fluido con la fuerza que se le aplica al mismo.

Se podría decir que la viscosidad indica que tan bueno es un fluido para transferir momentum.

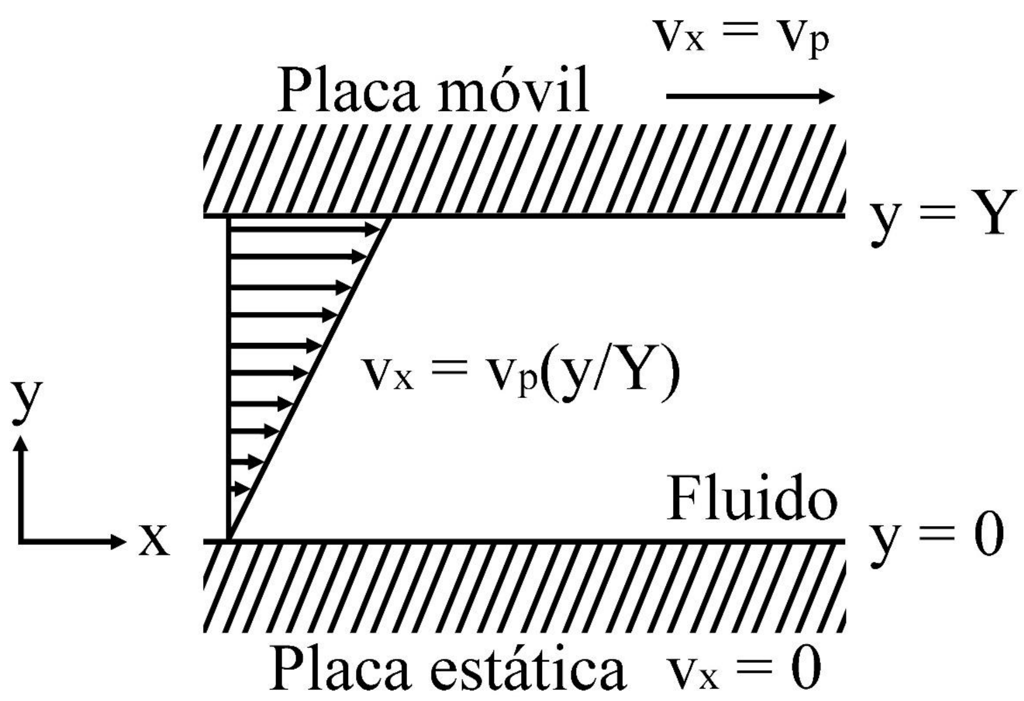
Las unidades de la viscosidad dinámica son:

$$\mu \left[\frac{N\,s}{m^2}\right] \quad \text{o bien} \quad \mu \left[\frac{kg}{m\,s}\right]$$

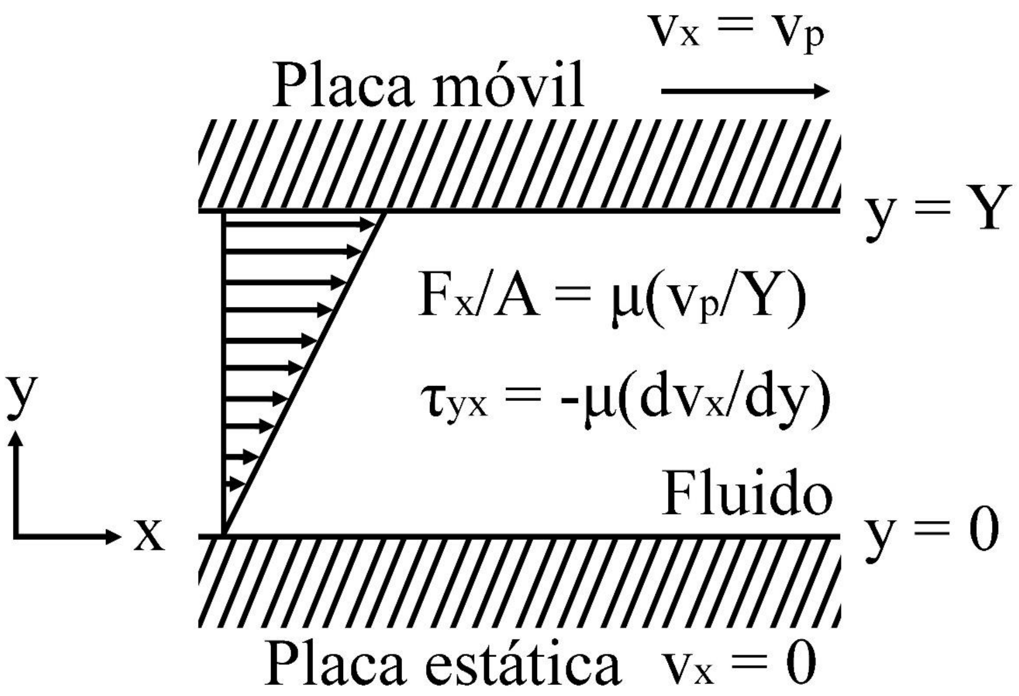
Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos en coordenadas cartesianas[1] (x, y, z):

$$\bar{\tau}_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right]$$

[1] $\nabla\cdot\bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos en coordenadas cilíndricas[2] (r, θ, z):

$$\bar{\tau}_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta r} = -\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{zr} = -\mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]$$

$$\bar{\tau}_{\theta z} = \bar{\tau}_{z\theta} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

[2] $\nabla\cdot\bar{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos en coordenadas esféricas[3] (r, θ, ϕ):

$$\bar{\tau}_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{\varphi\varphi} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\bar{v})\right]$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta r} = -\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi} = \bar{\tau}_{\varphi r} = -\mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]$$

$$\bar{\tau}_{\theta\varphi} = \bar{\tau}_{\varphi\theta} = -\mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]$$

[3] $\nabla\cdot\bar{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

En un fluido newtoniano, μ permanece constante sin importar la magnitud de la fuerza que se aplica al fluido, en condiciones subsónicas.

En un fluido no newtoniano, μ cambia con la cantidad de fuerza que se le aplica al mismo.

La viscosidad se ve afectada por factores como:

- Temperatura (decrece en líquidos, se incrementa en gases)
- Presión (mayormente despreciable)
- Composición química

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Densidad:

La densidad (ρ) es la relación existente entre la masa de una sustancia y el volumen de la misma:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

En el caso de un fluido, su densidad puede tener dos comportamientos bajo condiciones subsónicas:

Incompresible si ρ permanece constante independientemente de la fuerza aplicada.

Compresible si ρ cambia dependiendo de la fuerza aplicada.

Las unidades de la densidad son:

$$\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Viscosidad cinemática:

La viscosidad cinemática (ν) es la relación entre la viscosidad dinámica y la densidad:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

En muchos casos se le considera una especie de coeficiente de difusividad de momento, de manera similar al coeficiente de difusión o la difusividad térmica.

Las unidades de la viscosidad cinématica son:

$$\nu \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Flujo laminar y turbulento:

En términos de la dinámica de fluidos, el flujo turbulento es un régimen caracterizado por presentar cambios caóticos en su presión y velocidad.

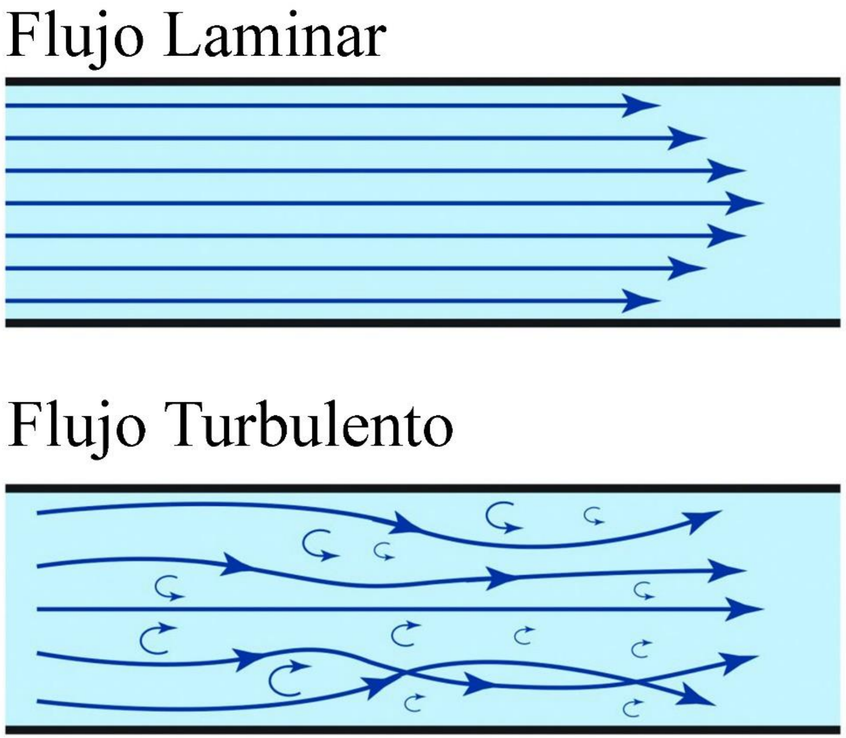
Un flujo no turbulento es llamado laminar, es decir, no presenta cambios imprevistos en su presión o velocidad.

En otras palabras, la turbulencia mide el nivel de caos en el movimiento de un fluido.

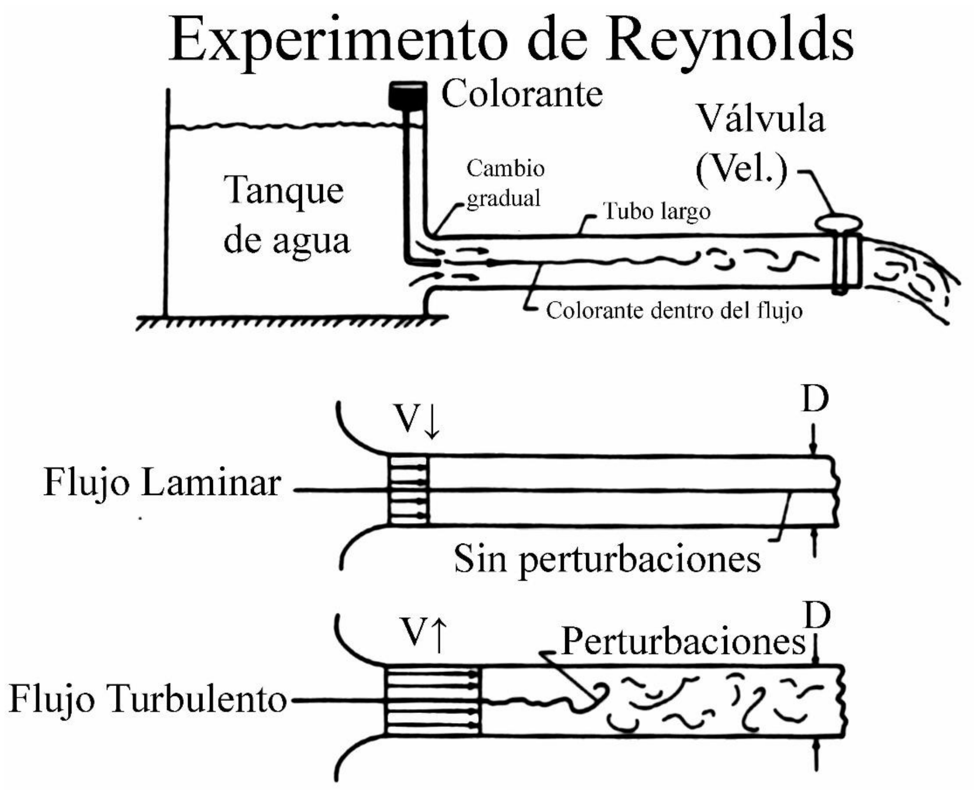
Al presentar cambios en el movimiento del fluido, un flujo turbulento presenta una alta capacidad para mezclar un fluido.

En la mayoría de los sistemas ingenieriles se trabaja con flujos turbulentos.

Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos



Conceptos básicos en dinámica de fluidos

El número de Reynolds, es un número adimensional y se define como:

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} L}{\mu}$$

Donde:

ρ es la densidad del fluido [kg/m³]

$\bar{v}$ es la velocidad promedio del fluido [m/s]

L es la longitud característica del sistema [m]

μ es la viscosidad dinámica del sistema [Pa s]

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

En muchos sistemas L es el diámetro hidráulico:

$$L = D_h = \frac{4A_{\perp}}{P_{Mojado}}$$

Si se trata de un tubo de sección redonda totalmente lleno:

$$D_h = \frac{\frac{4\pi D^2}{4}}{\pi D} = D$$

Por lo que el número de Reynolds es:

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$$

Conceptos básicos en dinámica de fluidos

Para un tubo cerrado y completamente lleno de sección redonda:

Régimen laminar

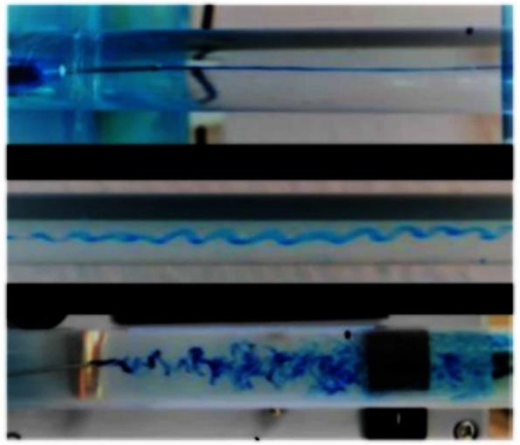
$N_{Re} \leq 2300$

Régimen de transición

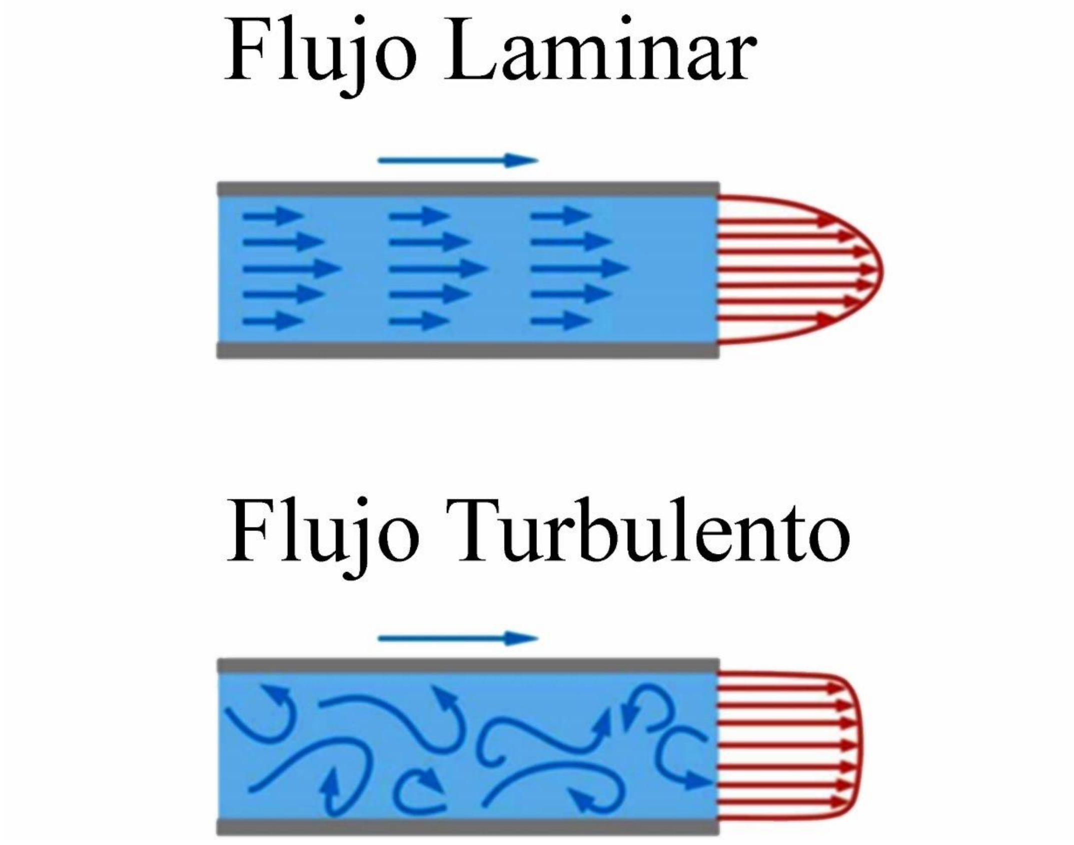
$2300 < N_{Re} < 4000$

Régimen turbulento

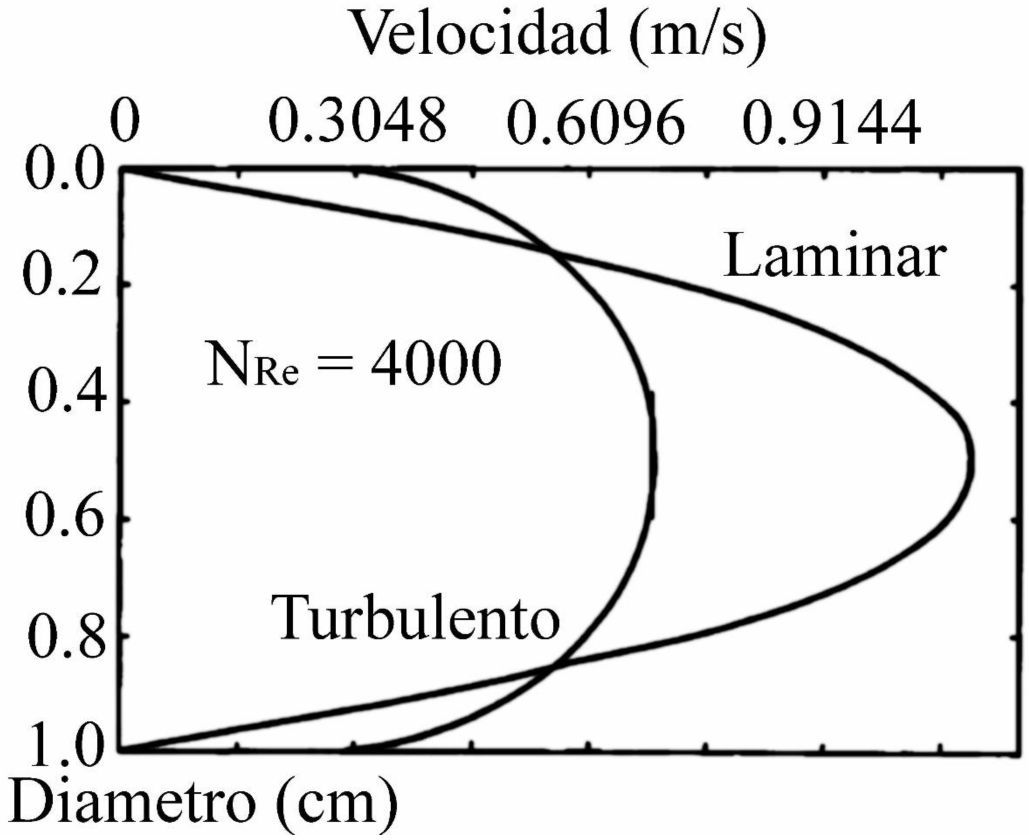
$N_{Re} \geq 4000$



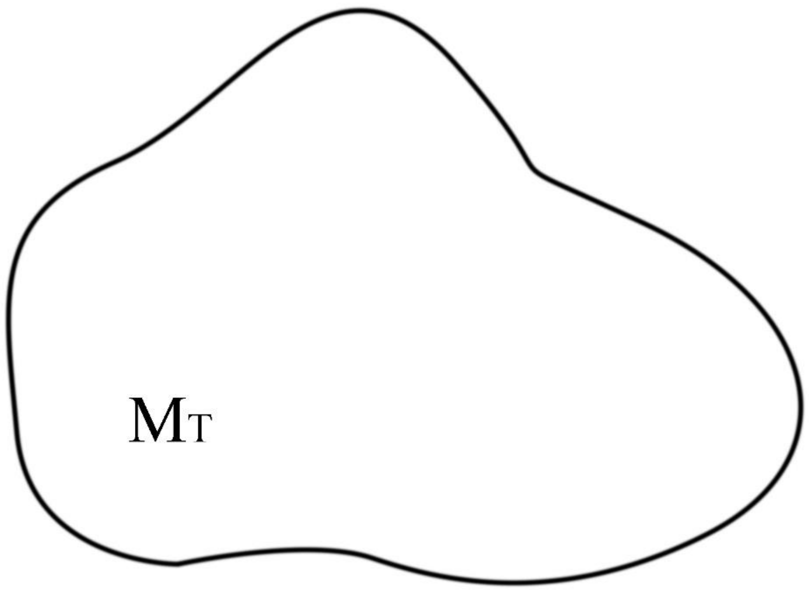
Conceptos básicos en dinámica de fluidos



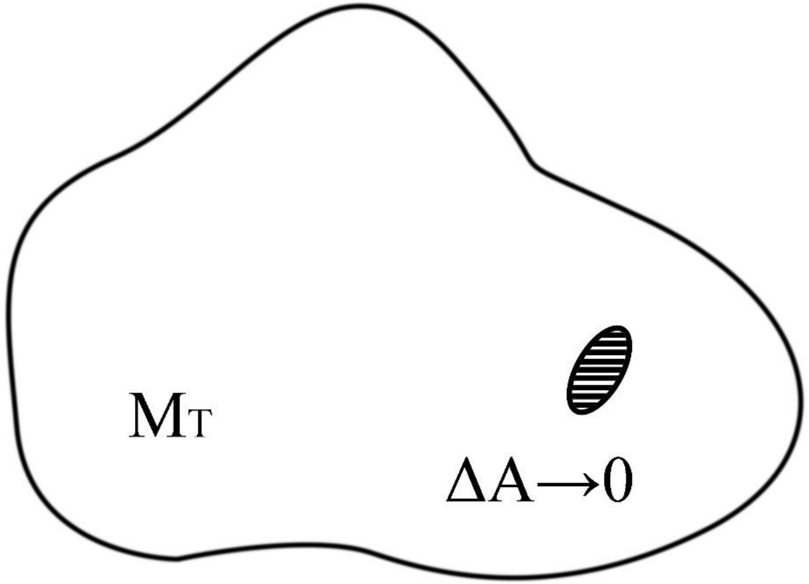
Conceptos básicos en dinámica de fluidos



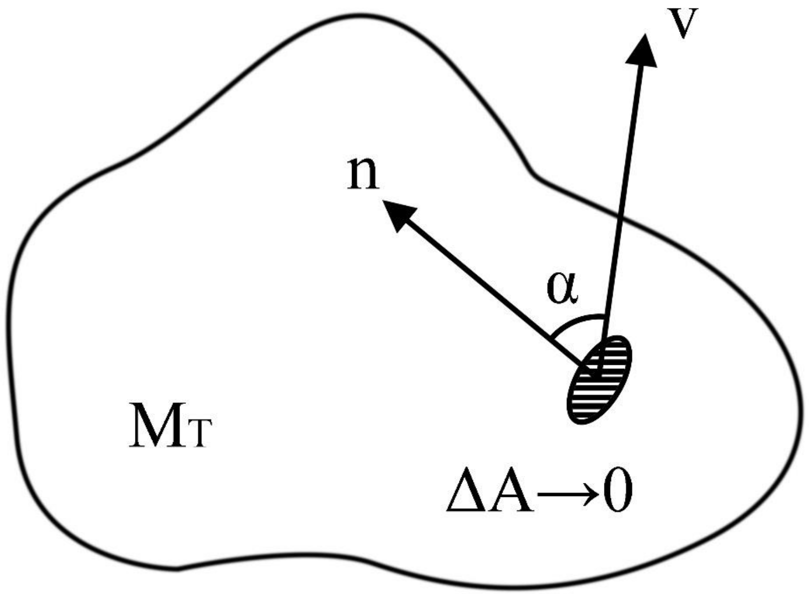
Balance integral de masa



Balance integral de masa



Balance integral de masa



Balance integral de masa

Si realizamos un balance de masa sobre ese elemento de fluido:

$$-(S - E) = Ac$$

Considerando que un flujo másico se puede calcular:

$$\dot{m} = \rho \bar{v} A_{\perp}$$

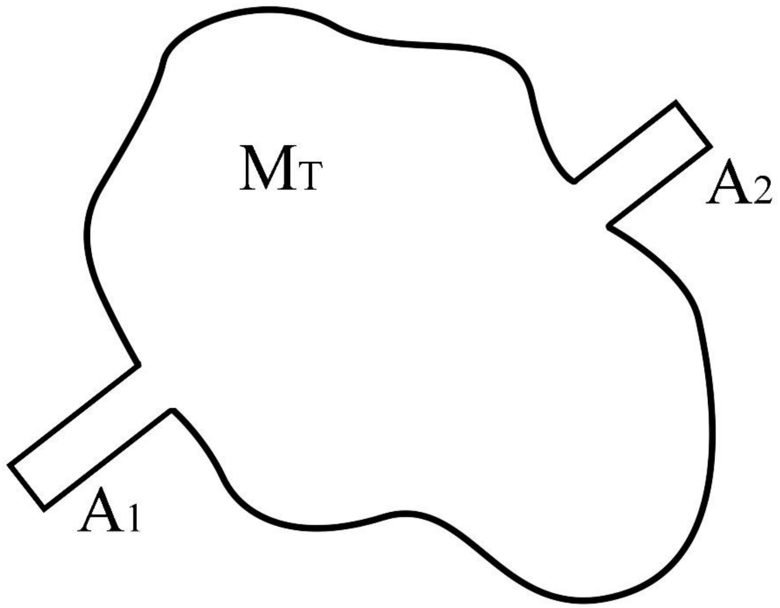
Por lo que el balance sobre el elemento diferencial es:

$$-\oint \rho(\bar{v}\, dA) = \frac{dM_T}{dt}$$

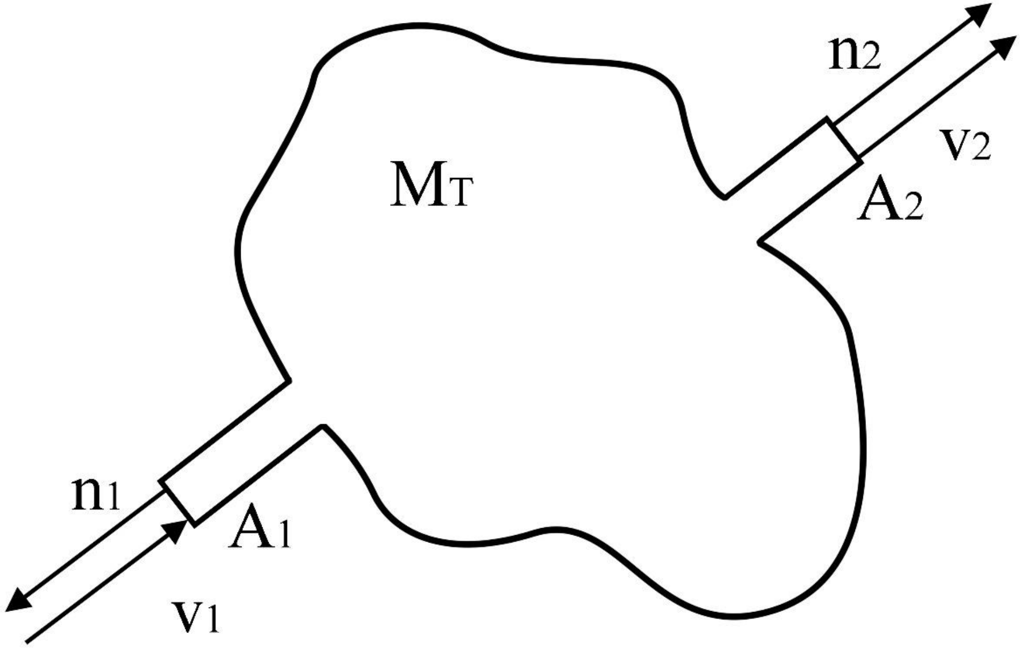
Donde la acumulación se puede descomponer como sigue:

$$-\oint \rho(\bar{v}\, dA) = \frac{d}{dt}\iiint \rho\, dV$$

Balance integral de masa



Balance integral de masa



Balance integral de masa

Por lo que podemos rescribir el balance como:

$$\int \rho v \, dA_1 - \int \rho v \, dA_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Considerando el teorema del valor medio:

$$\bar{v} = \frac{\int v \, dA}{\int dA}$$

Por lo que podemos reescribir la ecuación como:

$$\rho_1 \bar{v}_1 A_1 - \rho_2 \bar{v}_2 A_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Quedando finalmente:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Balance integral de momentum

Nuevamente se debe realizar un balance de momentum sobre un elemento infinitesimal de fluido:

$$E - S + G = Ac$$

Primero debemos definir la cantidad de momento o momentum como:

$$\vec{P} = \rho\vec{v}$$

Por lo que un flujo de momento debido a los flujos de entrada y salida, se puede expresar como:

$$\vec{v}(\rho\vec{v})$$

Por lo que las entradas y salidas de momentum en nuestro elemento de fluido son:

$$-\oint(\rho\vec{v})\vec{v}\,dA$$

Balance integral de momentum

Por lo que el balance de momentum tomaría la siguiente forma:

$$-\oint(\rho\vec{v})\vec{v}\,dA=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

Sin embargo, al ser un balance de fuerzas, se deben considerar todas las otras fuerzas que actúan sobre el fluido:

1.- Fuerzas debido a la diferencia de presión:

$$-\oint p\,dA$$

2.- Fuerzas de las caras internas en contacto con el fluido, o debido al contacto con paredes sólidas:

$$\vec{F}_{drag}$$

2.- Fuerzas externas al fluido como gravedad o electromagnetismo:

$$\vec{F}_{ext}$$

Balance integral de momentum

Por lo que el balance de momentum sería:

$$-\oint(\rho\vec{v})\vec{v}\,dA - \oint p\,dA + \vec{F}_{drag} + \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Pero considerando áreas de entrada y salida bien definidas, la podemos reescribir como:

$$\bar{v}\overrightarrow{\dot{m}}_1 - \bar{v}\overrightarrow{\dot{m}}_2 + pA_1 - pA_2 + \vec{F}_{drag} + \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Donde:

$$\overrightarrow{\dot{m}} = \rho\vec{v}A$$

Ecuación de Bernoulli

Se trata de un balance integral de energía mecánica, nuevamente partimos de la forma:

$$E - S + G = Ac$$

En este caso se considera el aporte de:

1.- La energía cinética:

$$E_K = \iiint \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \, dV$$

2.- La energía potencial:

$$E_P = \iiint g\rho h \, dV$$

Ecuación de Bernoulli

3.- La energía debido a la presión por unidad de masa:

$$E_{Presión} = \int \frac{1}{\rho} dp$$

4.- Pérdidas debido al trabajo aplicado por el fluido a los alrededores:

$$W$$

5.- La energía pérdida debido a la fricción:

$$E_f$$

Ecuación de Bernoulli

Quedando:

$$\iiint \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2\,dV + \iiint g\rho h\,dV + \int \frac{1}{\rho}dp - W - E_f = \frac{d}{dt}(E_K + E_P)$$

Que teniendo entradas y salidas bien definidas se puede reescribir como:

$$\dot{m}\left[\left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 + gh\right)_{A_1} - \left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 + gh\right)_{A_2}\right] + \dot{m}\left[\left(\int \frac{1}{\rho}dp\right)_{A_1} - \left(\int \frac{1}{\rho}dp\right)_{A_2}\right] - W - E_f = \frac{d}{dt}(E_K + E_P)$$

Ecuación de Bernoulli

En la mayoría de los casos, la ecuación de Bernoulli se aplica en estado estacionario, por lo que la expresión cambia a:

$$\frac{\overline{v_2}^2}{2} - \frac{\overline{v_1}^2}{2} + g(h_2 - h_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + W' + E_f' = 0$$

Donde:

$$W' = \frac{W}{\dot{m}}$$

$$E_f' = \frac{E_f}{\dot{m}}$$

Pasos para desarrollar un modelo matemático

- Introducción
- Objetivos e hipótesis
- Planteamiento del problema
- Planteamiento del modelo matemático
  - Suposiciones
  - Ecuaciones gobernantes
  - Condiciones de frontera
  - Condiciones iniciales
  - Materiales (propiedades)
- Metodología de solución
  - Resolución matemática del sistema de ecuaciones (si es posible)
  - Software CFD
    - Pre-procesamiento
    - Procesamiento
    - Post-procesamiento
- Resultados
- Análisis de resultados
- Conclusiones
- Referencias

Pasos para desarrollar un modelo matemático

- Introducción
- Objetivos e hipótesis
- Planteamiento del problema
- Planteamiento del modelo matemático
  - Suposiciones
  - Ecuaciones gobernantes
  - Condiciones de frontera
  - Condiciones iniciales
  - Materiales (propiedades)
- Metodología de solución
  - Resolución matemática del sistema de ecuaciones (si es posible)
  - Software CFD
    - Pre-procesamiento
    - Procesamiento
    - Post-procesamiento
- Resultados
- Análisis de resultados
- Conclusiones
- Referencias

Ejemplos

Ejemplo balance integral de masa:

Vaciado

Ejemplo balance integral de momentum:

Placa

Se encuentra en pdf dentro de la pagina AMyD de la Facultad de Química de la UNAM:
https://amyd.quimica.unam.mx/course/view.php?id=354