

Unidad 5: Transporte de momentum para fluidos en procesos metalúrgicos y de materiales

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA

PROFESOR: LUIS ENRIQUE JARDÓN PÉREZ

Índice

- Introducción
- Mecanismos de los fenómenos de transporte
- Similitudes entre los fenómenos de transporte
- Ecuaciones diferenciales en flujo de fluidos laminar
 - ☐ Ecuación de continuidad
 - ☐ Ecuación de Navier-Stokes
- Condiciones de frontera e iniciales
- Pasos para desarrollar un modelo matemático
- Ejemplos

Introducción

¿Qué son los fenómenos de transporte?

¿Qué es el transporte de momentum en fluidos?

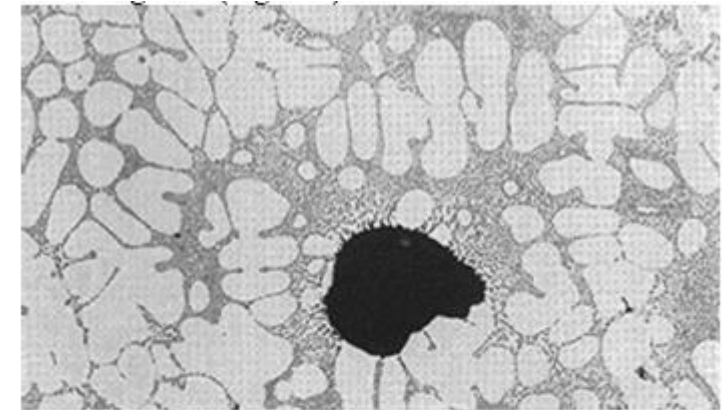
¿Cuál es la diferencia entre un balance macroscópico y uno microscópico?

¿Por qué nos interesa realizar uno u otro?

Introducción

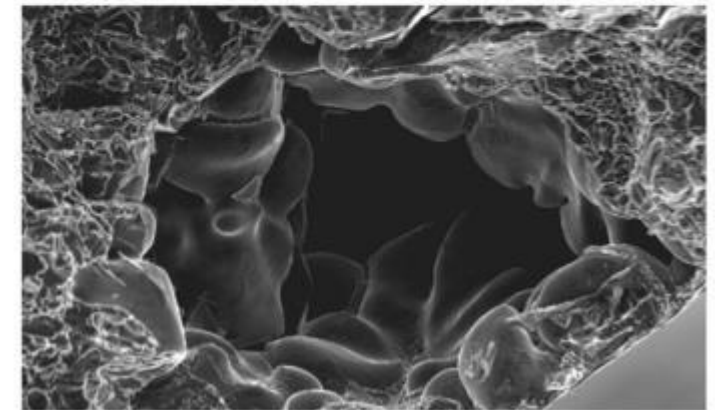


Sopladuras (porosidades por gas) en el aluminio. (a) Metalografía mostrando una porosidad en una aleación aluminio-silicio atacada con HF. (b) Imagen de un poro en una aleación Al-Si obtenida con SEM.



(a)

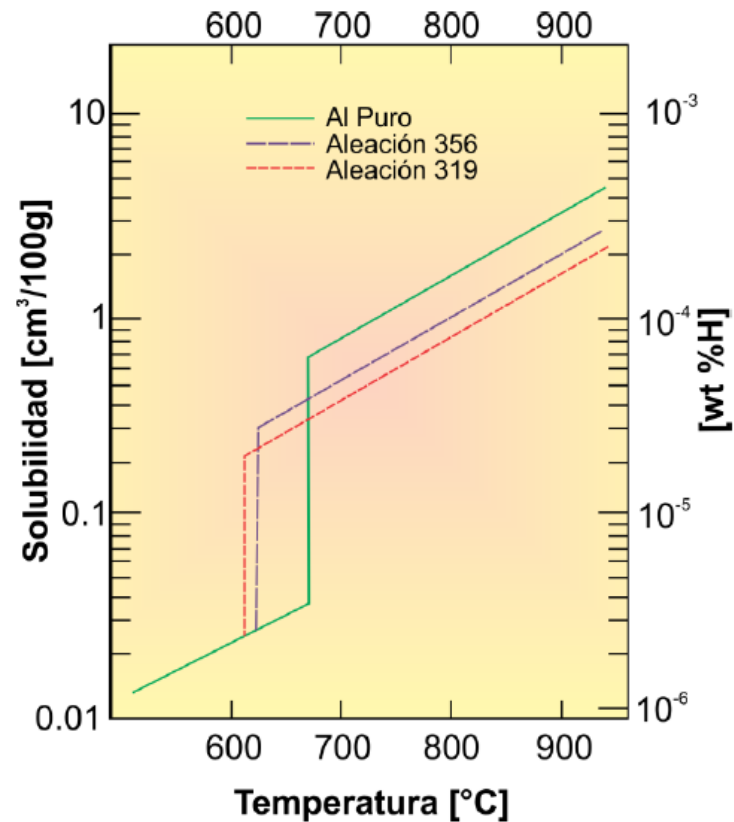
200 μm



(b)

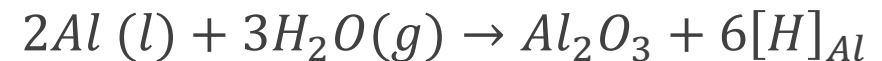
100 μm

Introducción



El **aluminio** en estado líquido tiene una alta **solubilidad de hidrógeno**, la cual desciende drásticamente al solidificarse. Esto ocasiona que el hidrógeno sea expulsado del líquido durante la solidificación, generando sopladuras dentro del aluminio.

La mayor parte de este hidrógeno proviene de la presencia de humedad en el ambiente, en la chatarra, en los fundentes o en los herramientas, además de los productos de combustión.



Introducción

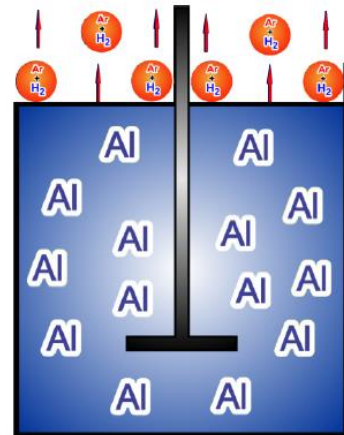
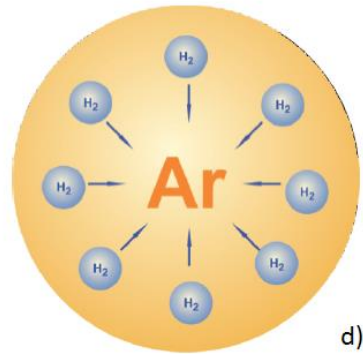
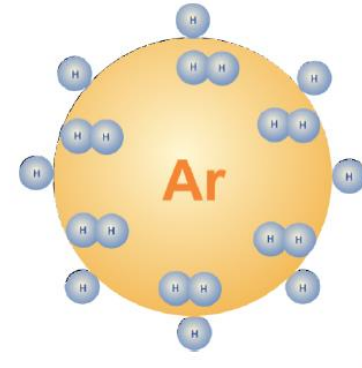
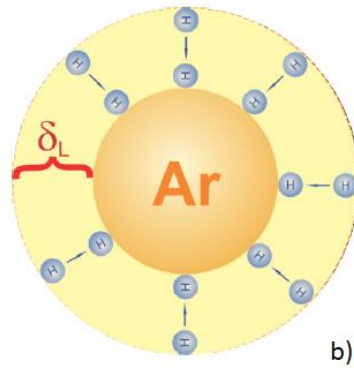
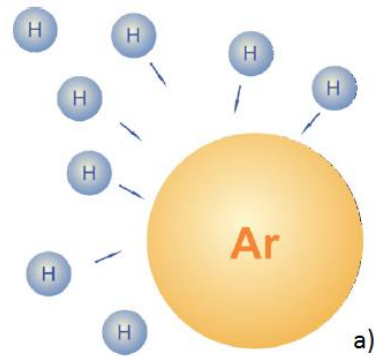
La desgasificación es un tratamiento de metal líquido. Existen tres métodos principales para lograr la remoción del hidrógeno del aluminio líquido:

- Desgasificación natural
- Desgasificación al vacío
- Desgasificación mediante la **inyección de gases** o polvos (reactivos o **no reactivos**)

De las técnicas mencionadas la más eficiente y estudiada es la de inyección de gases, polvos o escorias realizada mediante tapones porosos, lanzas o rotores.

De estos métodos, el uso de **rotores** es la técnica en donde se obtienen mejores resultados.

Introducción



Proceso de desgasificación de Al por inyección de Ar.

a) Transporte de H disuelto del seno del fluido a la burbuja de Ar por difusión y convección.

b) Transporte difusivo de H a través de la capa límite.

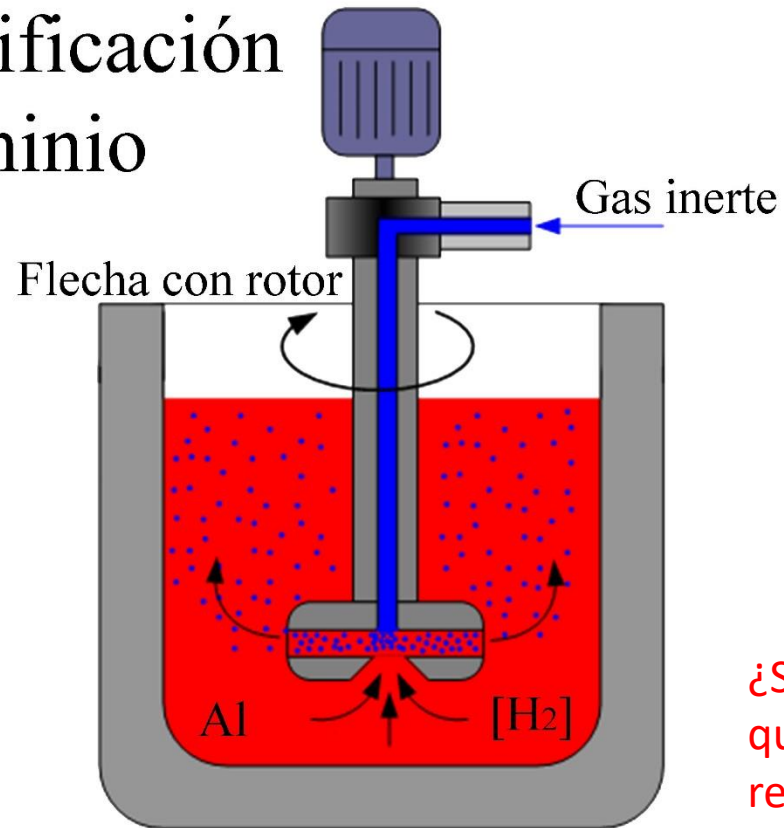
c) Proceso de adsorción - desorción en la superficie de la burbuja de Ar.

d) Difusión de H₂ dentro de la burbuja de Ar.

e) Remoción de H₂ del baño de Al.

Introducción

Desgasificación de aluminio



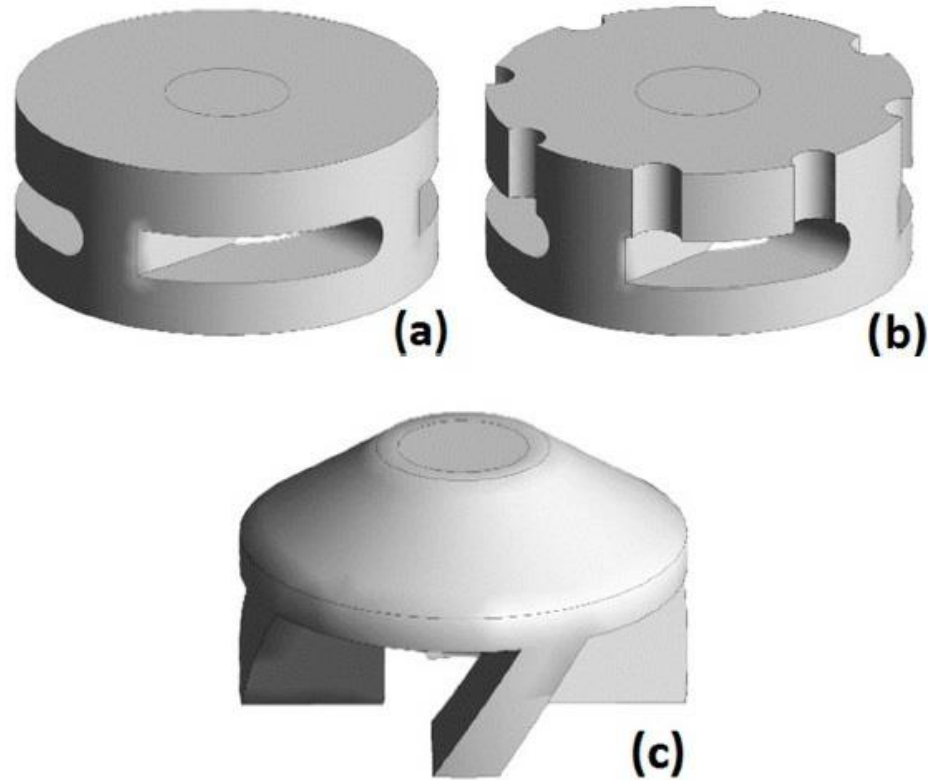
Balance macroscópico

$$E - S + G = Ac$$

- Materia
- Especies química
- Energía térmica
- Momentum

¿Será importante conocer que ocurre al interior del reactor?

Introducción



Abreu-López, D., Amaro-Villeda, A., Acosta-González, F. A., González-Rivera, C., & Ramírez-Argáez, M. A. (2017). [Effect of the impeller design on degasification kinetics using the impeller injector technique assisted by mathematical modeling](#). *Metals*, 7(4), 132.

En el artículo, los autores evalúan el efecto del diseño del rotor sobre la cinética de desgasificación del aluminio en un proceso de desgasificación mediante rotor-inyector.

Evalúan tres diseños:

- (a) Rotor A, diseño comercial
- (b) Rotor B, diseño comercial
- (c) Rotor C, propuesta nueva

Introducción

El estudio lo realizan mediante modelado matemático y modelado físico.

El modelado matemático considera un balance microscópico de momentum y transporte de masa en un sistema bifásico gas-líquido.

El **modelo matemático** consiste en un conjunto de ecuaciones que describen un sistema, en este caso se trata de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones que describen el sistema son denominadas **ecuaciones gobernantes**.

Conservación de masa para la fase líquida y la fase gaseosa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{v}_l) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{v}_g) = 0$$

Introducción

Ecuación de conservación de momentum para la fase líquida y la fase gaseosa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l \vec{v}_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{v}_l \vec{v}_l) = -\alpha_l \nabla P + \nabla \cdot \mu_{eff} \nabla \vec{v}_l \alpha_l + \alpha_l \rho_l \vec{g} + \vec{F}_{lg} + R_l$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \vec{v}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{v}_g \vec{v}_g) = -\alpha_g \nabla P + \nabla \cdot \mu_g \nabla \vec{v}_g \alpha_g + \alpha_g \rho_g \vec{g} + \vec{F}_{gl} + R_l$$

Donde los términos fuente debido al intercambio de momentum entre fases y la fuerza Coriolis son:

$$\vec{F}_{lg} = \vec{F}_{gl} = \vec{F}_{ij} = K_{ij}(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \qquad R_l = -2\alpha_l \rho_l \vec{N} \times \vec{v}_l - \alpha_l \rho_l \vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{r})$$

Siendo el coeficiente de intercambio gas-líquido:

$$K_{lg} = K_{gl} = \frac{\rho_g \eta_B C_f}{6\tau_g} d_g A_i$$

Introducción

Siendo además el tiempo de relajación de la partícula, el área de concentración interfacial y la función de arrastre respectivamente:

$$K_{lg} = K_{gl} = \frac{\rho_g \eta_B C_f}{6\tau_g} d_g A_i$$

$$\tau_g = \frac{\rho_g d_g^2}{18\mu_l}$$

$$A_i = \frac{6\alpha_g}{d_g}$$

$$C_f = \frac{C_D Re}{24}$$

Usando el modelo de Schiller-Naumann para el coeficiente de arrastre:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24(1+0.15Re^{0.687})}{Re} & Re \leq 1000 \\ 0.44 & Re > 1000 \end{cases}$$

Introducción

El modelo de turbulencia empleado es el modelo RNG κ - ε (energía cinética turbulenta, rapidez de disipación turbulenta):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l k) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l k \vec{v}_l) = \nabla \cdot (\alpha_l a_k \mu_{eff} \nabla k) + \alpha_l G_k - \alpha_l \rho_l \varepsilon + \alpha_l \Pi_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l \varepsilon) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \varepsilon \vec{v}_l) = \nabla \cdot (\alpha_l a_\varepsilon \mu_{eff} \nabla \varepsilon) + \alpha_l C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - \alpha_l C_{2\varepsilon} \rho_l \frac{\varepsilon^2}{k} - \alpha_l R_\varepsilon + \alpha_l \Pi_\varepsilon$$

Donde la viscosidad turbulenta y los términos fuente debido a la curvatura del modelo y la contribución de la fase discreta (modelo de Sato) se cuantifican como:

$$\mu_{t0} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

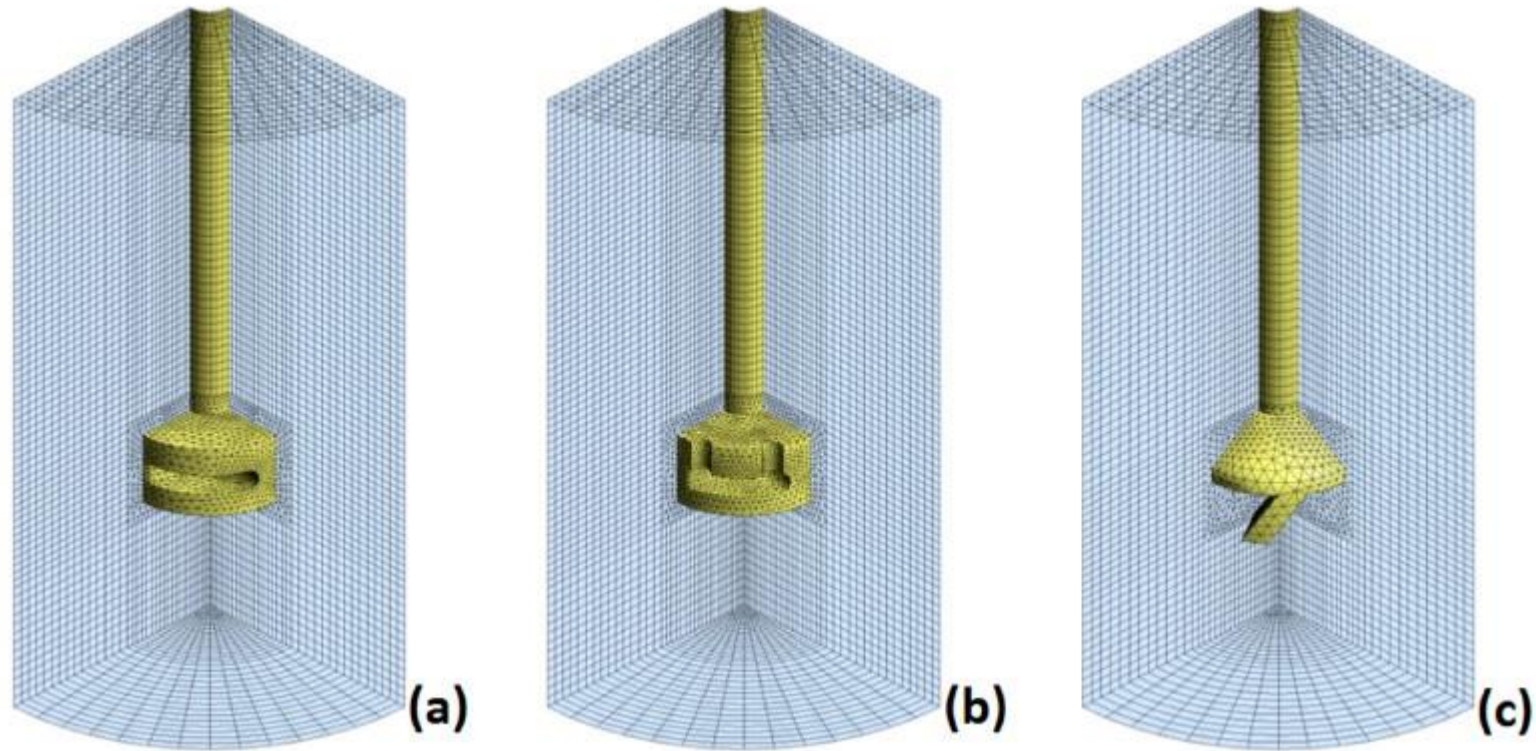
$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho_l \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}$$

$$\Pi_k = C_{k\varepsilon} \alpha_l K_{gl} \left| \vec{v}_g - \vec{v}_l \right|^2$$

$$\mu_t = \mu_{t0} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\varepsilon}\right)$$

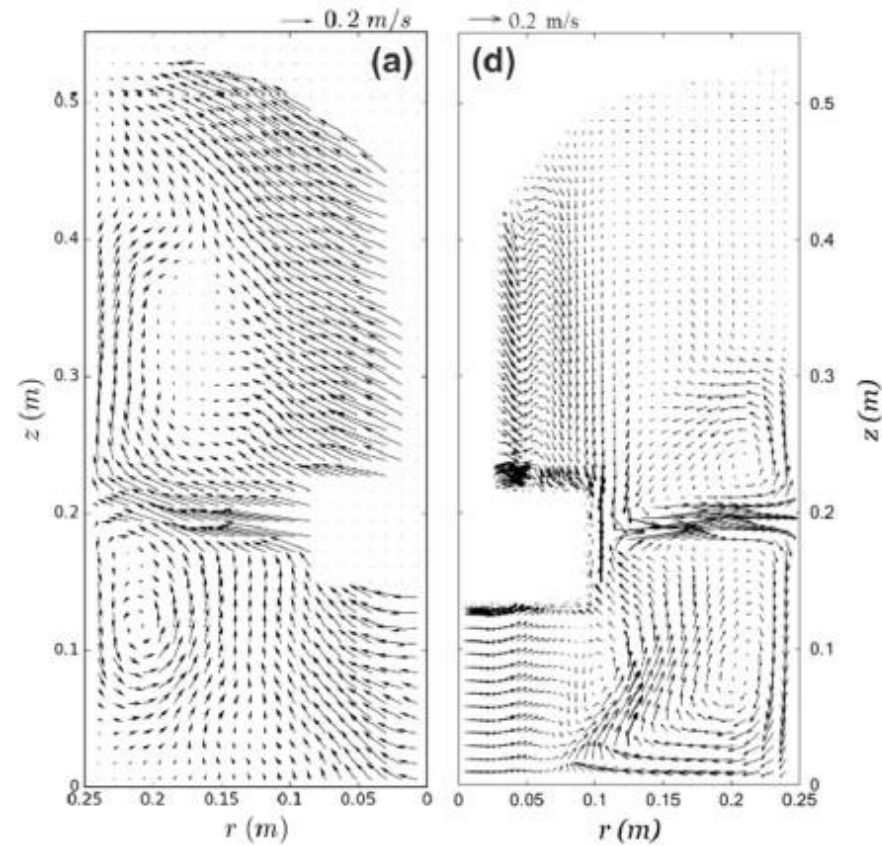
$$\Pi_\varepsilon = C_{td} \frac{1}{\tau_g} \Pi_k$$

Introducción



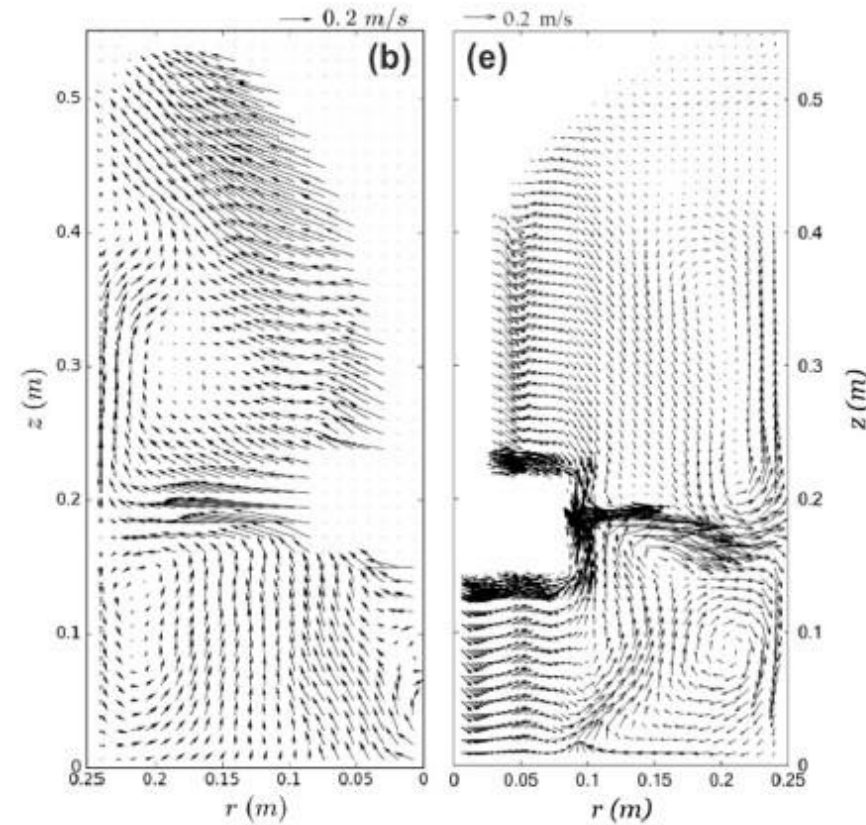
Mallas empleadas para resolver el sistema de ecuaciones planteado en el modelo matemático.

Introducción



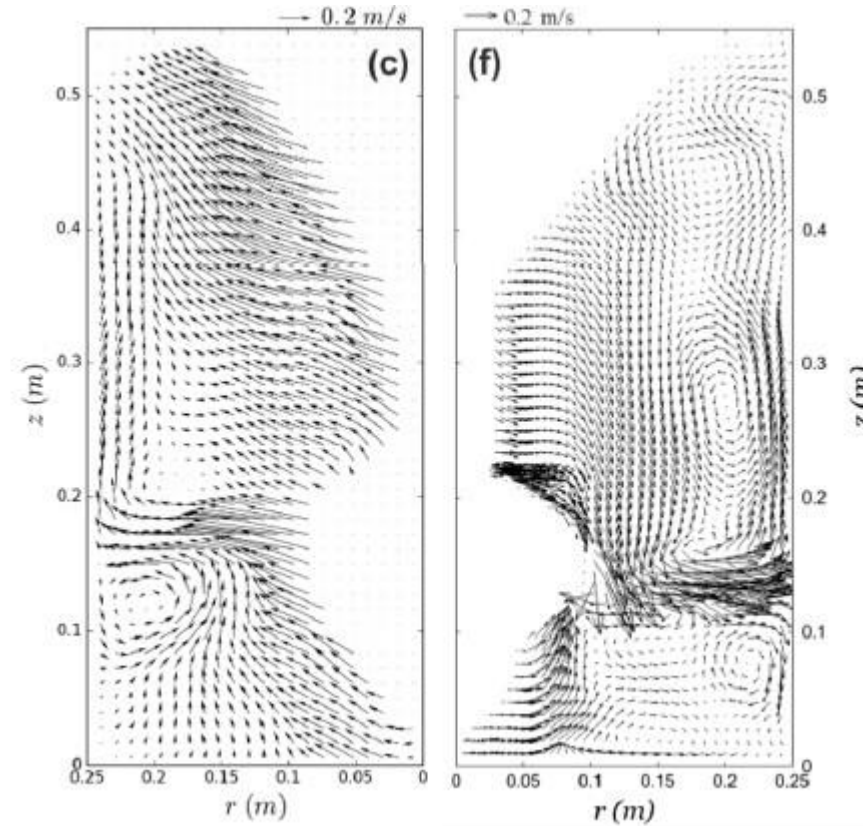
Patrones de flujo medidos (izquierda) y calculados (derecha) para el rotor A.

Introducción



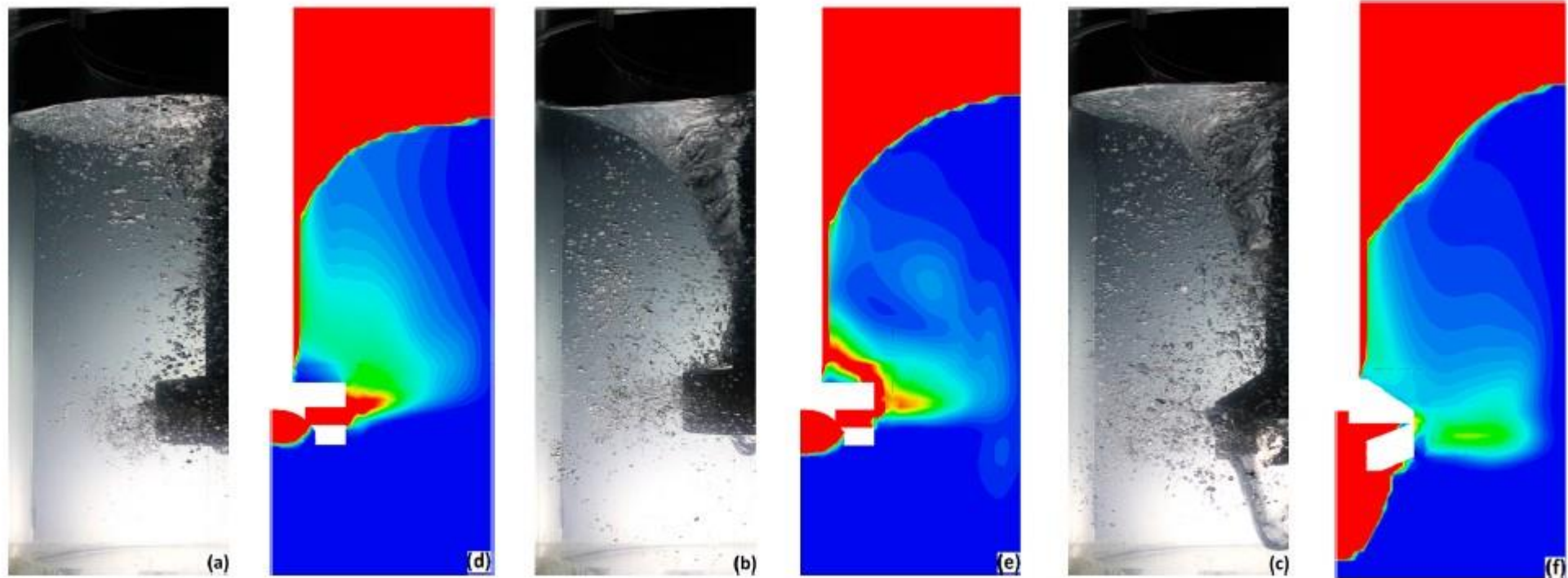
Patrones de flujo medidos (izquierda) y calculados (derecha) para el rotor B.

Introducción



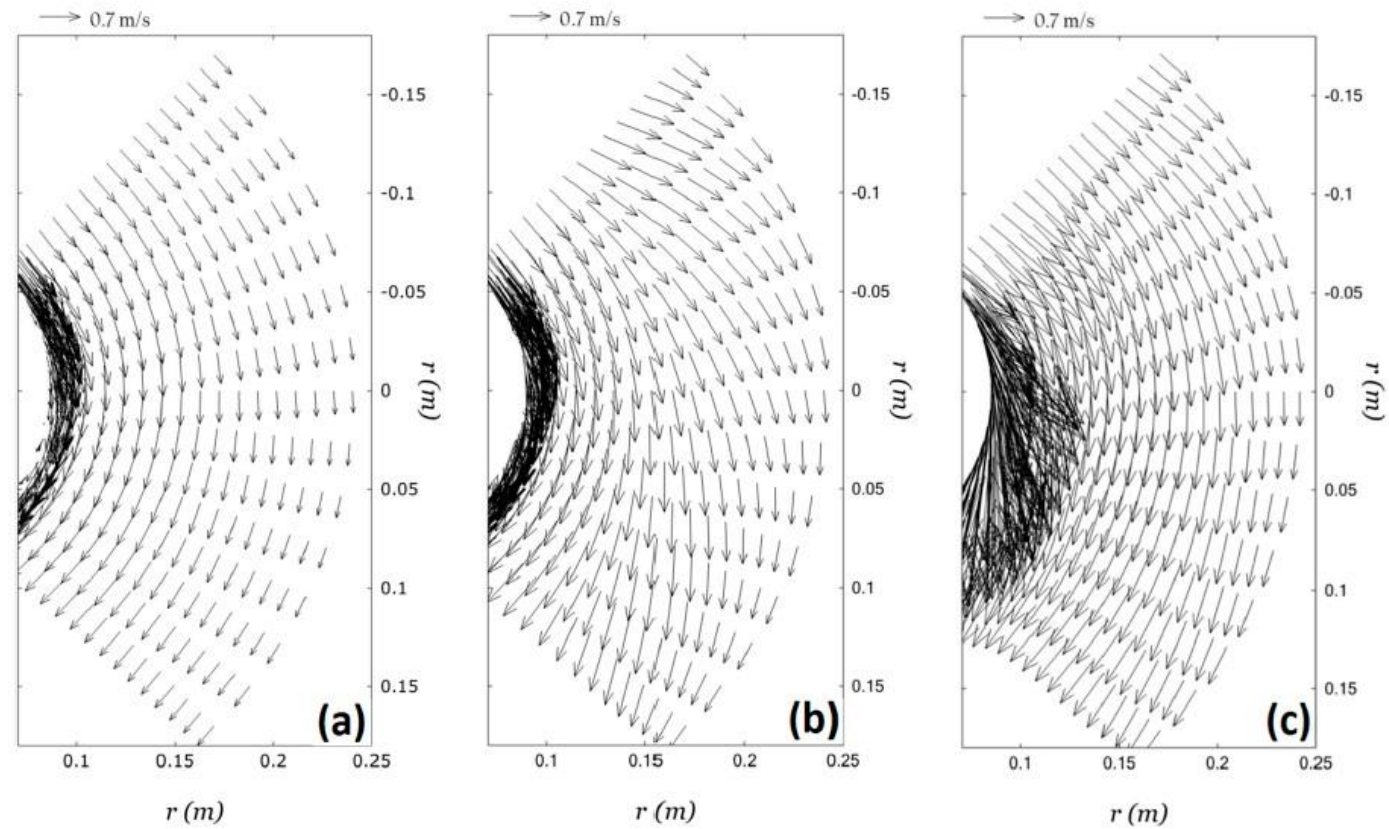
Patrones de flujo medidos (izquierda) y calculados (derecha) para el rotor C.

Introducción



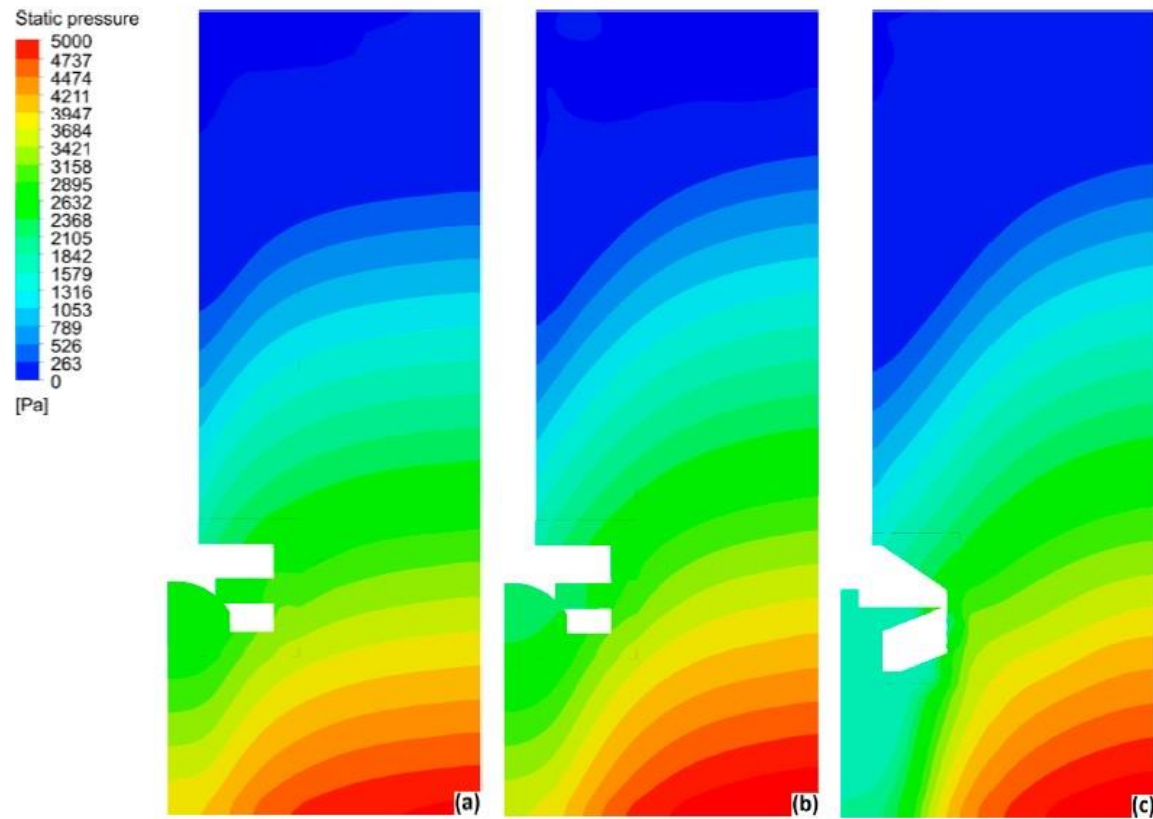
Fracción de gas medida y calculada.

Introducción



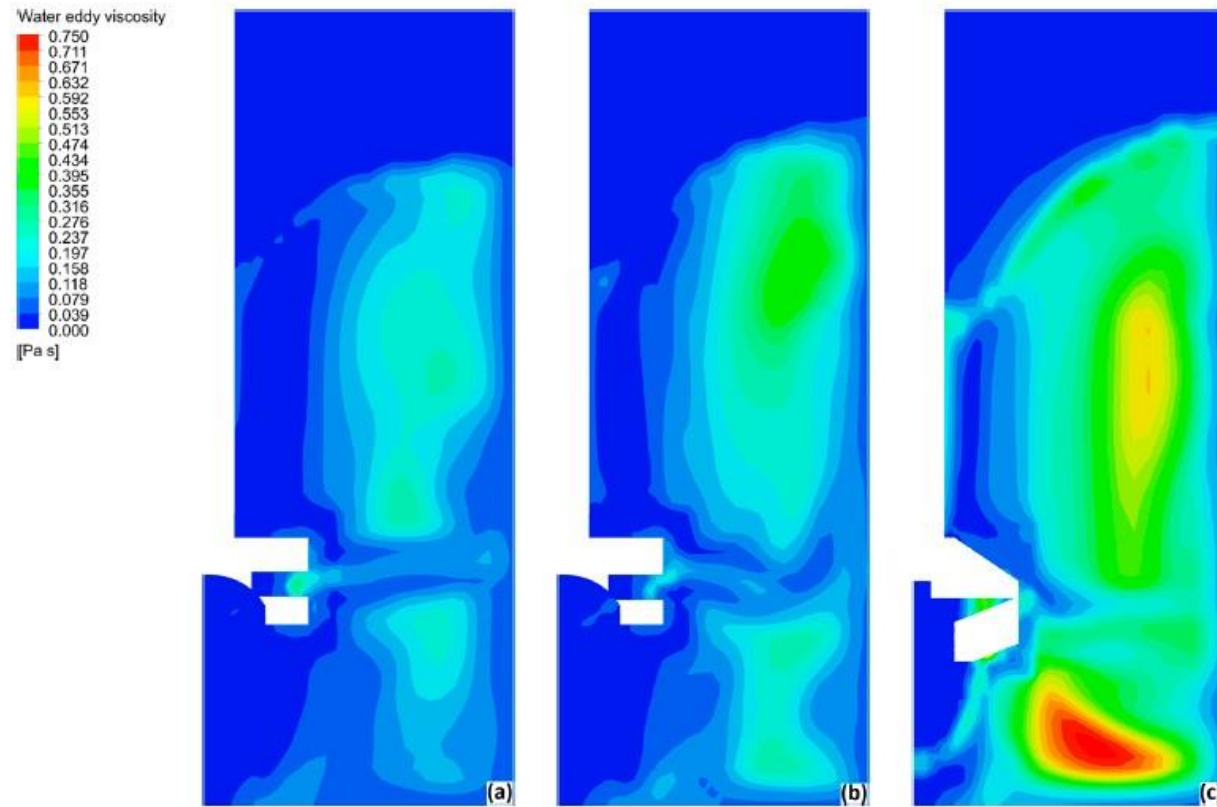
Velocidad angular calculada a la altura del rotor.

Introducción



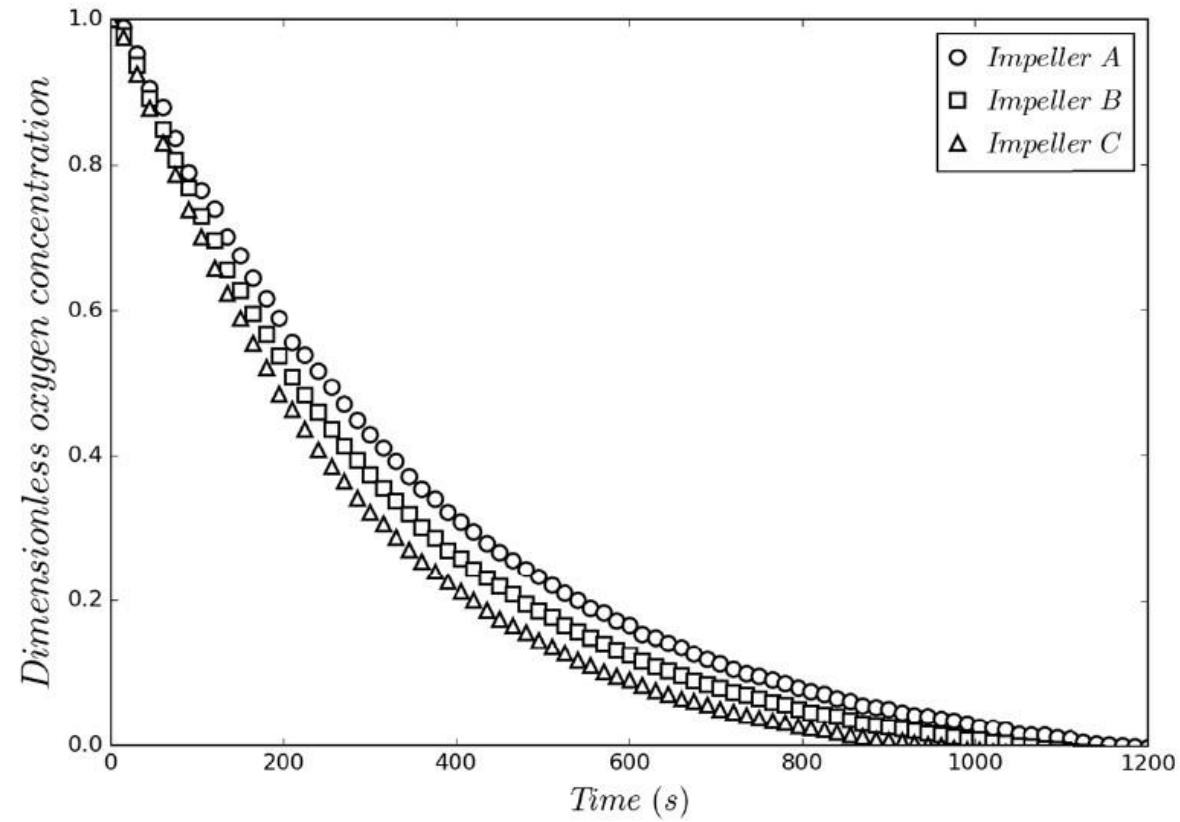
Contornos de presión.

Introducción



Contornos de viscosidad de Eddy (viscosidad turbulenta).

Introducción



Cinética de desgasificación medida experimentalmente.

Introducción

Los **fenómenos de transporte** involucran el estudio de **intercambios** de **masa**, **energía**, carga, **momento** o alguna cantidad similar, entre un sistema y sus alrededores o dentro del mismo sistema.

En el caso particular del **transporte de momentum**, lo más importante es comprender el **movimiento de un fluido** y las **fuerzas** que lo provocan.

El uso de un modelo macroscópico o microscópico depende del objetivo que se persiga, si no es necesario observar el transporte de alguna cantidad dentro del sistema un balance macroscópico es suficiente, si por el contrario se quiere conocer como se transportan dentro del sistema determinadas cantidades es necesario realizar un balance microscópico.

Introducción

Szekely, J. (2012). *Fluid flow phenomena in metals processing*. Elsevier.

Szekely, J., & Luis Gerardo Trapaga M. (1988). *Fenómenos de Flujo de Fluidos en Procesamiento de metales*. Limusa.

Daily, J. W., & Harleman, D. R. (1969). *Dinámica de los fluidos*. Editorial F. Trillas S. A.

Gaskell, D. (2012). *An introduction to transport phenomena in materials engineering*. Momentum Press.

Poirier, D. R., & Geiger, G. (Eds.). (2016). *Transport phenomena in materials processing*. Springer.

Iguchi, M., & Ilegbusi, O. J. (2014). *Basic transport phenomena in materials engineering* (Vol. 260). Springer.

Welty, J. R., Wicks, C. E., Rorrer, G., & Wilson, R. E. (2009). *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*. John Wiley & Sons.

Yunus, A. C. (2010). *Fluid Mechanics: Fundamentals And Applications (Si Units)*. Tata McGraw Hill Education Private Limited.

Hong, C. P. (2019). *Computer modelling of heat and fluid flow in materials processing*. CRC press.

Introducción

Szekely, J. (2012). *Fluid flow phenomena in metals processing*. Elsevier.

Szekely, J., & Luis Gerardo Trapaga M. (1988). *Fenómenos de Flujo de Fluidos en Procesamiento de metales*. Limusa.

Daily, J. W., & Harleman, D. R. (1969). *Dinámica de los fluidos*. Editorial F. Trillas S. A.

Gaskell, D. (2012). *An introduction to transport phenomena in materials engineering*. Momentum Press.

Poirier, D. R., & Geiger, G. (Eds.). (2016). *Transport phenomena in materials processing*. Springer.

Iguchi, M., & Ilegbusi, O. J. (2014). *Basic transport phenomena in materials engineering* (Vol. 260). Springer.

Welty, J. R., Wicks, C. E., Rorrer, G., & Wilson, R. E. (2009). *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*. John Wiley & Sons.

Yunus, A. C. (2010). *Fluid Mechanics: Fundamentals And Applications (Si Units)*. Tata McGraw Hill Education Private Limited.

Hong, C. P. (2019). *Computer modelling of heat and fluid flow in materials processing*. CRC press.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

Desde el punto de vista de la ingeniería química metalúrgica, existen tres fenómenos de transporte que nos interesan principalmente: el transporte de energía térmica, el transporte de especies químicas y el transporte de momentum, cada uno teniendo sus mecanismos físicos para transportar la cantidad de interés:

- Transporte de calor

- Conducción
- Convección
- Radiación

- Transporte de masa

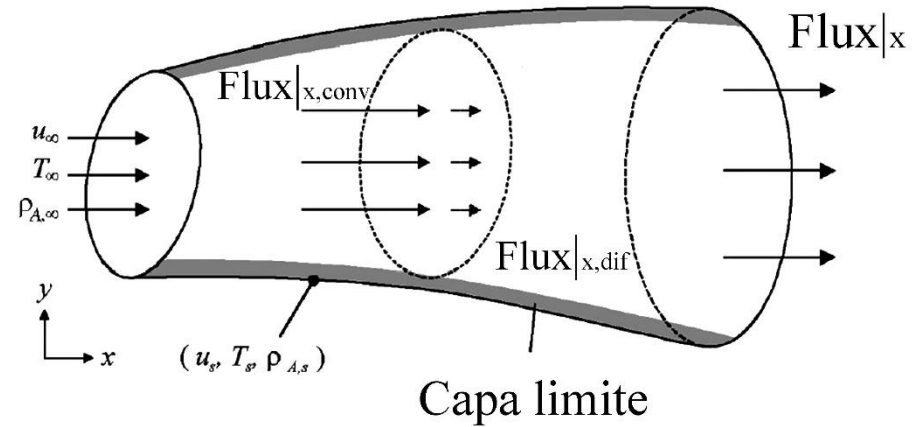
- Difusión
- Convección

- Transporte de momentum

- Difusión (Transporte Viscoso)
- Convección

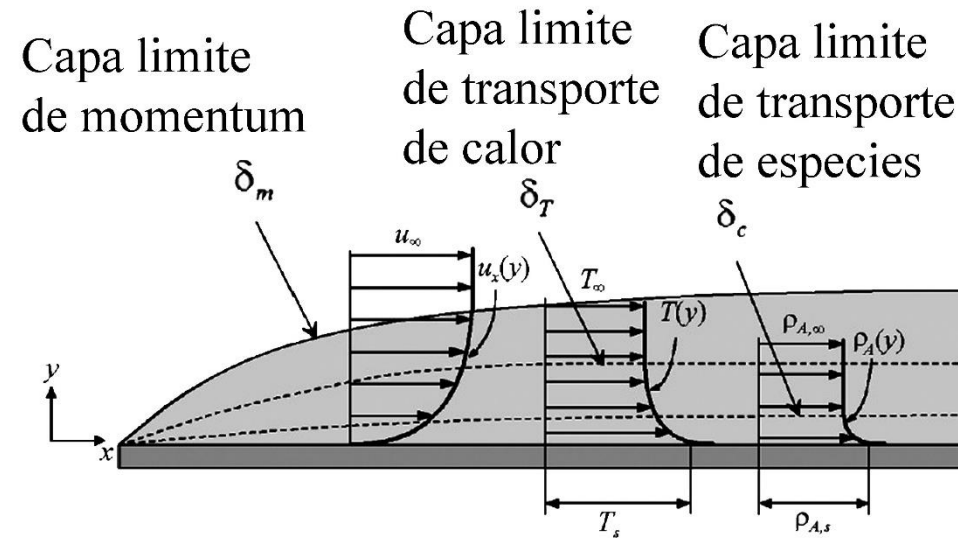
Mecanismos de los fenómenos de transporte

Capa limite



Mecanismos de los fenómenos de transporte

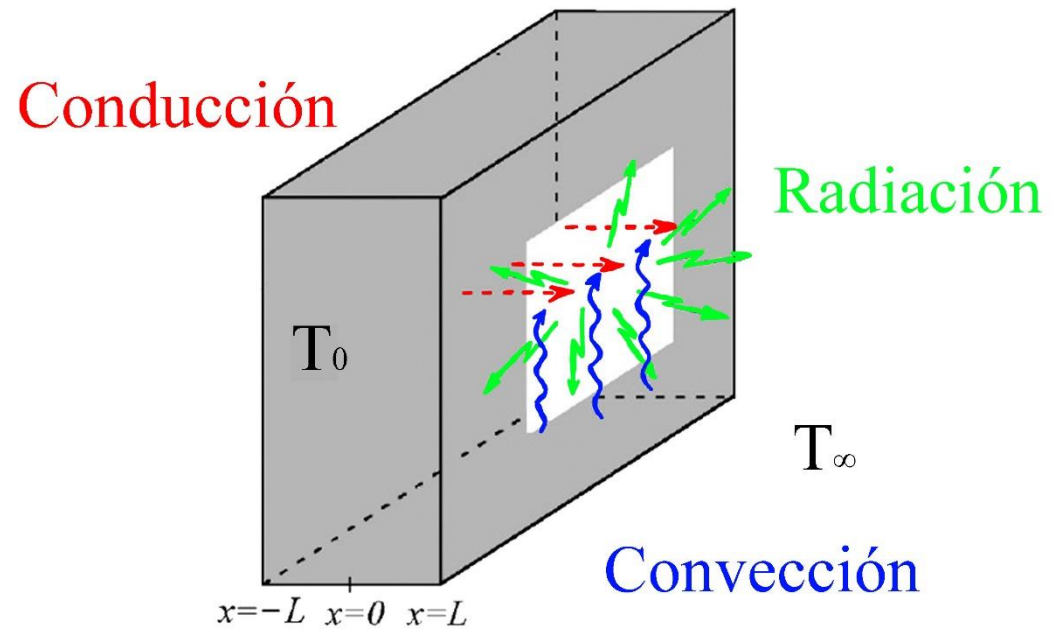
Capa limite



El movimiento de un fluido, puede ser debido a **fuerzas externas**, en cuyo caso se tendrá **convección forzada**, o debido a **factores internos**, como diferencia de concentración o temperatura dentro del mismo, en cuyo caso se tiene **convección natural**.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

Mecanismos de transporte de calor

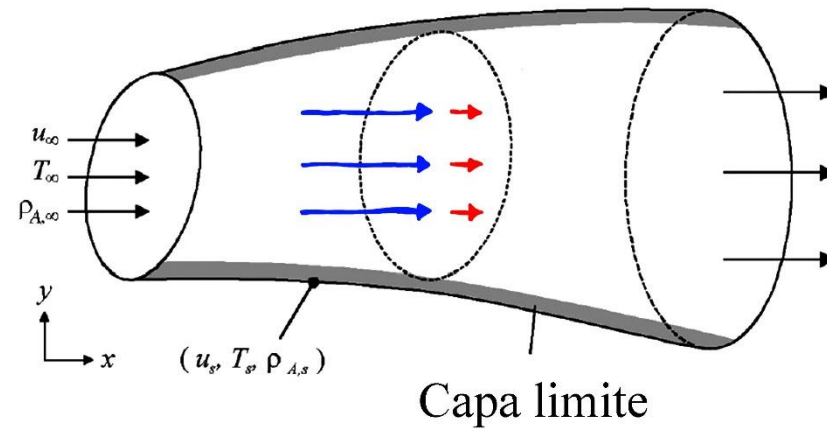


Mecanismos de los fenómenos de transporte

Mecanismos de transporte de calor

Convección

Conducción



Mecanismos de los fenómenos de transporte

El transporte de calor por **conducción** en una sola dirección se puede calcular mediante la **ley de Fourier**:

$$q_{cond,x} = -k \frac{dT}{dx}$$

Donde:

$q_{cond,x}$ es el flux de calor por conducción en la dirección x , k es la conductividad térmica, T es la temperatura y x es la posición.

La ley de Fourier en forme vectorial es la siguiente:

$$q = -k \nabla T$$

O bien:

$$q = -\alpha \nabla \rho C_p T$$

Donde: α es la difusividad térmica, ρ es la densidad y C_p es la capacidad calorífica.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

El transporte de calor por **convección** dentro de un **fluido** se puede calcular de la siguiente manera:

$$q_{conv} = \rho C_p T_\infty \bar{v}_\infty$$

Donde:

q_{conv} es el flux de calor por convección en el seno del fluido, ρ es la densidad del fluido, C_p es la capacidad calorífica del fluido, T_∞ es la temperatura en el seno del fluido y \bar{v}_∞ es la velocidad media del fluido.

Por lo que el flux total de calor en un fluido se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$q = -k\nabla T + \rho C_p T_\infty \bar{v}_\infty$$

Mecanismos de los fenómenos de transporte

En el caso de que exista flujo de calor entre una **superficie sólida y un fluido**, es decir, que nos encontremos dentro de la capa límite, el flux de calor **convectivo** se puede calcular de la siguiente manera:

$$q_{conv} = -h(T_s - T_\infty)$$

Donde:

q_{conv} es el flux de calor convectivo entre la superficie sólida y el fluido, h es el coeficiente de calor por convección, T_s es la temperatura de la superficie sólida y T_∞ es la temperatura del seno del fluido.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

El máximo flujo de calor debido a la **radiación** que emite un cuerpo se puede calcular mediante la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$E_b = \sigma T_s^4$$

Donde:

E_b es la emisividad de un cuerpo negro, T_s es la temperatura de la superficie y σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

El flux de calor por radiación se puede calcular entonces como:

$$q_{rad} = -\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{sur}^4)$$

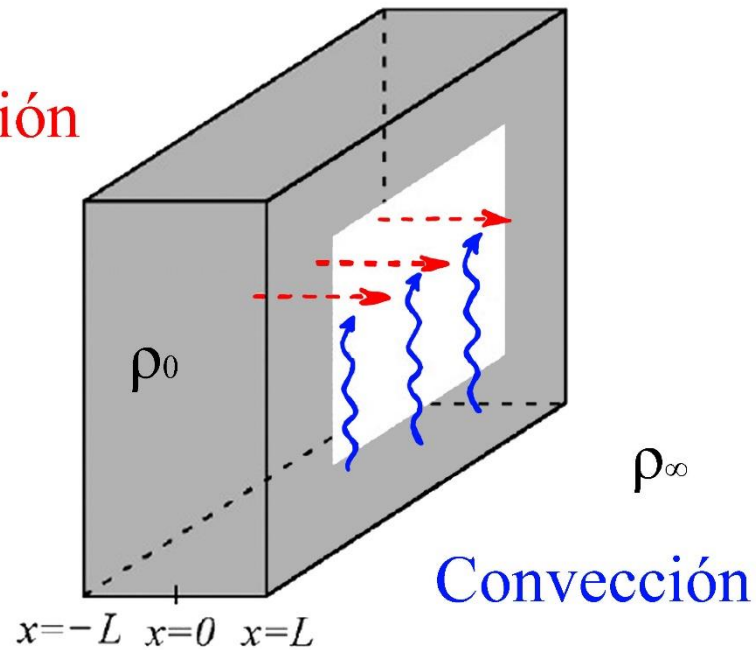
Donde:

ε es la emisividad de una superficie real, cuyo valor varia de 0 a 1, y T_{sur} es la temperatura de las superficies que rodean al sistema.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

Mecanismos de transporte de masa

Difusión

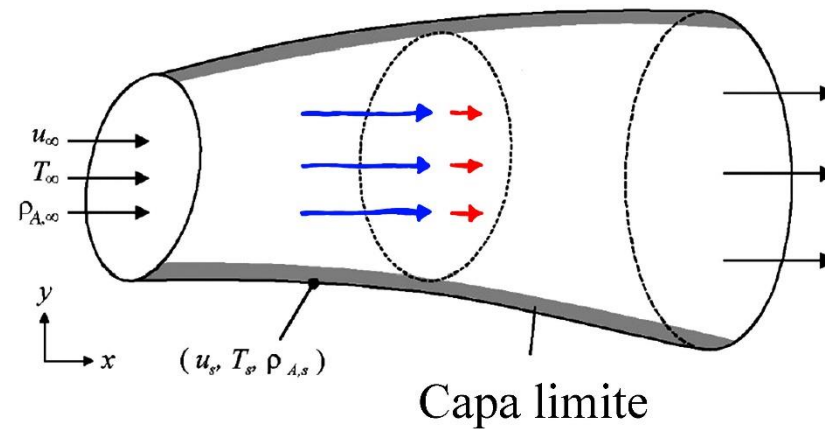


Mecanismos de los fenómenos de transporte

Mecanismos de transporte de masa

Convección

Difusión



Mecanismos de los fenómenos de transporte

La transferencia de especies químicas por **difusión** se puede cuantificar mediante la **ley de Fick**:

$$j_A = -D_{AB} \nabla \rho_A$$

Donde:

j_A es el flux másico de la especie A, D_{AB} es el coeficiente de difusión de A en B y ρ_A es la concentración másica de A.

También se puede escribir de forma molar como:

$$J_A = -D_{AB} \nabla C_A$$

Donde:

J_A es el flujo molar de la especie A y C_A es la concentración molar de A.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

En el caso del flux **convectivo**, este se puede cuantificar dentro de un **fluido** en unidades másicas:

$$n_{A,conv} = \rho_{A,\infty} \bar{v}_{\infty}$$

O molares:

$$N_{A,conv} = C_{A,\infty} \bar{v}_{\infty}$$

Donde:

$n_{A,conv}$ y $N_{A,conv}$ son los fluxes de la especie A debido a la convección en unidades másicas y molares respectivamente, $\rho_{A,\infty}$ es la concentración másica de la especie A en el seno del fluido, $C_{A,\infty}$ es la concentración molar de la especie A en el seno del fluido y \bar{v}_{∞} es la velocidad promedio del fluido.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

En el caso de que exista transporte **convectivo** entre una **superficie sólida y un fluido** se puede calcular en unidades másicas como:

$$n_{A,conv} = -K_C(\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty})$$

O en unidades molares como:

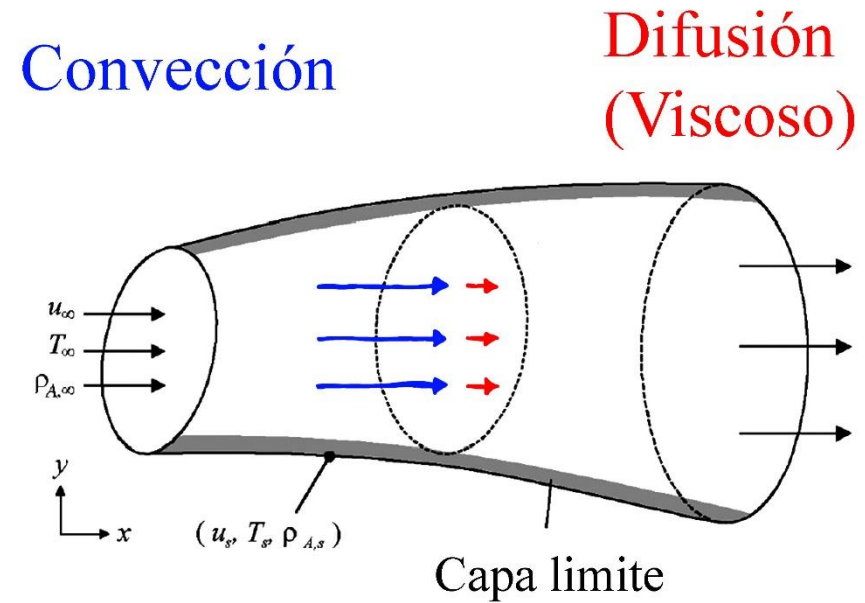
$$N_{A,conv} = -K_C(C_{A,s} - C_{A,\infty})$$

Donde:

$\rho_{A,s}$ es la concentración másica de la especie A en la superficie sólida, $C_{A,s}$ es la concentración molar de la especie A y K_C es el coeficiente de transferencia de masa de la especie A por convección.

Mecanismos de los fenómenos de transporte

Mecanismos de transporte de momentum



Mecanismos de los fenómenos de transporte

El transporte de momentum viscoso se puede expresar mediante la ley de la viscosidad de Newton:

$$\bar{\tau} = -\nu \nabla \rho \vec{v}$$

Donde:

$\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos, $\rho \vec{v}$ es el momento del fluido y ν es la viscosidad cinemática, también llamada difusividad de momentum.

Otra forma de encontrarla para fluidos incompresibles, en función de la viscosidad dinámica (μ) es:

$$\bar{\tau} = -\mu \nabla \vec{v}$$

Mecanismos de los fenómenos de transporte

El transporte de momentum **convectivo** se puede calcular en un **fluido** de la siguiente manera:

$$\pi_{conv} = (\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v})$$

Donde:

π_{conv} es el flux convectivo de momentum.

Mientras que si se trata de un flux **convectivo** de momentum en la frontera de una **superficie sólida y un fluido** se puede calcular de la siguiente manera:

$$\pi_{conv} = -C'_f(\bar{v}_s - \bar{v}_\infty)$$

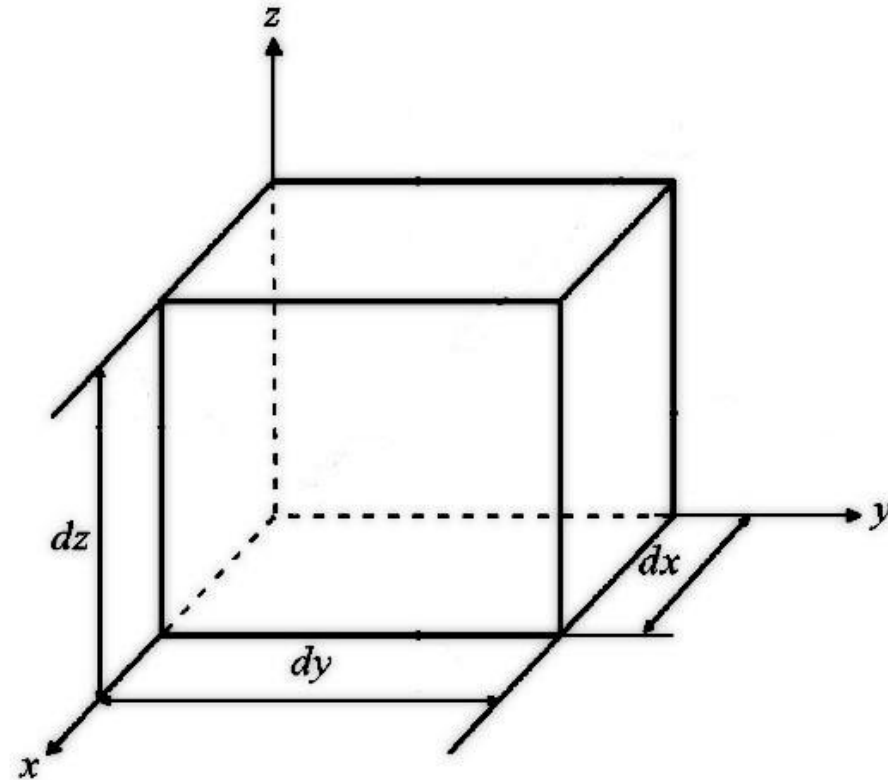
Donde:

C'_f es el coeficiente de transporte de momentum por convección, \bar{v}_∞ es la velocidad en el seno del fluido y \bar{v}_s es la velocidad superficial.

Similitudes entre los fenómenos de transporte

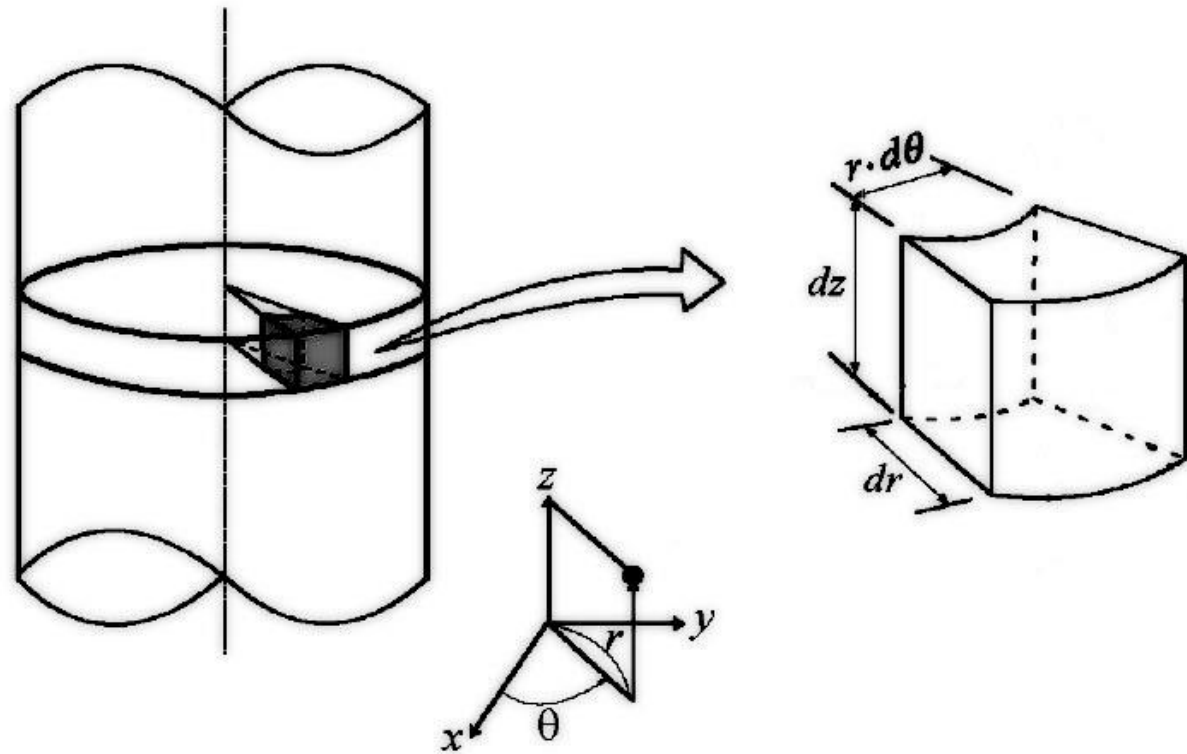
Transporte	Masa	Calor	Especies químicas	Momentum
Cantidad transportada (Fuerza motriz)	Materia	Energía interna Temperatura	Potencial químico Composición	Momento Presión, Tensión, Etc...
Mecanismos de transporte	Difusión Convección	Conducción Convección Radiación	Difusión Convección	Difusión (Viscoso) Convección
Difusividad [m ² /s]	----	$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$	D_{AB}	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$
Coefficiente convectivo	----	h	K_C	C'_f
Ecuación diferencial	Vectorial	Vectorial	Vectorial	Tensorial

Similitudes entre los fenómenos de transporte



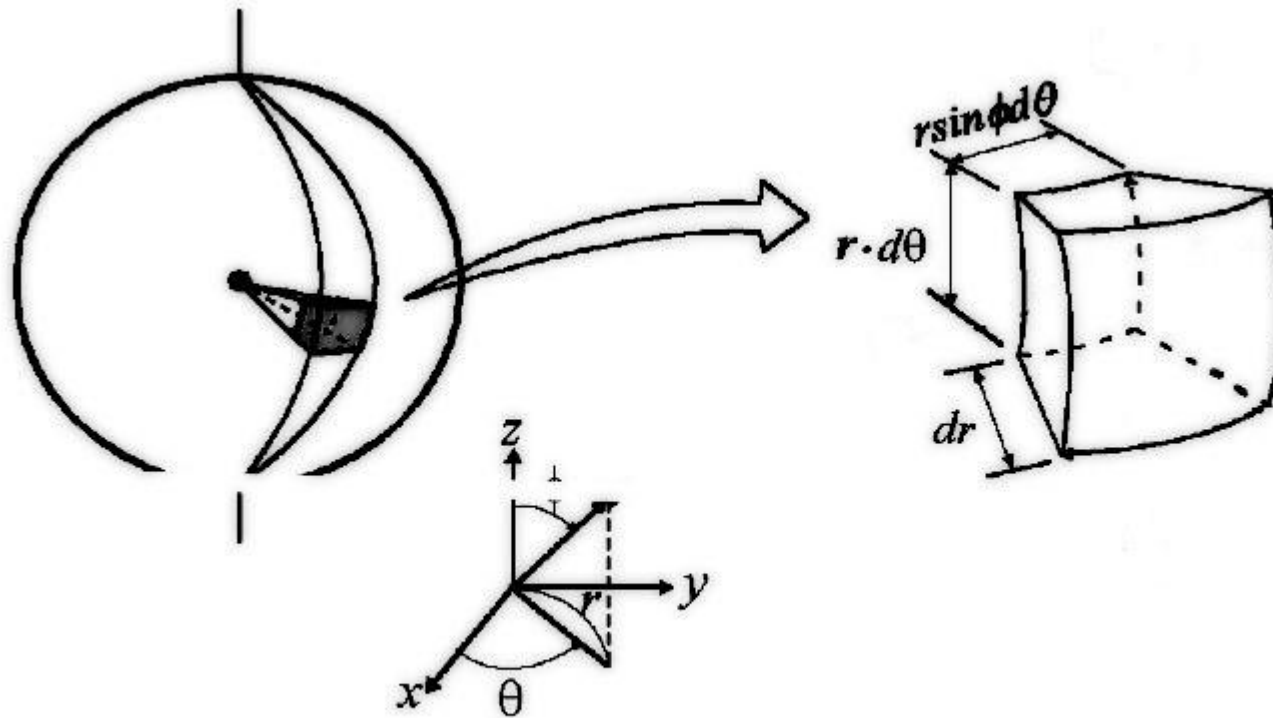
Coordenadas cartesianas

Similitudes entre los fenómenos de transporte



Coordenadas cilíndricas

Similitudes entre los fenómenos de transporte



Coordenadas esféricas

Similitudes entre los fenómenos de transporte

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho u_\phi) = 0$$

Ecuación de conservación de materia (continuidad)

Similitudes entre los fenómenos de transporte

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\rho C_v \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + \dot{g}$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\rho C_v \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{g}$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\begin{aligned} \rho C_v \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right\} \\ = \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \dot{g} \end{aligned}$$

Ecuación de conservación de calor

Similitudes entre los fenómenos de transporte

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\left\{ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho_A}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho_A}{\partial z} \right\} = D_{AB} \left\{ \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial z^2} \right\} + r_A$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\left\{ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho_A}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial \rho_A}{\partial z} \right\} = D_{AB} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial z^2} \right] + r_A$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\left\{ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho_A}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho_A}{\partial \phi} \right\} \\ = D_{AB} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial \phi^2} \right] + r_A$$

Ecuación de conservación de masa

Similitudes entre los fenómenos de transporte

x-component:

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right\} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

y-component:

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right\} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

z-component:

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Ecuación de conservación de momentum (coordenadas cartesianas)

Similitudes entre los fenómenos de transporte

r -component:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right\} \\ & = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \end{aligned}$$

θ -component:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right\} \\ & = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \end{aligned}$$

z -component:

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Ecuación de conservación de momentum (coordenadas cilíndricas)

Similitudes entre los fenómenos de transporte

r -component:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right\} \\ & = \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \end{aligned}$$

θ -component:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right\} \\ & = \mu \left[\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \end{aligned}$$

ϕ -component:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right\} \\ & = \mu \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho g_\phi \end{aligned}$$

Ecuación de conservación de momentum (coordenadas esféricas)

Ecuaciones diferenciales en flujo de fluidos laminar

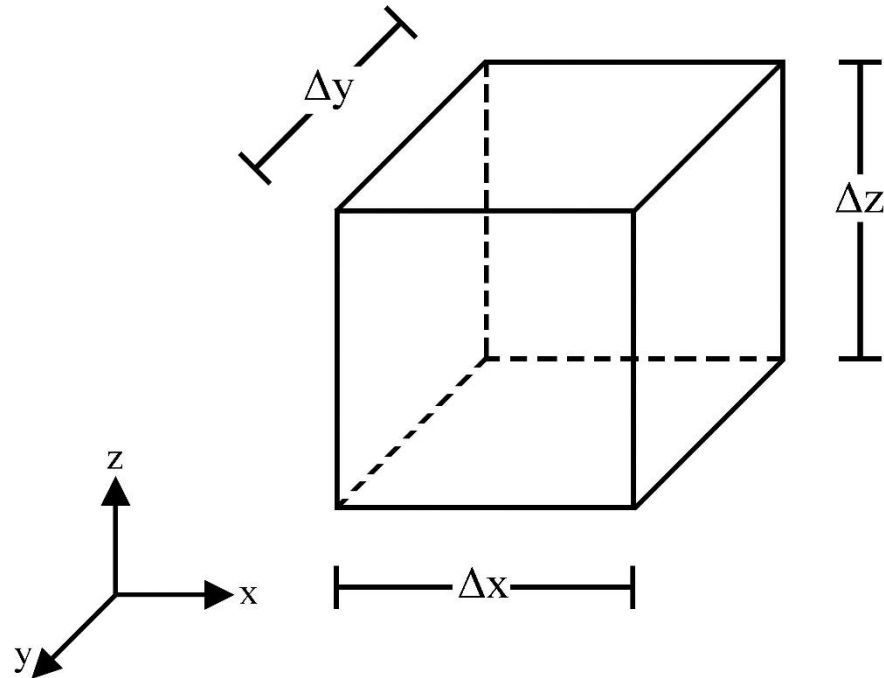
Aunque existen muchos casos en los que un balance macroscópico es útil y da información del proceso, existen mucho otros en donde se requiere información más detallada del mismo y que no es posible obtener mediante una aproximación macroscópica.

Por ejemplo obtener el campo de velocidades, el patrón de flujo, o bien un gradiente de presión, temperatura o concentración dentro del sistema. En estos caso una aproximación **microscópica** nos permite obtener este tipo de datos, en estos casos la formulación de un modelo matemático mediante el uso de **ecuaciones diferenciales** nos brindará la posibilidad de obtener dicha información.

En el caso particular de que el interés del modelo sea conocer la **dinámica de fluidos** del sistema, las ecuaciones gobernantes que se emplean en un **flujo laminar**, son la ecuación diferencial de conservación de masa (**ecuación de continuidad**) y la ecuación diferencial de conservación de momentum (**ecuación de Navier-Stokes**).

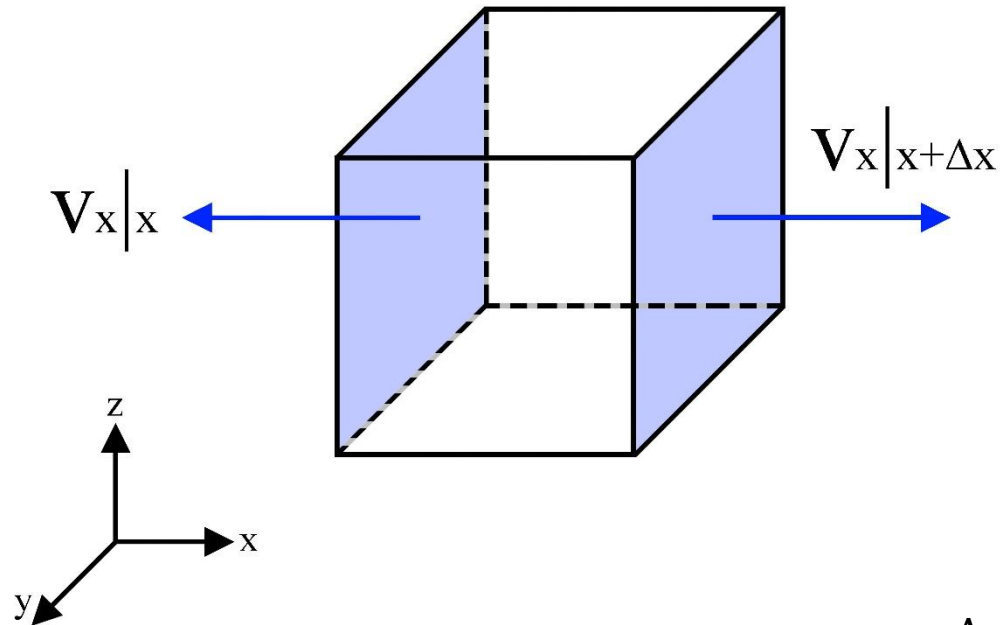
Ecuación de continuidad

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$$



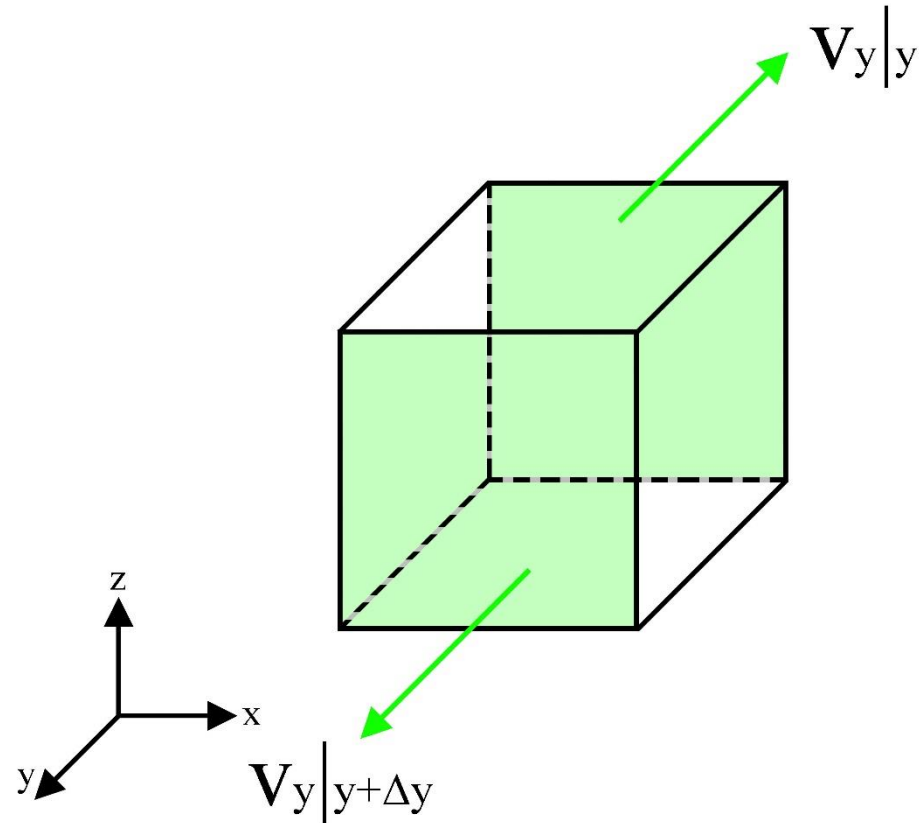
$$E - S = Ac$$

Ecuación de continuidad



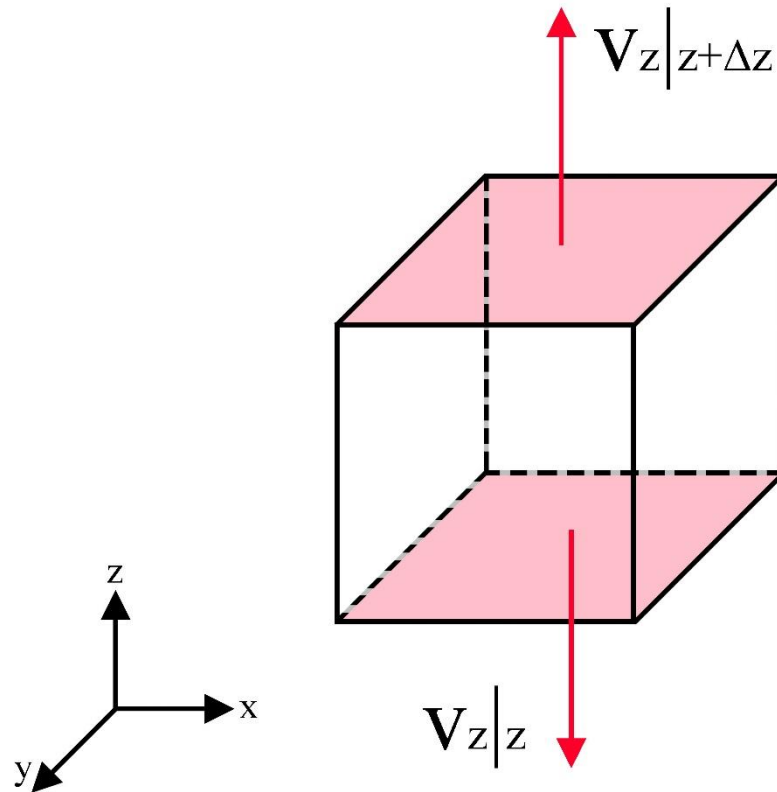
$$\Delta y \Delta z \rho v_x|_x - \Delta y \Delta z \rho v_x|_{x+\Delta x} \quad E - S$$

Ecuación de continuidad



$$\Delta x \Delta z \rho v_y|_y - \Delta x \Delta z \rho v_y|_{y+\Delta y} \quad E - S$$

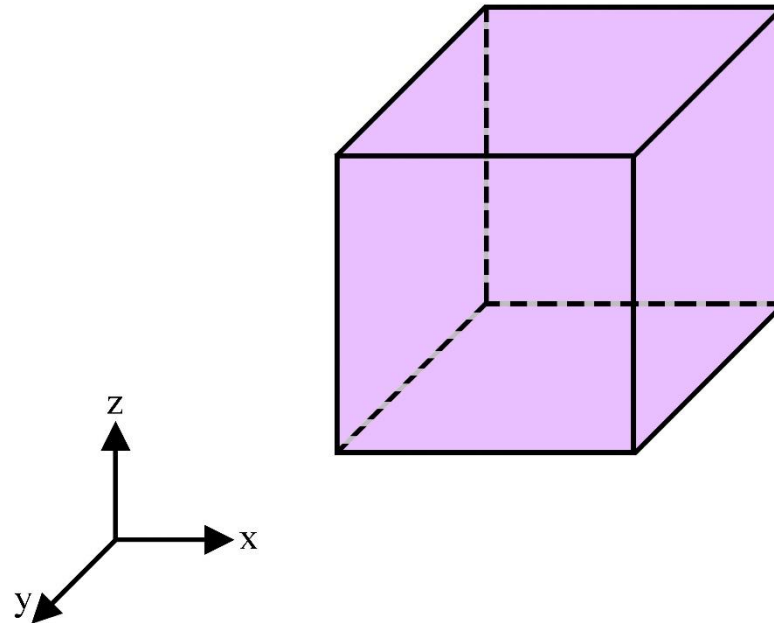
Ecuación de continuidad



$$\Delta x \Delta y \rho v_z|_z - \Delta x \Delta y \rho v_z|_{z+\Delta z} \quad E - S$$

Ecuación de continuidad

Acumulación



$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de continuidad

$$E - S = Ac$$

$$\Delta y \Delta z [\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}] = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si dividimos todo entre el volumen ($\Delta x \Delta y \Delta z$):

$$\frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Considerando que $\Delta x, \Delta y, y \Delta z \rightarrow 0$, podemos escribir de forma diferencial los términos correspondientes a entradas y salidas:

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Que es la **ecuación diferencial de balance de materia** o **ecuación de continuidad** en coordenadas cartesianas.

Ecuación de Navier-Stokes

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \bar{v})$$

En estado estacionario la ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

Y si consideramos un fluido incompresible tiene la forma:

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes

Ecuación de continuidad (conservación de masa) en coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de continuidad (conservación de masa) en coordenadas cilíndricas (r, θ , z):

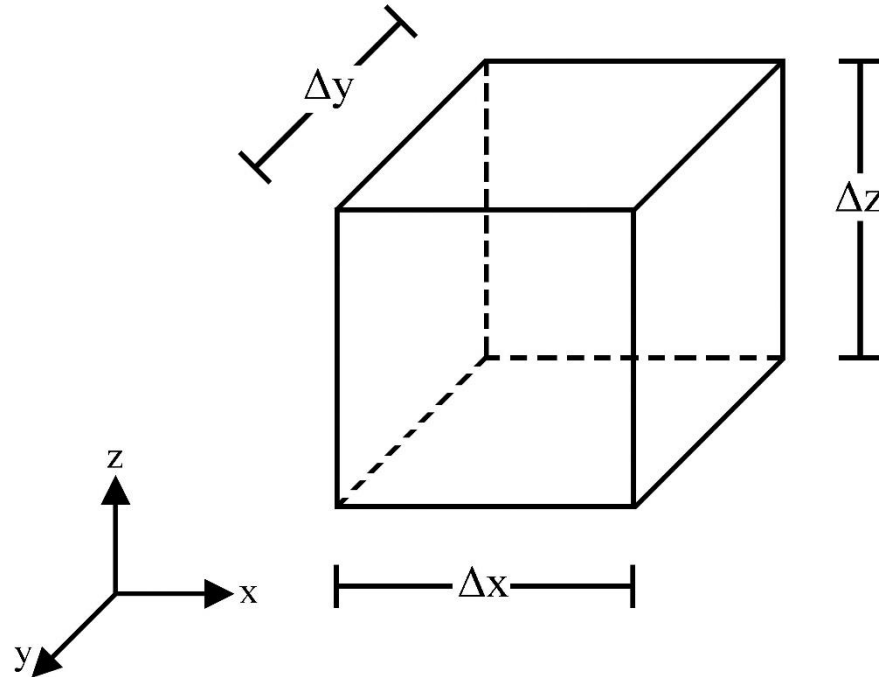
$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de continuidad (conservación de masa) en coordenadas esféricas (r, θ , ϕ):

$$-\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

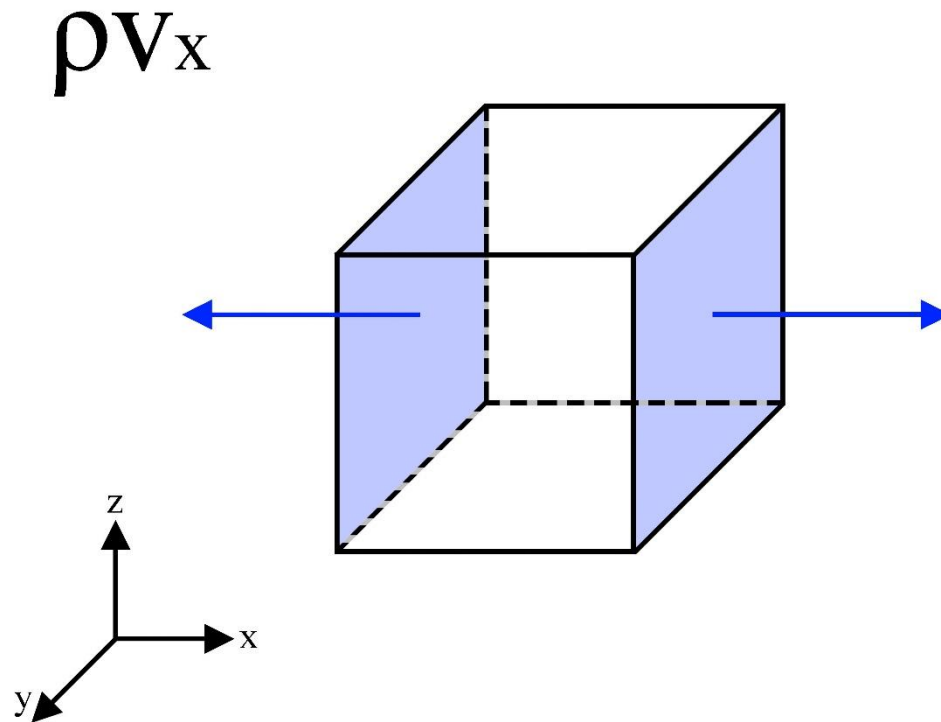
Ecuación de Navier-Stokes

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$

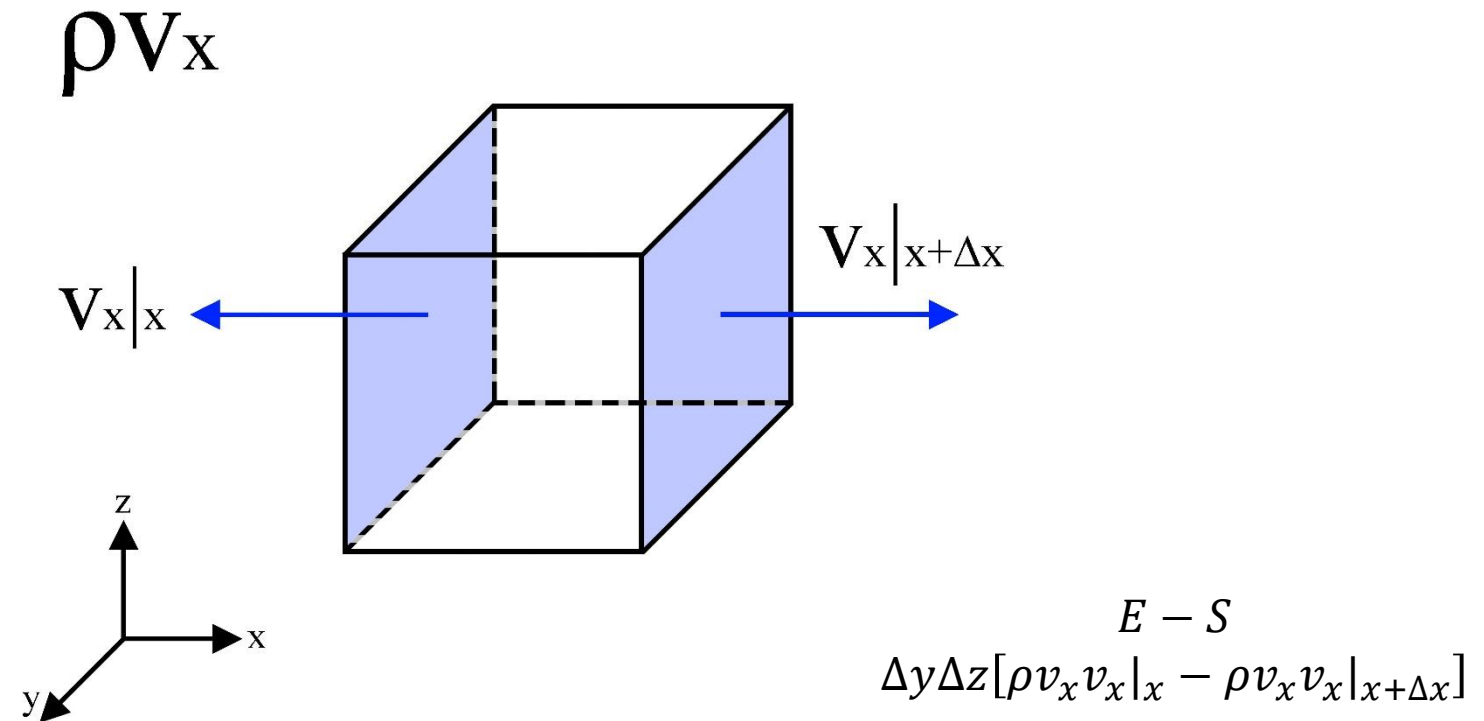


$E - S + G = Ac$
Solo en dirección x

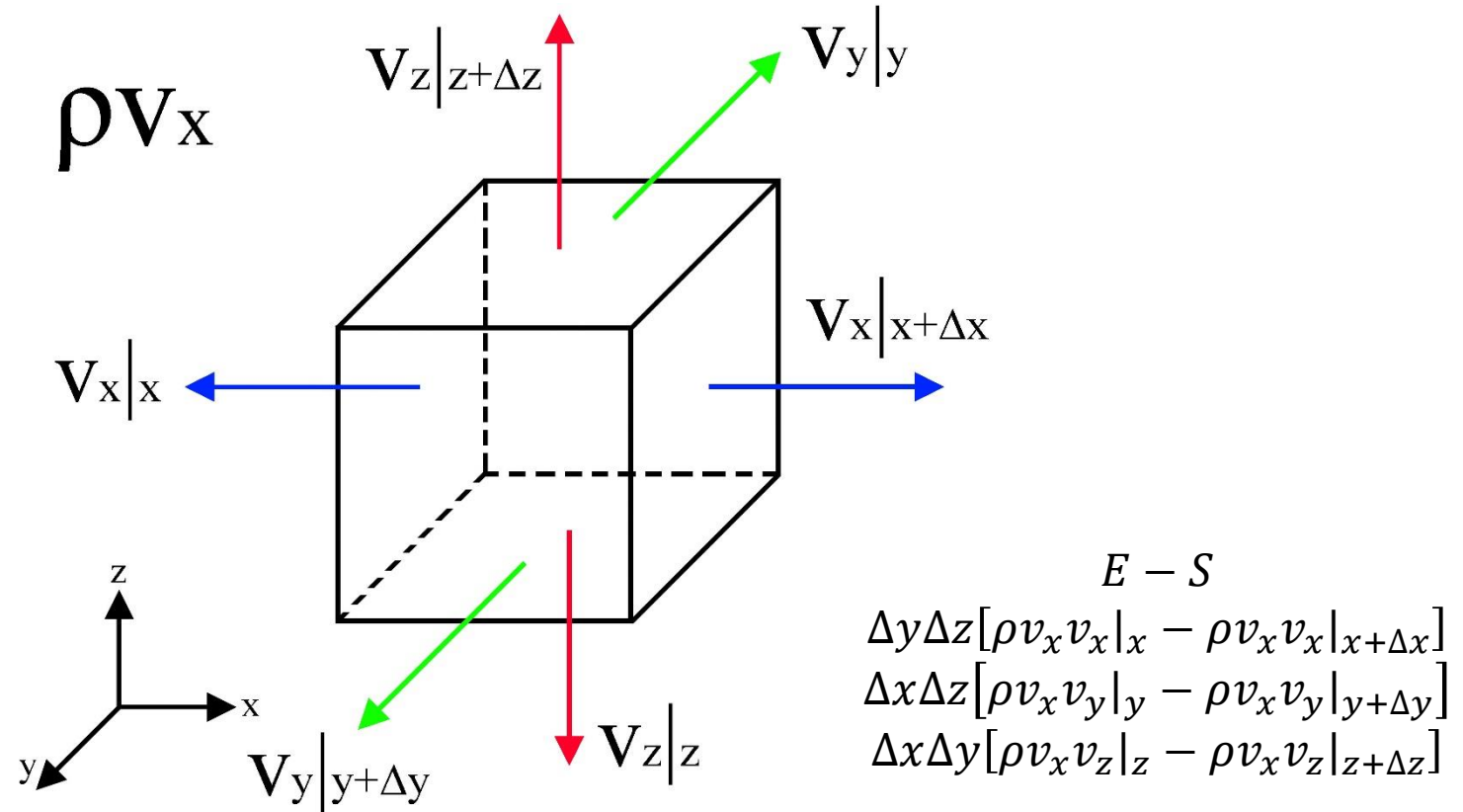
Ecuación de Navier-Stokes



Ecuación de Navier-Stokes

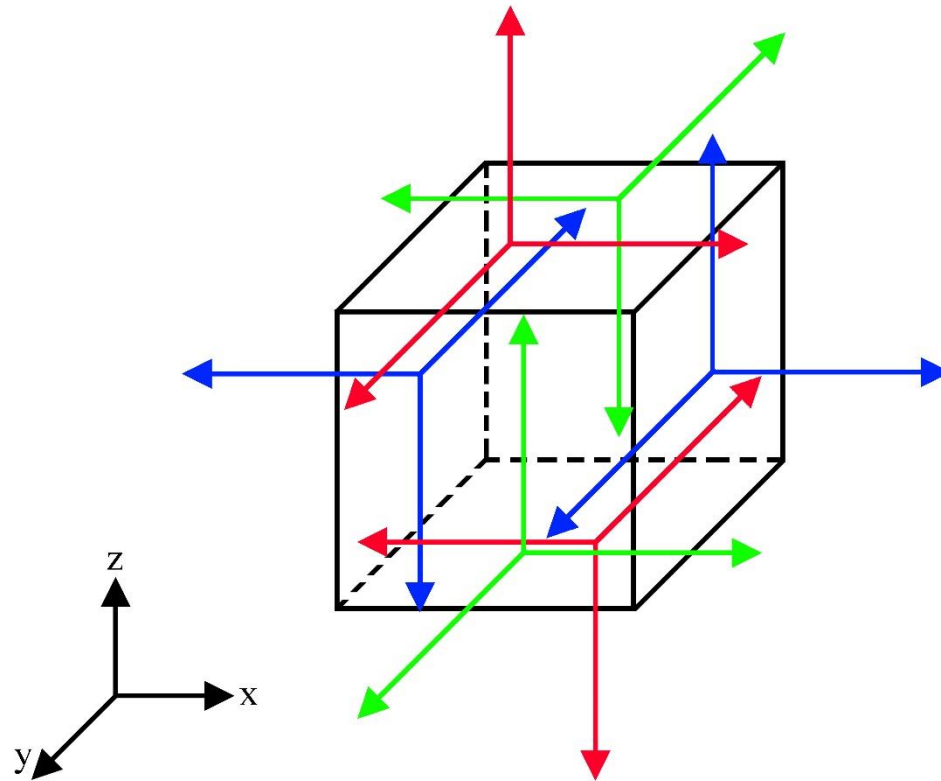


Ecuación de Navier-Stokes



Ecuación de Navier-Stokes

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



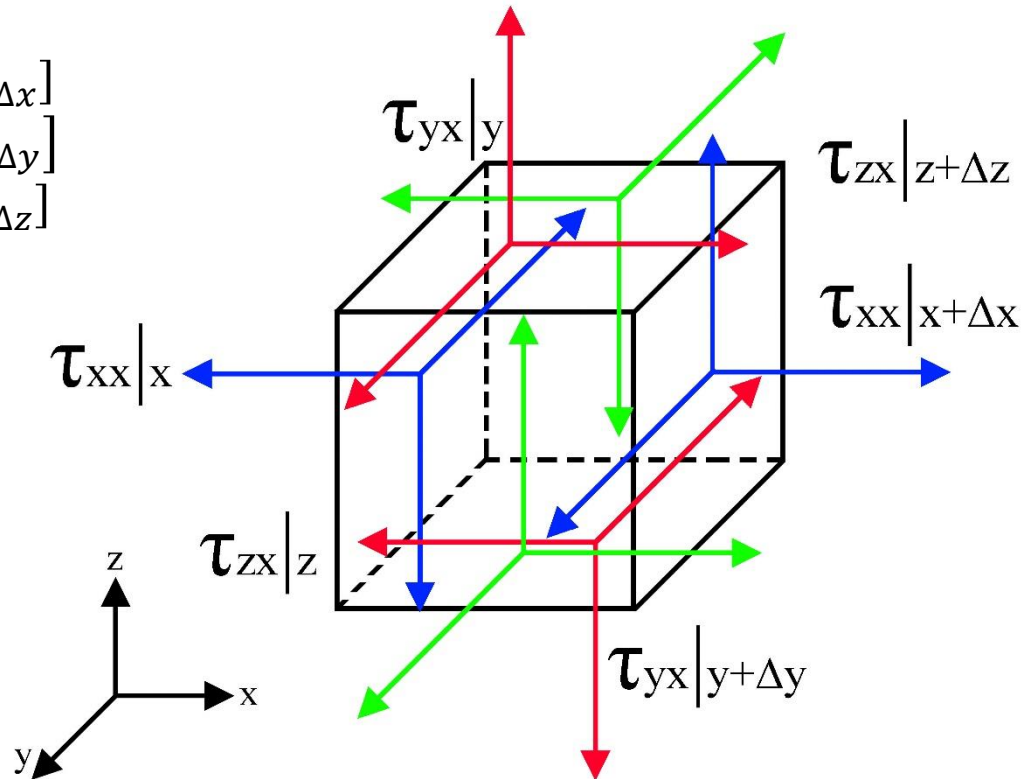
Ecuación de Navier-Stokes

$E - S$

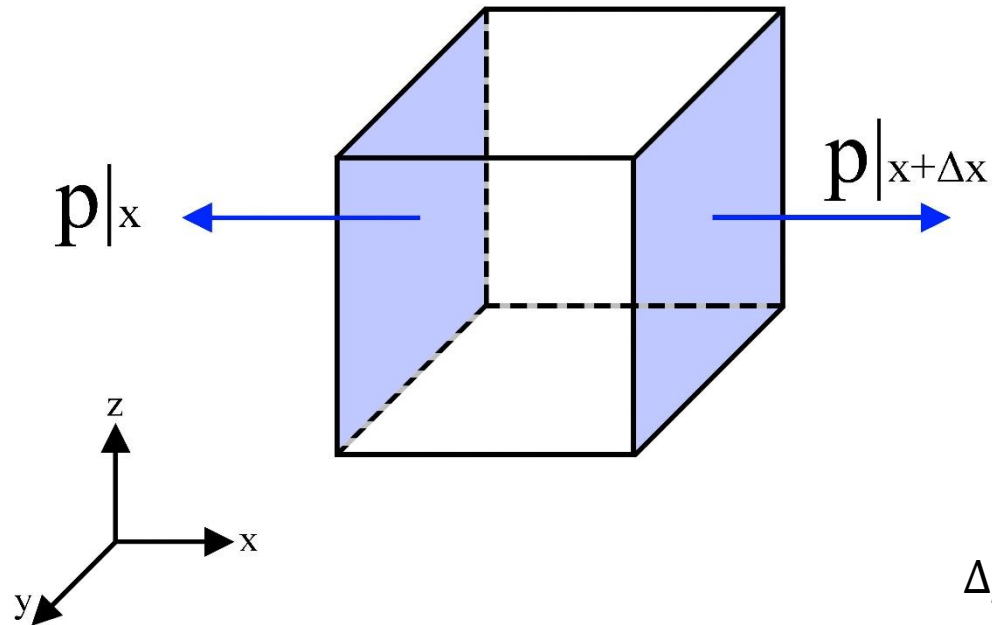
$$\Delta y \Delta z [\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}]$$

$$\Delta x \Delta z [\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}]$$

$$\Delta x \Delta y [\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}]$$



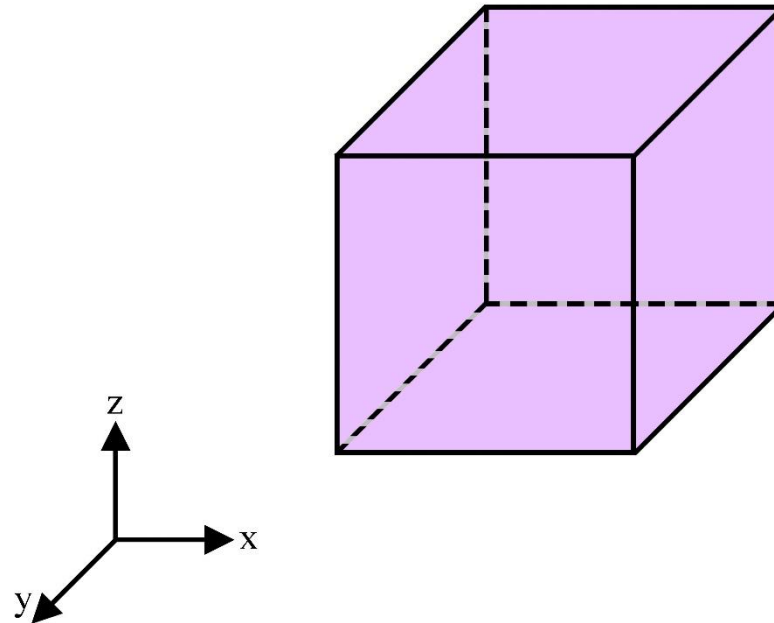
Ecuación de Navier-Stokes



$$E - S$$
$$\Delta y \Delta z [P|_x - P|_{x+\Delta x}]$$

Ecuación de Navier-Stokes

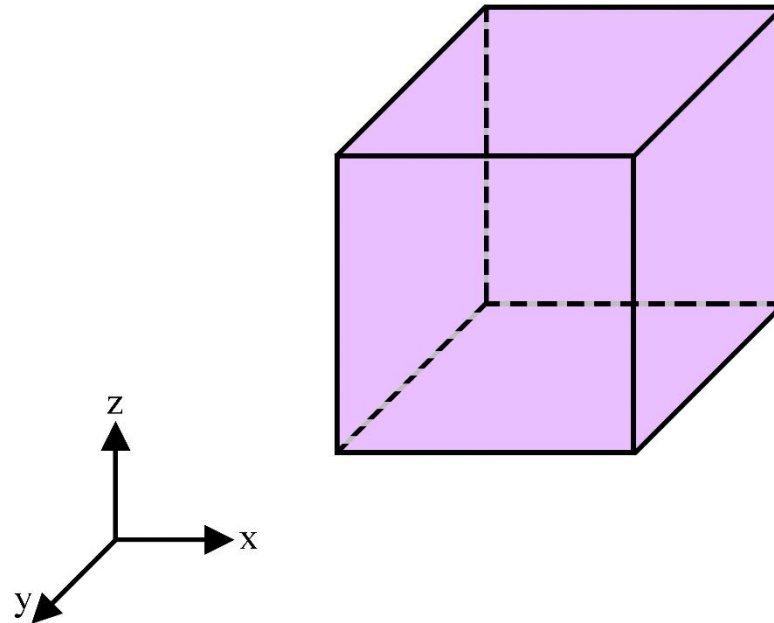
Términos fuente



$$G$$
$$(\Delta x \Delta y \Delta z) \rho F_{b,x}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Acumulación



$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Por lo que el balance de momentum en dirección x queda:

$$E - S + G = Ac$$

$$\begin{aligned} &\Delta y \Delta z [\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [\rho v_x v_y|_y - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [\rho v_x v_z|_z - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z}] \\ &+ \Delta y \Delta z [\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}] \\ &+ \Delta y \Delta z [P|_x - P|_{x+\Delta x}] + (\Delta x \Delta y \Delta z) \rho F_{b,x} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \end{aligned}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Si dividimos todo entre la unidad de volumen ($\Delta x \Delta y \Delta z$):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_x v_y|_y - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_x v_z|_z - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \\ & + \frac{\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \\ & + \frac{P|_x - P|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho F_{b,x} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \end{aligned}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Finalmente, considerando que $\Delta x, \Delta y, y \Delta z \rightarrow 0$, podemos escribir el balance en forma diferencial como:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}) \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_{b,x} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}$$

Que es la **ecuación diferencial de balance de momentum en dirección x**.

El mismo tratamiento se puede seguir para obtener los componentes en **dirección y** así como en **dirección z**.

Ecuación de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier – Stokes (conservación de momentum) en coordenadas cartesianas (x, y, z) en términos de $\bar{\tau}$.

Componente x:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

Componente y:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

Ecuación de Navier-Stokes

Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos en coordenadas cartesianas* (x, y, z):

$$\bar{\tau}_{xx} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\bar{\tau}_{yy} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\bar{\tau}_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$$

$$* \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier – Stokes (conservación de momentum) en coordenadas cartesianas (x, y, z) para un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) y newtoniano ($\mu = \text{cte}$).

Componente x:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Componente y:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Ecuación de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier – Stokes (conservación de momentum) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) y newtoniano ($\mu = \text{cte}$).

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Ecuación de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier – Stokes (conservación de momentum) en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) y newtoniano ($\mu = \text{cte}$).

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_r$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta$$

Componente ϕ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left[\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi$$

Condiciones de frontera e iniciales

¿Qué son las condiciones de frontera?

¿Qué son las condiciones iniciales?

¿Por qué es necesario conocerlas?

Las **condiciones de frontera** son regiones dentro del sistema en donde se conoce perfectamente el comportamiento del mismo.

Las **condiciones iniciales** es un estado particular del sistema, en que a determinado momento se conoce el comportamiento del mismo.

Son importantes, porque a pesar de que las ecuaciones gobernantes describen el mismo, es necesario conocer puntos a partir de donde **iniciar el cálculo**.

Las **condiciones de frontera** son requeridas en **cualquier modelo matemático**, y especifican condiciones tanto en transporte de energía, masa y/o momentum.

Las **condiciones iniciales** son requeridas solo en el caso de que el modelo se planteé en **estado transitorio**.

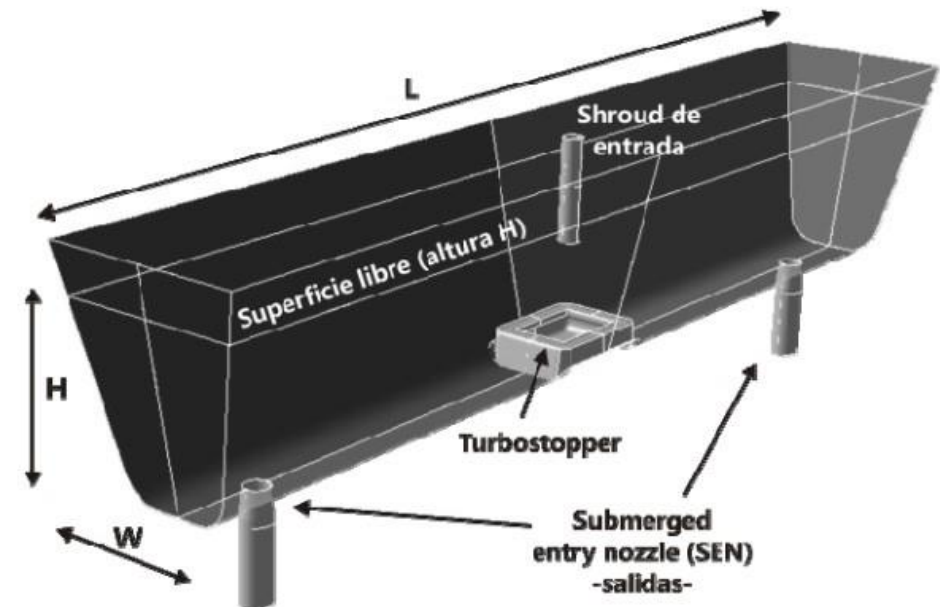
En el caso de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, las cuales se resuelven para un modelo matemático de flujo laminar, se requieren condiciones tanto de frontera como iniciales apropiadas para su resolución.

Condiciones de frontera e iniciales

Veamos un ejemplo rápidamente:

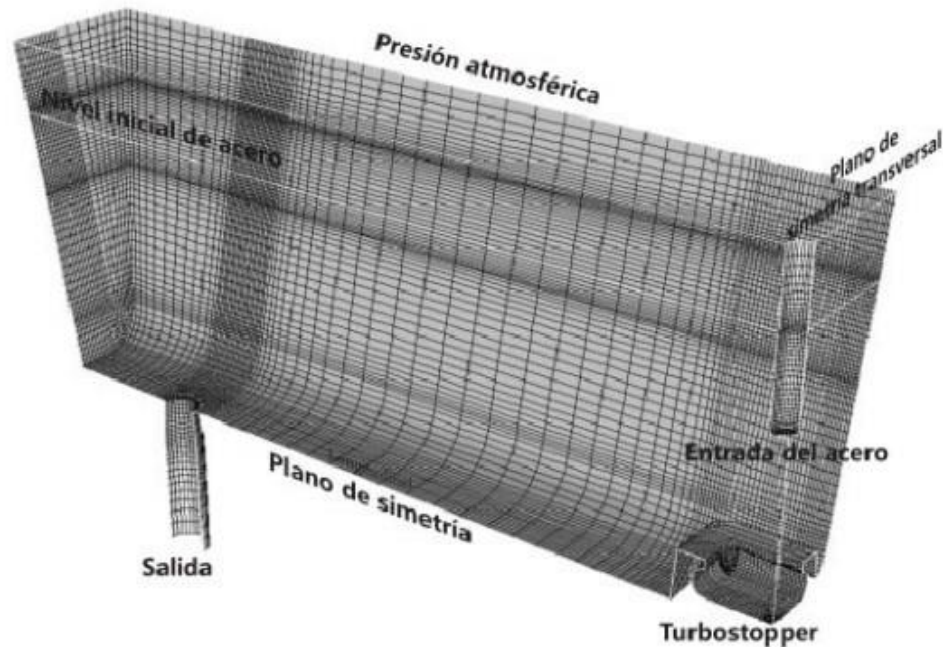
Santamaría López, D. (2010). Análisis de transitorios dentro del Tundish en líneas de colada continua para la fabricación de acero.

En el artículo se presenta un modelo matemático de un distribuidor de colada continua.

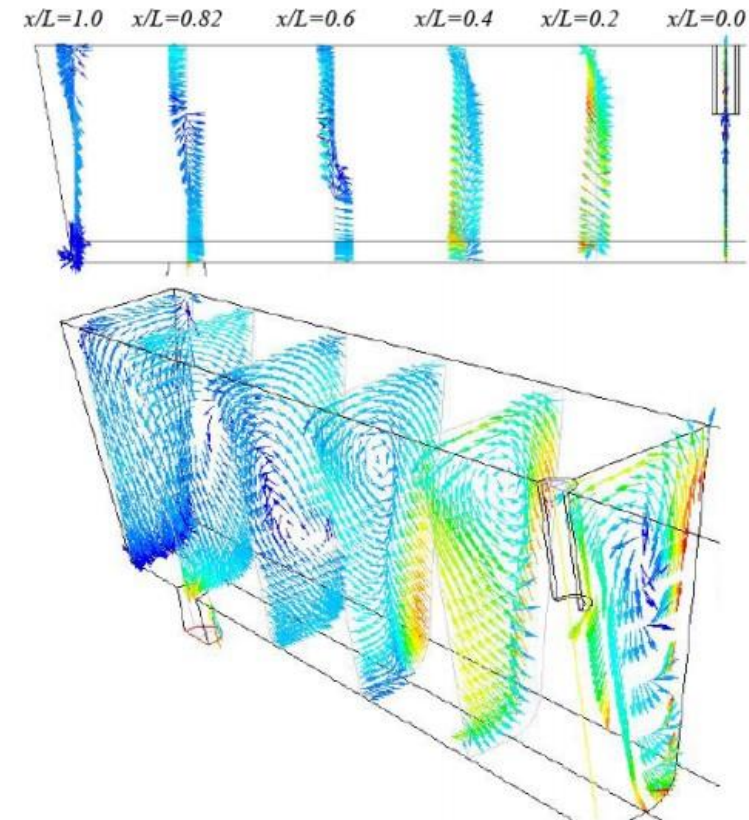


Geometría de un distribuidor de colada continua.

Condiciones de frontera e iniciales



Malla y fronteras de un distribuidor de colada continua.



Patrones de flujo en varios planos de un distribuidor de colada continua.

Condiciones de frontera e iniciales

Existen básicamente tres tipos de condiciones de frontera:

- Las condiciones de **tipo Dirichlet** dan un **valor constante** a una variable del sistema, por ejemplo, $v_x(y = 0) = 0 \text{ m/s}$.
- Las condiciones de **tipo Neumann** dan el **valor de un gradiente, divergencia o de un flux** en una frontera del sistema, por ejemplo, $\frac{\partial v_x}{\partial y}(y = 0) = 0$.
- Una condición de **frontera mixta** presenta una combinación de ambas condiciones de frontera, típicamente tienen la forma $av_x + b \frac{\partial v_x}{\partial z}$.

Nota: una misma frontera puede tener condiciones de diferentes tipos para distintas variables, pero solo puede haber una condición por variable.

Es importante que se especifique el lugar del dominio donde son válidas.

Condiciones de frontera e iniciales

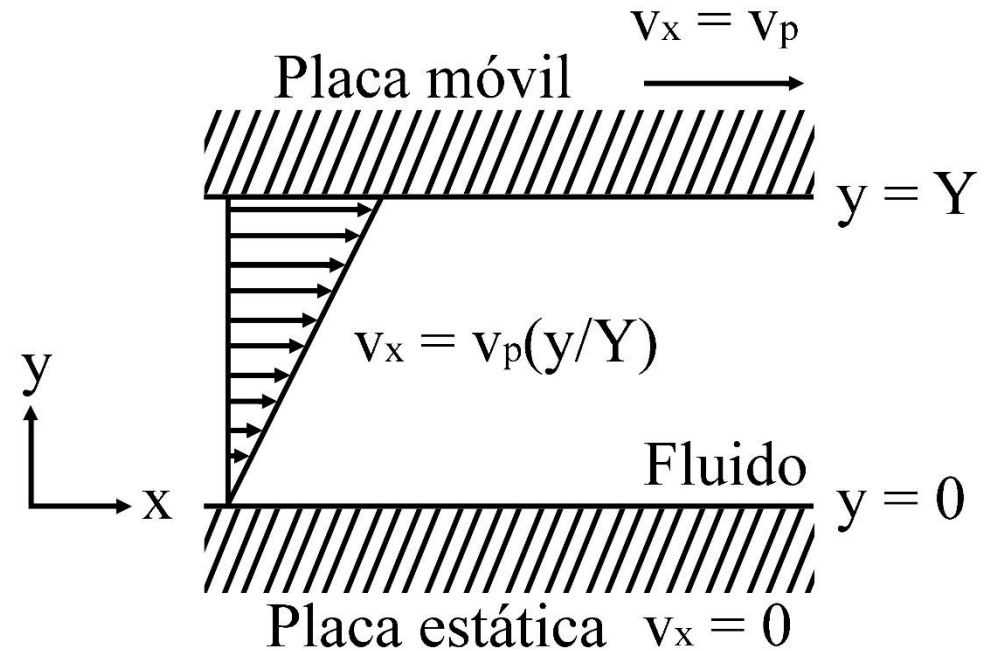
Condición de no deslizamiento:

Cuando un fluido entra en contacto con una pared solida, una pequeña capa del mismo adquiere la velocidad de la pared.

Es una condición de tipo Dirichlet, por ejemplo:

$$v_x|_{y=0} = 0 \frac{m}{s}$$

$$v_x|_{y=Y} = v_p \frac{m}{s}$$



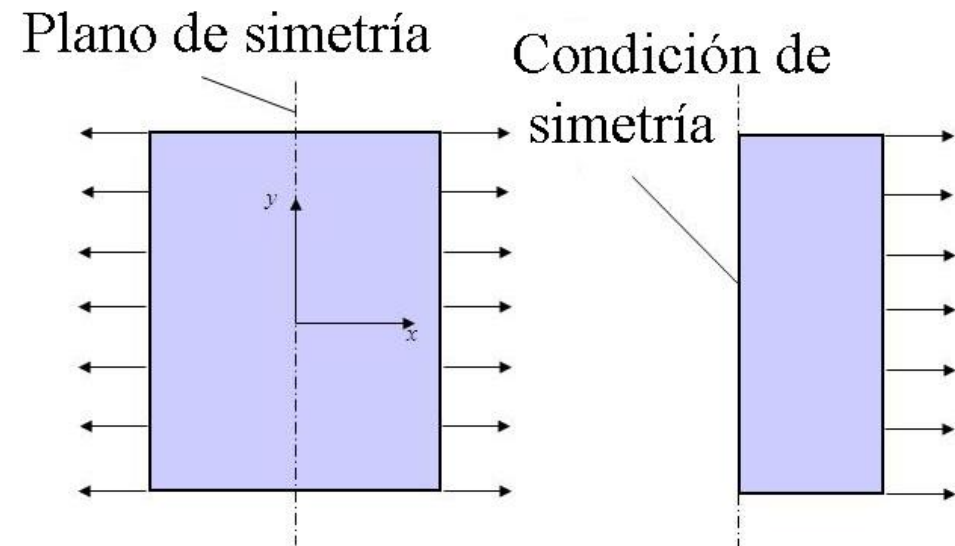
Condiciones de frontera e iniciales

Condición de simetría:

Cuando un sistema muestra simetría se puede emplear esta condición para reducir el dominio de cálculo, y de esta manera ahorra tiempo y esfuerzo de cómputo.

Es una condición de tipo Neumann, por ejemplo:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$



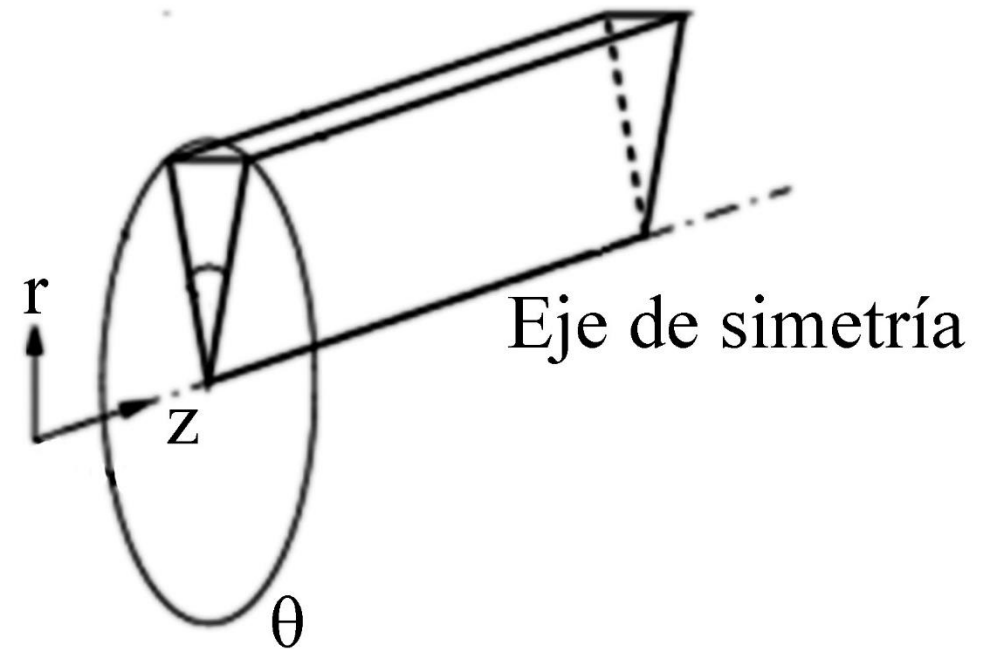
Condiciones de frontera e iniciales

Condición de simetría:

En una cantidad alta de ocasiones se emplea en coordenadas cilíndricas, en donde hay simetría angular, estos casos se llaman axisimétricos.

Es una condición de tipo Neumann, por ejemplo:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$



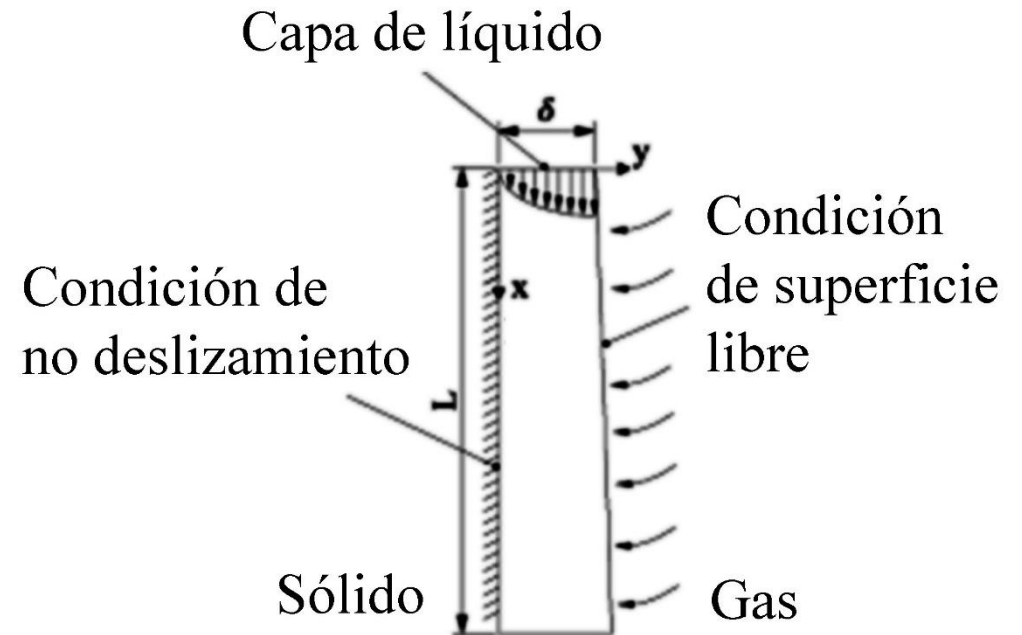
Condiciones de frontera e iniciales

Condición de superficie libre:

En ocasiones se realiza el balance de momentum sobre un líquido que se encuentra en contacto con una atmósfera gaseosa, en estos puntos se dice que existe una superficie libre, dado que la viscosidad del líquido es mucho mayor a la del gas, se puede considerar que no existe transferencia de momentum entre el líquido y el gas.

Es una condición de tipo Neumann, por ejemplo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$$



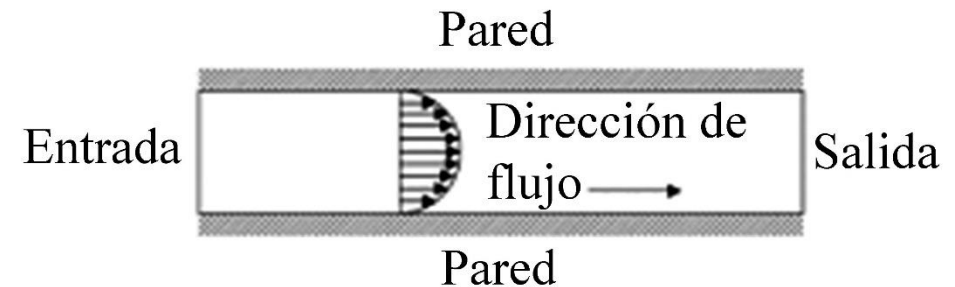
Condiciones de frontera e iniciales

Condiciones de entrada o salida:

En muchas ocasiones se tiene información sobre las entradas y salidas del sistema, por ejemplo:

- Flujos
- Gradientes de presión
- Velocidades
- Presión manométrica

Estas pueden ser de tipo Dirichlet o Neumann.



Condiciones de frontera e iniciales

Las condiciones iniciales describen el sistema en un momento del tiempo, por ejemplo:

- Velocidades
- Gradientes de presión
- Estado de reposo
- Masa en el sistema

Es importante que al escribirlas se especifique el dominio donde son válidas y el momento de tiempo al que corresponden.

Pasos para desarrollar un modelo matemático

- Introducción
- Objetivos e hipótesis
- Planteamiento del problema
- Planteamiento del modelo matemático
 - ❑ Suposiciones
 - ❑ Ecuaciones gobernantes
 - ❑ Condiciones de frontera
 - ❑ Condiciones iniciales
 - ❑ Materiales (propiedades)
- Metodología de solución
 - ❑ Resolución matemática del sistema de ecuaciones (si es posible)
 - ❑ Software CFD
 - ❖ Pre-procesamiento
 - ❖ Procesamiento
 - ❖ Post-procesamiento
- Resultados
- Análisis de resultados
- Conclusiones
- Referencias

Pasos para desarrollar un modelo matemático

- Introducción
- Objetivos e hipótesis
- Planteamiento del problema
- Planteamiento del modelo matemático
 - ❑ Suposiciones
 - ❑ Ecuaciones gobernantes
 - ❑ Condiciones de frontera
 - ❑ Condiciones iniciales
 - ❑ Materiales (propiedades)
- Metodología de solución
 - ❑ Resolución matemática del sistema de ecuaciones (si es posible)
 - ❑ Software CFD
 - ❖ Pre-procesamiento
 - ❖ Procesamiento
 - ❖ Post-procesamiento
- Resultados
- Análisis de resultados
- Conclusiones
- Referencias

Ejemplos

Ejemplo balance microscópico de momentum:

Ejemplos cortos

Pared

Alambre vertical

Se encuentra en pdf dentro de la pagina AMyD de la Facultad de Química de la UNAM:

<https://amyd.quimica.unam.mx/course/view.php?id=354>