

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Química

Departamento de Ingeniería Metalúrgica

Introducción a la Ingeniería de Procesos Metalúrgicos y de Materiales

Profesor: Luis Enrique Jardón Pérez

Ejemplos balance microscópico de momentum

(Ejemplos cortos)

1.- Capa que cae sobre pared móvil vertical.

Un planchón continuo de metal es laminado en frío al pasar verticalmente entre dos rodillos en el mismo sentido de la gravedad (ver Figura 1). Antes de entrar en los rodillos pasa a través de un tanque de aceite lubricante equipado con un dispositivo que cubre ambos lados del planchón con una capa uniforme de aceite al salir del tanque. El espesor de la capa de aceite es controlado ajustando el dispositivo. Si el flujo es laminar, operando el sistema con un número de Reynolds de 10. Obtenga una gráfica que relacione la velocidad del planchón con el espesor de la capa de aceite (con al menos 5 puntos). La capa de aceite varía entre 0.1 mm y 0.3 mm, la densidad del aceite es 952 kg/m^3 , la viscosidad del aceite es $4.1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$. El ancho del planchón es 1.5 m, que puede ser considerado infinito en comparación con la capa de aceite que lo recubre, mientras que su largo es infinito al ser una longitud muy elevada. Considere que el flujo en la capa de aceite es laminar y completamente desarrollado, además de que el espesor de la capa es constante en cada cálculo.

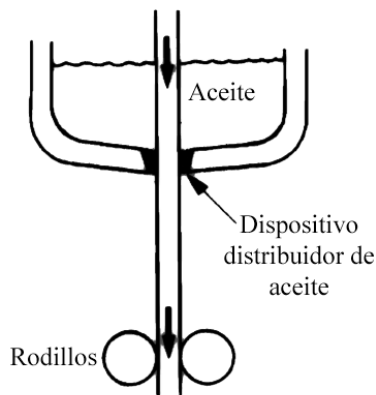


Figura 1.- Proceso de recubrimiento de un planchón de acero con aceite.

Primeramente, es importante comprender el proceso que se está modelando, en este caso habría que considerar que fuerzas actúan sobre el aceite y cómo afectan dichas fuerzas su movimiento, un esquema ilustrativo de este caso, se presenta en la Figura 2.

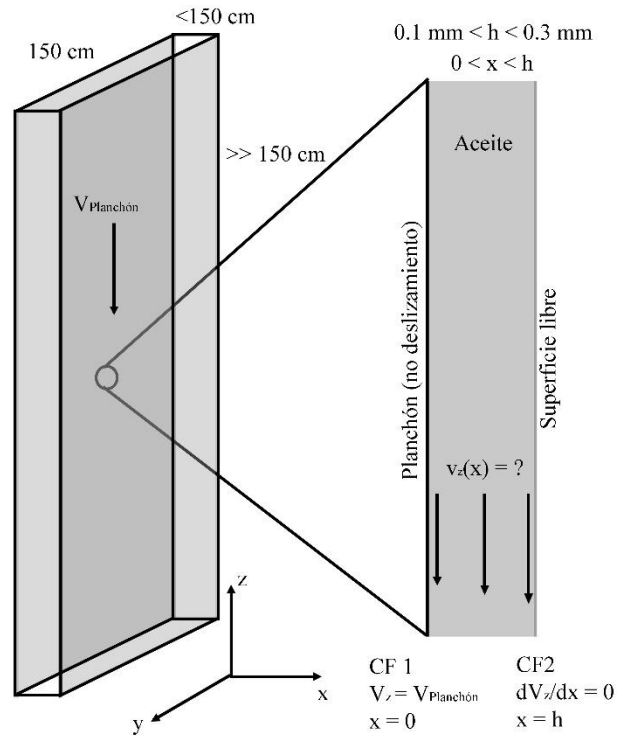


Figura 2.- Esquema del movimiento de la capa de aceite que recubre el planchón.

➤ Planteamiento del modelo matemático

❑ Suposiciones

- Flujo laminar
- Coordenadas cartesianas
- Flujo en 1D (z)
- Fluido incompresible
- Fluido newtoniano
- Estado estacionario
- Flujo completamente desarrollado
- Diferencia de presión despreciable
- Se considera el efecto de la gravedad
- El espesor de la capa de aceite es mucho menor que el ancho de la misma

□ Ecuaciones gobernantes

➤ Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas es:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Flujo 1D $v_x = 0$

Flujo 1D $v_y = 0$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Estado estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Fluido incompresible $\rho = cte$

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$-\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{0}{-\rho}$$

Por lo que aplicando las suposiciones del modelo llegamos a:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

- Ecuación de Navier-Stokes para fluido incompresible y newtoniano en coordenadas cartesianas y dirección z

La ecuación que se emplea es:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Flujo 1D $v_x = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Flujo 1D $v_y = 0$

Diferencia de presión despreciable

Estado estacionario $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

El ancho de la placa es infinitamente mayor que el espesor del aceite

Por continuidad $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

$$0 = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right) + \rho g_z$$

Que con las suposiciones del modelo toma la siguiente forma, que es válida en la región que comprende $0 < x < h$:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} = \frac{d^2 v_z}{dx^2}$$

□ Condiciones de frontera

- Condición de frontera 1

$$v_z|_{x=0} = v_{planchón}$$

- Condición de frontera 2

$$\frac{dv_z}{dx}|_{x=h} = 0$$

□ Condiciones iniciales

No son necesarias por ser estado estacionario

➤ Metodología de solución

Resolvemos la ecuación gobernante mediante separación de variables:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} \int dx = \int d\left(\frac{dv_z}{dx}\right)$$
$$-\frac{\rho g_z}{\mu} x + c_1 = \frac{dv_z}{dx}$$

Aplicamos CF2:

CF2 $x = h$ CF2 $\frac{dv_z}{dx} |_{x=h} = 0$

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} x + c_1 = \frac{dv_z}{dx}$$
$$-\frac{\rho g_z}{\mu} (h) + c_1 = (0)$$
$$c_1 = \frac{\rho g_z}{\mu} h$$

Continuamos con la integral:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} x + c_1 = \frac{dv_z}{dx}$$
$$-\frac{\rho g_z}{\mu} x + \frac{\rho g_z}{\mu} h = \frac{dv_z}{dx}$$
$$\frac{\rho g_z}{\mu} (h - x) = \frac{dv_z}{dx}$$
$$\frac{\rho g_z}{\mu} \int (h - x) dx = \int dv_z$$
$$\frac{\rho g_z}{\mu} \left(hx - \frac{x^2}{2} \right) + c_2 = v_z$$

Aplicamos la CF1:

$$\text{CF1 } x = 0 \qquad \text{CF1 } v_z|_{x=0} = v_{planchón}$$

$$\frac{\rho g_z}{\mu} \left(hx - \frac{x^2}{2} \right) + c_2 = v_z$$

$$\frac{\rho g_z}{\mu} \left(h(0) - \frac{(0)^2}{2} \right) + c_2 = v_{planchón}$$

$$c_2 = v_{planchón}$$

La expresión final es:

$$\frac{\rho g_z}{\mu} \left(hx - \frac{x^2}{2} \right) + c_2 = v_z$$

$$\frac{\rho g_z}{\mu} \left(hx - \frac{x^2}{2} \right) + v_{planchón} = v_z$$

$$v_z = \frac{\rho g_z}{2\mu} (2hx - x^2) + v_{planchón}$$

Que nos describe la velocidad de caída de la capa de aceite en función de la posición x .

Siendo la expresión para la velocidad promedio:

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^h \left[\frac{\rho g_z}{2\mu} (2hx - x^2) + v_{planchón} \right] dx}{\int_0^h dx}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\left[\frac{\rho g_z}{2\mu} \left(hx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + v_{planchón} x \right]_0^h}{x \Big|_0^h}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\frac{\rho g_z}{2\mu} \left(\frac{2h^3}{3} \right) + v_{planchón} h}{h}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\rho g_z}{3\mu} h^2 + v_{planchón}$$

Expresión que describe la velocidad promedio de la capa aceite.

Y la expresión para el número de Reynolds es:

$$N_{Re} = \frac{4\rho|\bar{v}_z|h}{\mu}$$

Ya que:

$$D_h = \frac{4A_{\perp}}{P_m} = \frac{4h * L}{L}$$

➤ Resultados

Comencemos con la gráfica de la velocidad del planchón en función del espesor del aceite lubricante. Para el cálculo, se usarían las expresiones de la velocidad promedio y el número de Reynolds, por ejemplo, para 0.1 mm (1×10^{-4} m):

$$N_{Re} = \frac{4\rho|\bar{v}_z|h}{\mu}$$

$$10 = \frac{4(952 \text{ kg/m}^3)|\bar{v}_z|(1 \times 10^{-4} \text{ m})}{4.1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2}$$

$$|\bar{v}_z| = \frac{10(4.1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2)}{4(952 \text{ kg/m}^3)(1 \times 10^{-4} \text{ m})}$$

$$|\bar{v}_z| = 0.1077 \text{ m/s}$$

Pero dado que el fluido se mueve debido a la gravedad, la velocidad promedio es:

$$\bar{v}_z = -0.1077 \text{ m/s}$$

Esta velocidad se sustituye en la expresión de la velocidad promedio para conocer la velocidad del planchón:

$$\bar{v}_z = \frac{\rho g_z}{3\mu} h^2 + v_{planchón}$$

$$-0.1077 \text{ m/s} = \frac{(952 \text{ kg/m}^3)(-9.81 \text{ m/s}^2)}{3(4.1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2)} (1 \times 10^{-4} \text{ m})^2 + v_{planchón}$$

$$v_{planchón} = -0.1077 \text{ m/s} - \frac{(952 \text{ kg/m}^3)(-9.81 \text{ m/s}^2)}{3(4.1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2)} (1 \times 10^{-4} \text{ m})^2$$

$$v_{planchón} = -0.1001 \text{ m/s}$$

Que es la velocidad que nos permite mantener el flujo con un número de Reynold de 10.

De la misma manera se puede calcular para distintos espesores de la capa de aceite, tal como de observa en la Figura 3:

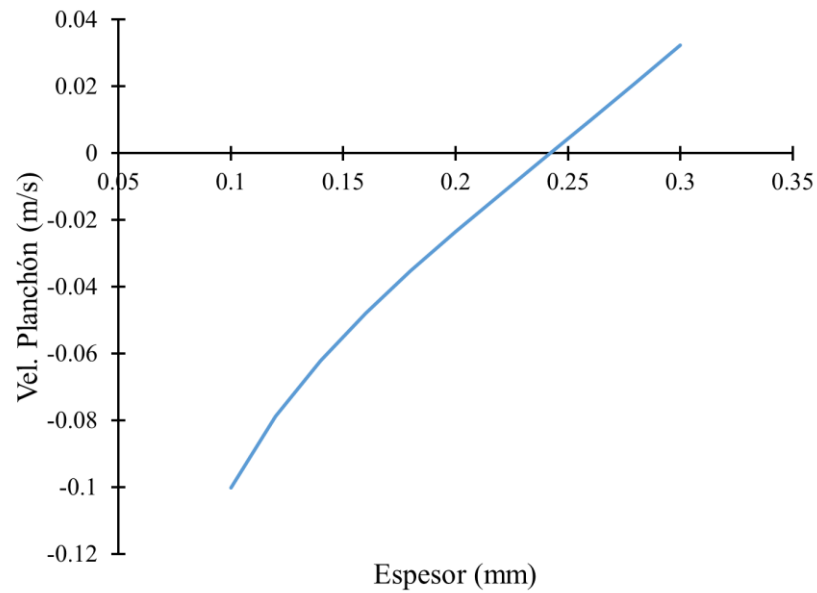


Figura 3.- Velocidad del planchón en función del espesor de la capa de aceite.

Ahora presentamos algunos ejemplos del perfil de velocidad que adquiere la capa de aceite en la Figura 4, las cuales se obtienen evaluando la expresión de la v_z en distintos puntos del dominio que comprende $0 < x < h$:

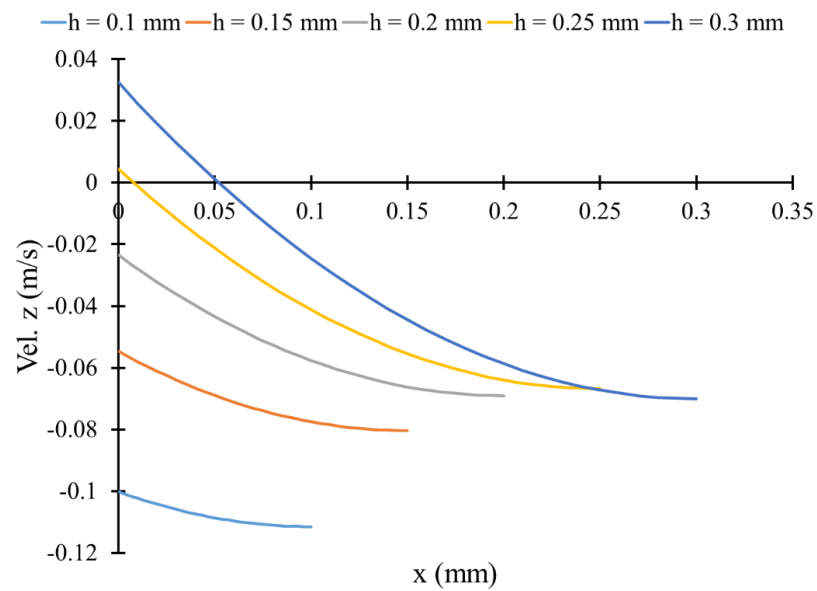


Figura 4.- Perfil de velocidad del aceite lubricante para distintos espesores de capa.

2.- Pared móvil en coordenadas cilíndricas.

Después de un tratamiento térmico, se hace pasar alambrión de acero por el centro de un tubo de sección redonda lleno de aceite, esto con el fin de enfriarlo (ver Figura 5). El paso del alambrión por el tubo se realiza a una velocidad baja y de manera continua (flujo laminar). El aceite se considera incompresible y newtoniano, sin embargo, sus propiedades cambian con la temperatura tal como se muestra en la Tabla 1. El alambrión se mueve a una velocidad de entre 0.1 m/s y 1.7 m/s, el diámetro del tubo es de 2 cm y k es 0.2 (ver Figura 6). Obtenga una gráfica donde relacione la velocidad promedio del aceite dentro del tubo contra la velocidad del alambrión (con al menos 5 velocidades), para la temperatura de su elección. Considere que el flujo de aceite está completamente desarrollado, y que el aceite opera a una misma temperatura constante en cada cálculo. Desprecie el efecto de la gravedad y suponga que no hay una diferencia de presión considerable en el sistema.

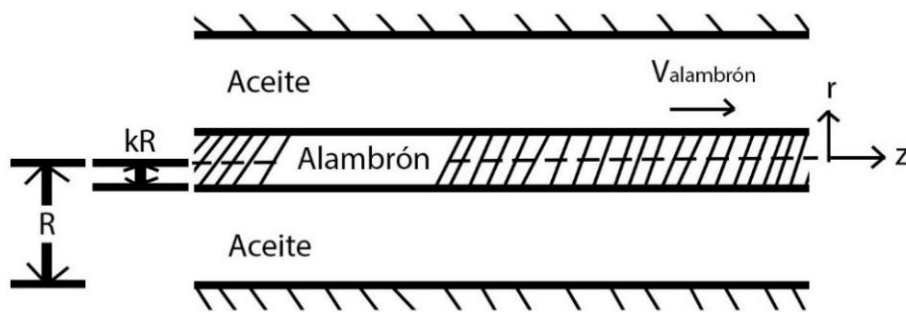


Figura 5.- Proceso de enfriamiento de un alambrión de acero.

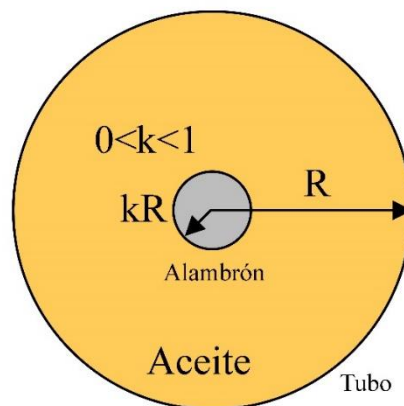


Figura 6.- Vista frontal del alambrión dentro del tubo que contiene el aceite.

Tabla 1.- Propiedades físicas para un aceite SAE 10W-60.

Temperatura (°C)	Viscosidad dinámica (mPa s)	Viscosidad cinemática (mm²/s)	Densidad (g/cm³)
0	1453.80	1684.40	0.8631
10	712.34	831.44	0.8568
20	381.08	448.10	0.8504
30	220.06	260.69	0.8442
40	135.52	161.73	0.8380
50	88.55	106.47	0.8318
60	60.60	73.41	0.8256
70	43.23	52.77	0.8193
80	31.95	39.29	0.8130
90	24.31	30.13	0.8069
100	18.99	23.72	0.8008

➤ Planteamiento del modelo matemático

❑ Suposiciones

- Flujo laminar
- Proceso isotérmico
- Coordenadas cilíndricas
- Flujo en 1D (z)
- Fluido incompresible
- Fluido newtoniano
- Estado estacionario
- Flujo completamente desarrollado
- Diferencia de presión despreciable
- No se considera el efecto de la gravedad
- Simetría angular

□ Ecuaciones gobernantes

➤ Ecuación de continuidad

La ecuación de la que partimos es la siguiente:

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Flujo 1D $v_r = 0$ Flujo 1D $v_\theta = 0$ Edo. estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Fluido incompresible $\rho = cte$

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Que considerando las suposiciones llega a la forma:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

➤ Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para fluido incompresible y newtoniano en dirección z

La ecuación de que partimos es la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Flujo 1D $v_r = 0$ Flujo 1D $v_\theta = 0$ Simetría angular $\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Edo. estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Diferencia presión despreciable $\frac{\partial P}{\partial z} \approx 0$ No se considera la gravedad

Por continuidad $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0$$

Que considerando las suposiciones llega la forma:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = 0$$

❑ Condiciones de frontera

➤ Condición de frontera 1

$$v_z|_{r=kR} = v_{alambción}$$

➤ Condición de frontera 2

$$v_z|_{r=R} = 0 \frac{m}{s}$$

❑ Condiciones iniciales

No son necesarias al considerar estado estacionario.

➤ Metodología de solución

Resolveremos la ecuación gobernante mediante separación de variables:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = 0$$

$$\int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \int 0 dr$$

$$r \frac{dv_z}{dr} = c_1$$

Al no conocer ninguna condición de frontera de tipo Neumann, no podemos sustituir un valor conocido de la diferencial, por lo que integramos nuevamente para poder sustituir las condiciones de frontera en la ecuación resultante.

$$\int dv_z = \int \frac{c_1}{r} dr$$

$$v_z = c_1 \ln r + c_2$$

Aplicando CF1:

$$v_{alambción} = c_1 \ln kR + c_2$$

Aplicando CF2:

$$0 = c_1 \ln R + c_2$$

Por lo tanto:

$$-c_1 \ln R = c_2$$

$$v_{alambción} = c_1 \ln kR - c_1 \ln R$$

$$v_{alambción} = c_1 (\ln kR - \ln R)$$

$$v_{alambción} = c_1 \left(\ln \left(\frac{kR}{R} \right) \right)$$

$$v_{alambción} = c_1 (\ln k)$$

$$c_1 = \frac{v_{alambción}}{\ln k}$$

Sustituimos en la primera expresión:

$$-\frac{v_{alambción}}{\ln k} \ln R = c_2$$

$$c_2 = -\frac{v_{alambción}}{\ln k} \ln R$$

Sustituyendo las constantes en la expresión de la velocidad, llegamos finalmente a:

$$v_z = c_1 \ln r + c_2$$

$$v_z = \frac{v_{alambción}}{\ln k} \ln r - \frac{v_{alambción}}{\ln k} \ln R$$

$$v_z = \frac{v_{alambción}}{\ln k} (\ln r - \ln R)$$

$$v_z = \frac{v_{alambción}}{\ln k} \ln \frac{r}{R}$$

La velocidad promedio se calcula mediante el teorema del valor medio:

$$\bar{v}_z = \frac{\int_{kR}^R v_z(r) 2\pi r dr}{\int_{kR}^R 2\pi r dr}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \frac{v_{alambción}}{\ln k} \int_{kR}^R (r \ln r - r \ln R) dr}{2\pi \int_{kR}^R r dr}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \frac{v_{alambción}}{\ln k} \left[\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \ln R \right]_{kR}^R}{2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{kR}^R}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \frac{v_{alambción}}{\ln k} \left[\frac{R^2}{2} \ln R - \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{k^2 R^2}{2} \ln kR + \frac{k^2 R^2}{4} + \frac{k^2 R^2}{2} \ln R \right]}{2\pi \left[\frac{R^2}{2} - \frac{k^2 R^2}{2} \right]}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\pi \frac{v_{alambción}}{\ln k} \left[\frac{R^2}{2} (k^2 - 1) + k^2 R^2 \ln \frac{1}{k} \right]}{\pi R^2 (1 - k^2)}$$

$$\bar{v}_z = -\frac{v_{alambción}}{\ln k} \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2 \ln k}{(1 - k^2)} \right)$$

➤ Resultados

La Figura 7 presenta el cambio en la velocidad promedio del aceite con respecto a la velocidad del alambción:

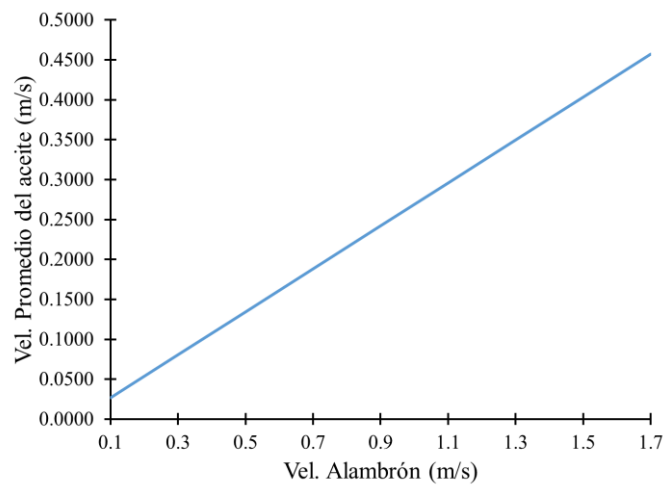


Figura 7.- Velocidad promedio del aceite contra la velocidad del alambre.

La Figura 8 presenta algunos ejemplos del perfil de velocidad que adquiere el aceite con distintos valores de velocidad del alambrión:

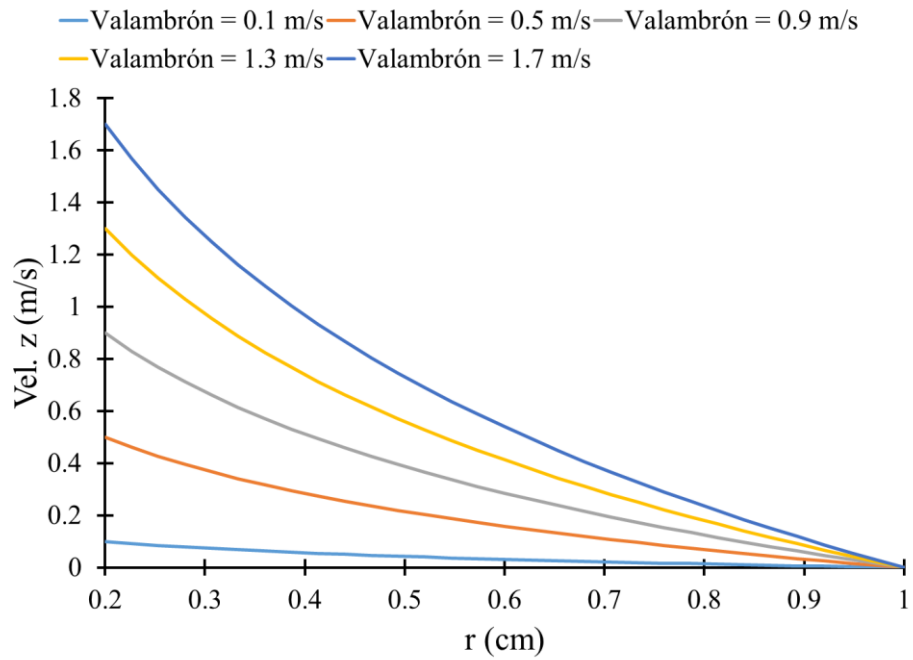


Figura 8.- Ejemplos del perfil de velocidad del aceite con diferentes velocidades del alambrión.

3.- Capa que cae sobre una pared en coordenadas cilíndricas.

Cierta máquina de vapor tiene un sistema de purga que consiste en un tubo de sección redonda en donde agua fluye hacia arriba debido a una diferencia de presión (ver Figura 9). Una vez alcanzada la parte superior del tubo el agua resbala simétricamente alrededor del exterior del tubo. El tubo de purga tiene un radio externo de 1 cm y la capa de agua un espesor variable aR (ver Figura 10). Obtenga una gráfica donde se observe el espesor de la capa de agua en función del número de Reynolds en la misma al resbalar hacia abajo, si este último varía entre 5 y 10 (con al menos 5 puntos). La densidad del agua es de 1000 kg/m^3 y su viscosidad es $1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$. Considere que el flujo está completamente desarrollado mientras cae, y que el sistema opera con solo un número de Reynolds cada vez.

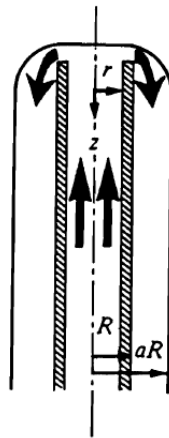


Figura 9.- Esquema de una capa de fluido que resbala en la pared externa de un tubo.

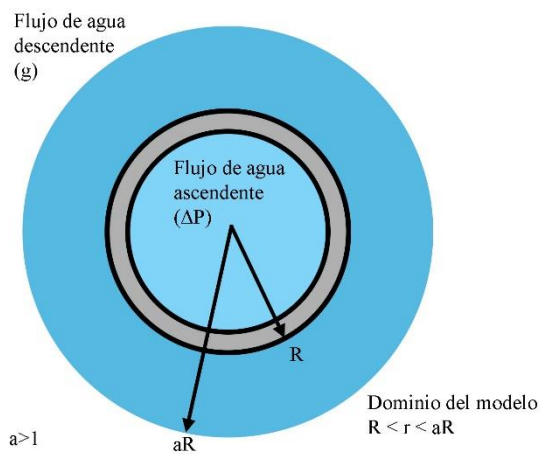


Figura 10.- Vista superior del sistema de purga

➤ Planteamiento del modelo matemático

❑ Suposiciones

- Flujo laminar
- Coordenadas cilíndricas
- Flujo en 1D (z)
- Fluido incompresible
- Fluido newtoniano
- Estado estacionario
- Flujo completamente desarrollado
- Diferencia de presión despreciable
- Se considera el efecto de la gravedad
- Simetría angular

❑ Ecuaciones gobernantes

- Ecuación de continuidad

La ecuación de la que partimos es la siguiente:

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Flujo 1D $v_r = 0$ Flujo 1D $v_\theta = 0$ Edo. estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Incompresible $\rho = cte$ $-\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$

Que considerando las suposiciones llega a la forma:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

- Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para fluido incompresible y newtoniano en dirección z

La ecuación de que partimos es la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Flujo 1D $v_r = 0$ Flujo 1D $v_\theta = 0$ Simetría angular $\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Edo. estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Diferencia presión despreciable $\frac{\partial P}{\partial z} \approx 0$

Por continuidad $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

$$0 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z$$

Que considerando las suposiciones llega la forma:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

□ Condiciones de frontera

- Condición de frontera 1

$$v_z|_{r=R} = 0 \frac{m}{s}$$

- Condición de frontera 2

$$\frac{dv_z}{dr}|_{r=aR} = 0$$

□ Condiciones iniciales

No son necesarias al considerar estado estacionario.

➤ Metodología de solución

Resolveremos la ecuación gobernante mediante separación de variables:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho g_z}{\mu} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \\ -\frac{\rho g_z}{\mu} \int r dr &= \int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \\ -\frac{\rho g_z r}{\mu} + \frac{c_1}{r} &= \frac{dv_z}{dr} \end{aligned}$$

Aplicando la CF2:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho g_z aR}{\mu} + \frac{c_1}{aR} &= 0 \\ c_1 &= \frac{\rho g_z a^2 R^2}{2\mu} \end{aligned}$$

Proseguimos con la resolución:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho g_z r}{\mu} + \frac{\rho g_z a^2 R^2}{2\mu} \frac{1}{r} &= \frac{dv_z}{dr} \\ -\frac{\rho g_z}{2\mu} \int r dr + \frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \int \frac{1}{r} dr &= \int dv_z \\ v_z &= \frac{\rho g_z}{2\mu} \left(a^2 R^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) + c_2 \end{aligned}$$

Aplicamos la CF1:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho g_z}{2\mu} \left(a^2 R^2 \ln R - \frac{R^2}{2} \right) + c_2 \\ c_2 &= -\frac{\rho g_z}{2\mu} \left(a^2 R^2 \ln R - \frac{R^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Llegando a la siguiente expresión:

$$v_z = \frac{\rho g_z}{2\mu} \left(a^2 R^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) - \frac{\rho g_z}{2\mu} \left(a^2 R^2 \ln R - \frac{R^2}{2} \right)$$

$$v_z = \frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{\rho g_z}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

La velocidad promedio viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \bar{v}_z &= \frac{\int_R^{aR} v_z(r) 2\pi r dr}{\int_R^{aR} 2\pi r dr} \\ \bar{v}_z &= \frac{2\pi \int_R^{aR} \left[\frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{\rho g_z}{4\mu} (R^2 - r^2) \right] r dr}{2\pi \int_R^{aR} r dr} \\ \bar{v}_z &= \frac{2\pi \int_R^{aR} \left[\frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 r \ln r - \frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 r \ln R + \frac{\rho g_z}{4\mu} r R^2 - \frac{\rho g_z}{4\mu} r^3 \right] dr}{2\pi \int_R^{aR} r dr} \\ \bar{v}_z &= \frac{2\pi \left[\frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \frac{r^2}{4} - \frac{\rho g_z}{2\mu} a^2 R^2 \frac{r^2}{2} \ln R + \frac{\rho g_z}{4\mu} \frac{r^2}{2} R^2 - \frac{\rho g_z}{4\mu} \frac{r^4}{4} \right]_R^{aR}}{2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^{aR}} \\ \bar{v}_z &= \frac{\pi \frac{\rho g_z}{2\mu} \left[a^2 R^2 \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R} + R^2 \frac{r^2}{4} (1 - a^2) - \frac{r^4}{8} \right]_R^{aR}}{\pi R^2 (a^2 - 1)} \\ \bar{v}_z &= \frac{\pi \frac{\rho g_z}{2\mu} \left[\frac{a^4 R^4}{2} \ln a + \frac{a^2 R^4}{4} (1 - a^2) - \frac{a^4 R^4}{8} - \frac{a^2 R^4}{2} \ln \frac{R}{R} - \frac{R^4}{4} (1 - a^2) + \frac{R^4}{8} \right]}{\pi R^2 (a^2 - 1)} \\ \bar{v}_z &= \frac{\pi \frac{\rho g_z}{4\mu} R^4 \left[a^4 \ln a + \frac{a^2}{2} (1 - a^2) - \frac{a^4}{4} - \frac{1}{2} (1 - a^2) + \frac{1}{4} \right]}{\pi R^2 (a^2 - 1)} \\ \bar{v}_z &= \frac{\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \left[a^4 \ln a - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} + \frac{(1 - a^2)(1 + a^2)}{4} \right]}{(a^2 - 1)} \\ \bar{v}_z &= \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \left[a^4 \frac{\ln a}{(a^2 - 1)} - \frac{(a^2 - 1)}{2} - \frac{(a^2 + 1)}{4} \right] \end{aligned}$$

En este sistema el número de Reynolds se calcula con la expresión:

$$N_{Re} = \frac{\rho |\bar{v}_z| 2R (a^2 - 1)}{\mu}$$

Donde la longitud característica se calcula mediante la expresión del diámetro hidráulico.

$$D_h = \frac{4A_{\perp}}{P_{mojado}}$$

$$A_{\perp} = \pi(aR)^2 - \pi R^2 = \pi R^2(a^2 - 1)$$

$$P_{mojado} = \pi 2R$$

$$D_h = \frac{4\pi R^2(a^2 - 1)}{\pi 2R} = 2R(a^2 - 1)$$

➤ Resultados

La Figura 11 muestra el espesor de la capa de agua que recubre el tubo a diferentes números de Reynolds:

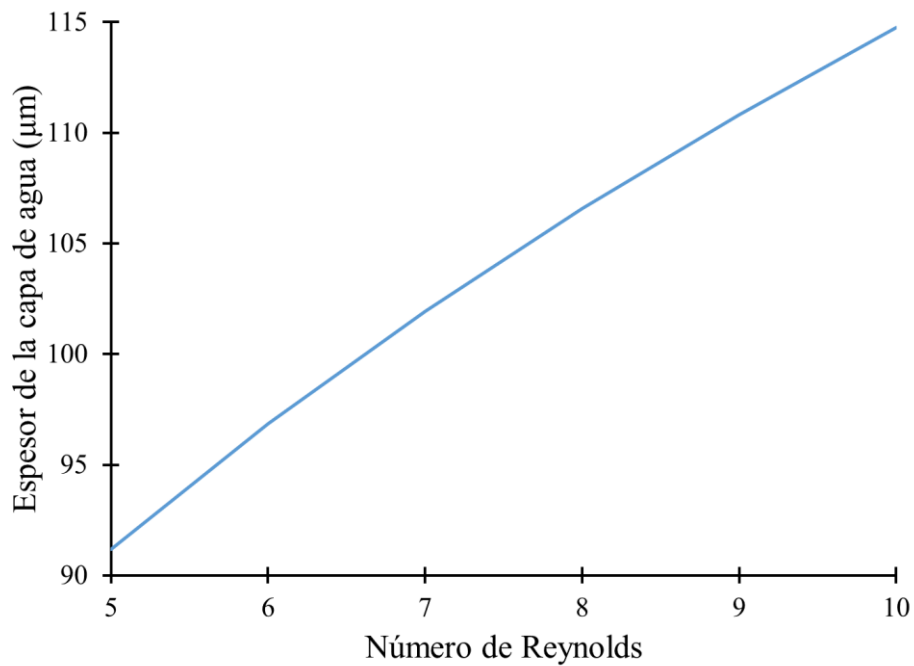


Figura 11.- espesor de la capa de agua con diferentes valores del número de Reynolds.

La Figura 12 muestra el perfil de velocidad de la capa de agua para distintos valores de número de Reynolds:

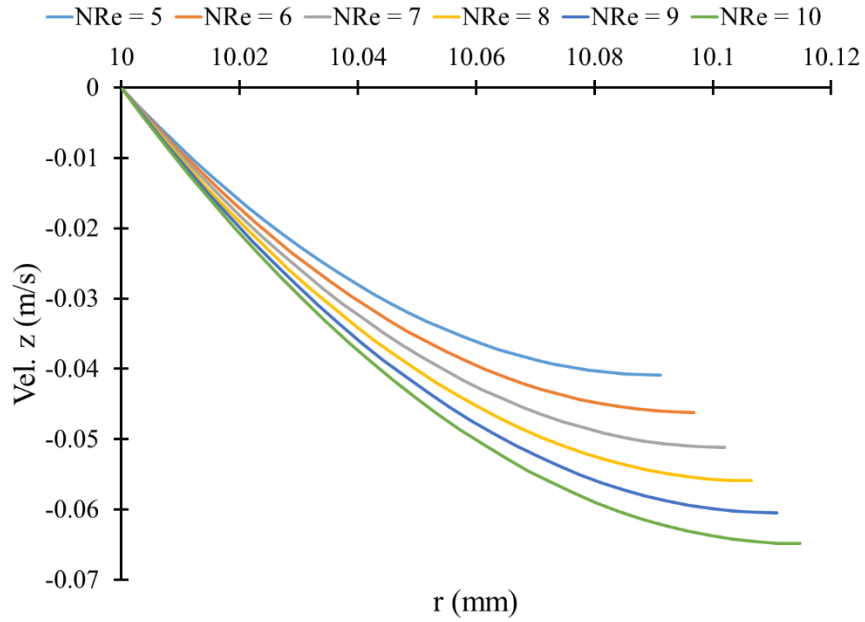


Figura 12.- Perfil de velocidad para una capa que cae en coordenadas cilíndricas para distintos valores de numero de Reynolds.