Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química
Departamento de Ingeniería Metalúrgica
Introducción a la Ingeniería de Procesos Metalúrgicos y de Materiales
Profesor: Luis Enrique Jardón Pérez

Ejemplo de Balance Integral de Masa
(Vaciado)

En este ejemplo se emplea la metodología para desarrollar un modelo matemático para obtener el tiempo de vaciado de una olla de aceración, mediante un balance integral de masa sobre el acero fundido.

Planteamiento del problema:

Consideré el proceso de vaciado de una olla de aceración, interesándonos conocer el tiempo requerido para el vaciado completo de la misma. El acero fundido se descarga en el distribuidor de colada continua mediante un agujero ubicado en el fondo de la olla. Consideré una olla cilíndrica con un diámetro constante D_{Olla} y una altura inicial de metal fundido H_0, el acero abandona la misma mediante un orificio de sección redonda con un diámetro D_{Salida} (ver Figura 1).

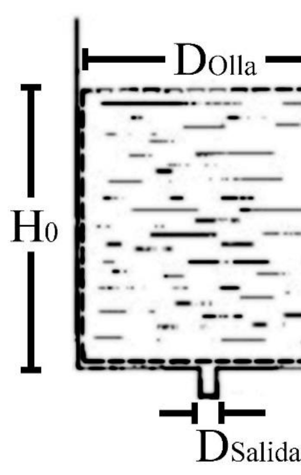

Figure 1.- Esquema de una olla de aceración durante el vaciado.

Dado que el vaciado se realiza aprovechando la presión metalostática del acero fundido, es decir, solo se considera la fuerza de gravedad, la velocidad del acero fundido que abandona la olla se describe mediante la siguiente expresión:

$$\bar{v}_{Salida} = (2gh)^{1/2}\ m/s$$

Donde:

g es la aceleración de la gravedad y h es la altura instantánea de metal fundido dentro de la olla.

Datos:

$H_0 = 3.5$ m

$D_{Salida} = 0.075$ m

$D_{Olla} = 3.1$ m

$\rho_{Acero\ (l)} = 7100\ kg/m^3$

$g = 9.81\ m/s^2$

Planteamiento del modelo matemático:

Suposiciones:

-Balance integral de masa.

-Estado transitorio.

-Fluido incompresible.

-Sin entradas.

-Salida del fluido únicamente por gravedad.

Ecuaciones gobernantes:

Ecuación de un balance integral de masa:

$$\rho_1\bar{v}_1A_1 - \rho_2\bar{v}_2A_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Al no existir entradas en el sistema y ser un fluido incompresible, la ecuación queda como:

$$-\rho\bar{v}_2A_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Condiciones de frontera:

h = 0:

$$\bar{v}_{Salida} = (2gh)^{1/2}\ m/s$$

h = H:

$$\bar{v}_{Entrada} = 0\ m/s$$

Condiciones iniciales:

t = 0 s:

$$h = H_0$$

Materiales:

Las propiedades del acero fundido ya se encuentran en los datos correspondientes.

Metodología de solución:

En este caso se resolverá la ecuación gobernante mediante separación de variables:

$$-\rho \bar{v}_2 A_2 = \frac{dM_T}{dt}$$

Ahora bien sabemos que:

$$A_2 = \pi \frac{{D_{Salida}}^2}{4}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_{Salida} = (2gh)^{1/2}$$

$$M_T = \rho V_T = \rho h \left(\pi \frac{{D_{Olla}}^2}{4} \right)$$

Por lo que sustituyendo en la ecuación gobernante tenemos:

$$-\rho(2gh)^{1/2} \left(\pi \frac{{D_{Salida}}^2}{4} \right) = \frac{d\rho h \left(\pi \frac{{D_{Olla}}^2}{4} \right)}{dt}$$

Podemos sacar de la diferencial los términos constantes, quedando:

$$-\rho(2gh)^{1/2}\left(\pi\frac{{D_{Salida}}^2}{4}\right)=\rho\left(\pi\frac{{D_{Olla}}^2}{4}\right)\frac{dh}{dt}$$

Nótese que la acumulación ha quedado como el cambio de la altura del metal fundido con respecto al tiempo. Reordenemos ligeramente la expresión:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\rho(2gh)^{\frac{1}{2}}\left(\pi\frac{{D_{Salida}}^2}{4}\right)}{\rho\left(\pi\frac{{D_{Olla}}^2}{4}\right)}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{(2gh)^{\frac{1}{2}}{D_{Salida}}^2}{{D_{Olla}}^2}$$

Separando variables, obtenemos la siguiente expresión:

$$\int\frac{dh}{(h)^{1/2}}=-(2g)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2\int dt$$

$$2(h)^{1/2}=-(2g)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t+C$$

$$(h)^{1/2}=-\left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t+C$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$(H_0)^{1/2}=-\left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 (0)+C$$

$$C=(H_0)^{1/2}$$

Por lo que:

$$(h)^{1/2}=-\left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t+(H_0)^{1/2}$$

$$(h)^{1/2} - (H_0)^{1/2} = -\left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t$$

Finalmente el modelo matemático que nos indica la variación en altura del acero a lo largo del tiempo es:

$$(H_0)^{1/2} - (h)^{1/2} = \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t$$

Resultados y análisis de resultados:

Necesitamos el tiempo en que la olla se vacía totalmente, es decir, cuando h = 0, por lo tanto:

$$(H_0)^{1/2} - (0)^{1/2} = \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2 t$$

$$t = \frac{(H_0)^{1/2}}{\left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_{Salida}}{D_{Olla}}\right)^2}$$

$$t = \frac{(3.5)^{1/2}}{\left(\frac{9.81}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{0.075}{3.1}\right)^2}$$

$$t = 1443.1630\ s$$

Por lo que la olla tardara cerca de 24 minutos en vaciarse completamente bajo estas condiciones.

Como resultado adicional la Figura 2 muestra la altura de acero fundido dentro de la olla a lo largo del tiempo de vaciado. Donde se observa que al ser la presión metalostática la única fuerza considerada durante el vaciado, entre mayor es la altura de metal más rápido es el vaciado de la olla.

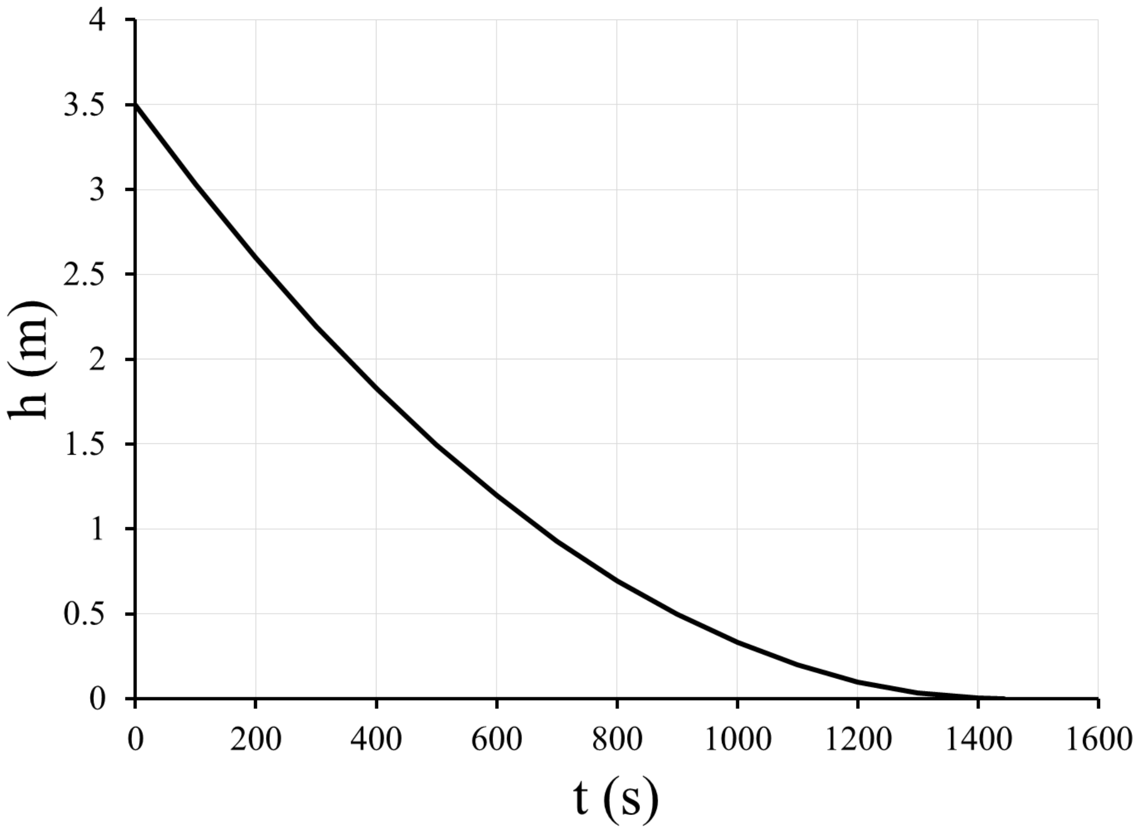

Figura 2.- Altura de acero dentro de la olla a lo largo del tiempo