Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química
Departamento de Ingeniería Metalúrgica
Introducción a la Ingeniería de Procesos Metalúrgicos y de Materiales

Profesor: Luis Enrique Jardón Pérez

Ejemplo de Balance Microscópico de Momentum
(Pared)

En este ejemplo se plantea un balance microscópico de momentum en una capa de líquido que cae verticalmente resbalando a lo largo de una pared, el flujo que presenta el líquido es laminar, el objetivo es obtener el perfil de velocidad del líquido en una zona de flujo desarrollado.

Planteamiento del problema

Se tiene una pared vertical en la que resbala un flujo continuo y laminar de líquido. El fluido que resbala por la pared es newtoniano e incompresible. El movimiento del líquido que resbala por la pared es debido a la fuerza de gravedad que actúa sobre el mismo. En estas condiciones se puede considerar que no hay una diferencia de presiones considerable en el sistema. La Figura 1 presenta un esquema del proceso descrito, en el que se observa que la parte externa de la capa de fluido (de espesor h) está expuesta a la atmósfera, es decir, se trata de una superficie libre.

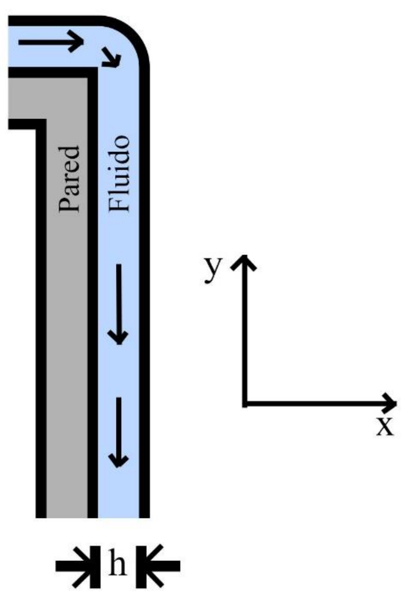

Figura 1.- Esquema de la caída de una capa de líquido de espesor h sobre una pared vertical infinitamente larga.

La pared se considera infinitamente ancha (z es infinito), de tal forma que el componente z del sistema de coordenadas se considera simétrico, es decir, cualquier corte que tomemos en z mostrará el mismo perfil de velocidad.

También se considera infinitamente alta (y es infinito), con lo cual se alcanza un flujo completamente desarrollado del líquido, es decir, el perfil de velocidad no cambia con la altura (no se considera el efecto ni del principio de la caída, ni del choque del líquido con el fondo).

El objetivo del cálculo, será obtener expresiones de la velocidad en dirección y (que depende de la posición $\boldsymbol{x}$), además de para la velocidad media, la velocidad máxima y el flujo másico del líquido, así como evaluar las mismas para distintos fluidos.

Planteamiento del modelo matemático

Suposiciones

Las suposiciones se obtienen de la descripción del problema, por ejemplo la pared por la que resbala el fluido es plana, por lo que se puede decir que el sistema coordenado es cartesiano. La pared es vertical y solo nos interesa la región donde el flujo es completamente desarrollado, por lo cual la dirección del fluido es solo en y. Y se observa que hay simetría en z.

El fluido es incompresible y newtoniano, además de que no se mueve por diferencias de presiones y la única fuerza que actúa sobre el mismo es la gravedad. Además se considera que el flujo es completamente desarrollado y es continuo, por lo que el estado del cálculo debe ser estacionario. El flujo se considera laminar, por lo que no es necesario considerar un modelo de turbulencia.

La lista de suposiciones entonces queda:

- Coordenadas cartesianas
- Flujo en 1D (dirección y)
- Fluido incompresible (ρ es constante).
- Fluido newtoniano (μ es constante).
- Estado estacionario (acumulación = 0).
- Flujo laminar.
- No existe diferencia de presiones en el sistema.
- Se considera el efecto de la gravedad en el sistema.
- Hay simetría en la dirección z (el perfil no cambia en esta dirección).

Ecuaciones gobernantes

Se debe realizar un balance de momento en el sistema, por lo cual se deben resolver la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier – Stokes en las direcciones de interés (en este caso únicamente en y). El flujo se restringió a laminar, por lo que no es necesario considerar un modelo de turbulencia, y el objetivo del cálculo no requiere de otra ecuación gobernante, por ejemplo, conservación de energía o de transporte de especies químicas. Dadas las suposiciones, solo se debe resolver la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier – Stokes en la dirección y. Hay que considerar que a las ecuaciones se les deben aplicar las suposiciones del modelo para obtener las ecuaciones que correspondan a nuestro sistema en particular.

Ecuación de continuidad:

Al tener la suposición de que el fluido es newtoniano e incompresible, además de que las coordenadas son cartesianas y no existe acumulación, se puede partir de la ecuación de continuidad para coordenadas cartesianas y densidad constante en estado estacionario (*Ecuación 1*):

$$\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Ahora bien dado que las componentes de la velocidad en x y en z son cero ($v_x = v_z = 0$), se puede simplificar a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (\mathbf{2})$$

Que es la ecuación de continuidad (conservación de masa) para nuestro sistema.

Ecuación de conservación de movimiento en dirección y:

Nuevamente con base a las suposiciones podemos partir del componente y de la ecuación de conservación de movimiento para fluidos incompresibles y newtonianos en coordenadas rectangulares (*Ecuación 3*):

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \qquad (\mathbf{3})$$

Ahora aplicamos las suposiciones pertinentes en la misma para obtener la ecuación gobernante para nuestro sistema en particular, empecemos por aplicar la condición de estado estacionario, con lo cual el término $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ se iguala a 0:

$$\rho\left(\cancel{v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+\cancel{v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \qquad (\mathbf{4})$$

Como las componentes en x y en z de la velocidad son cero ($v_x = v_z = 0$), la ecuación puede eliminar los términos que están multiplicados por estos componentes, quedando:

$$\rho\left(v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=\cancel{-\frac{\partial P}{\partial y}}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \qquad (\mathbf{5})$$

De la misma manera en las suposiciones se dijo que no hay diferencias de presión dentro del sistema, por lo que el término $-\frac{\partial P}{\partial y}$ también se puede considerar 0:

$$\rho\left(v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right)+\rho g_y \qquad (\mathbf{6})$$

El sistema es simétrico en z, por lo que el término $\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$ es 0, ya que no hay cambio en la velocidad en y cuando se recorre la pared en dirección z, por lo que la ecuación se simplifica aun más:

$$\rho\left(v_y\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}\right)+\rho g_y \qquad (\mathbf{7})$$

Ahora si acoplamos la *Ecuación 2* (ecuación de continuidad) con la *Ecuación 7* que es la ecuación que tenemos, podemos eliminar los términos $v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ con lo cual (por continuidad), la ecuación queda:

$$0=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\right)+\rho g_y \qquad (\mathbf{8})$$

Reordenando los términos, y observando que la derivada de la velocidad en dirección y solo depende de x, obtenemos la expresión que describe nuestro sistema:

$$-\mu\left(\frac{d^2 v_y}{dx^2}\right)=\rho g_y \qquad (\mathbf{9})$$

Que es válida en los límites del sistema que es: $0 \le y \le h$

Condiciones de frontera

Dado que la expresión a resolver (*Ecuación 9*) incluye una segunda derivada, es necesario tener por lo menos dos condiciones de frontera en el sistema para resolverla, si observamos el esquema presentado en la Figura 1 se pueden obtener las condiciones de frontera pertinentes. Recordemos que el sistema bajo estudio es el fluido, por lo que las condiciones tienen que pertenecer a este.

La primera condición de frontera la podemos colocar en la interfase entre el fluido y la pared ($x = 0$), debido a que en este punto hay una capa de líquido que obtiene la misma velocidad que la pared (denominada condición de no deslizamiento), y dado que la pared esta estacionaria, se puede escribir como:

$$CF1. \qquad v_y = 0 \qquad en \qquad x = 0 \qquad (\mathbf{10})$$

La segunda condición de frontera la observamos en la interfase entre el líquido y la atmósfera ($x = h$), se puede considerar que dada las diferencias de viscosidad tan grandes que hay entre un líquido y un gas, no hay transferencia de momento entre ambos materiales, por lo tanto:

$$CF2. \qquad \frac{dv_y}{dx} = 0 \qquad en \qquad x = h \qquad (\mathbf{11})$$

Condiciones Iniciales

Dado que el sistema se encuentra en estado estacionario, no es necesario colocar condiciones iniciales para describir al mismo.

Materiales

En la descripción del sistema se estipula que el fluido que resbala es newtoniano y laminar, pero no se centra en uno solo, por lo cual podemos considerar una gama de materiales y observar cómo influyen sus propiedades en la solución del sistema, los materiales a considerar se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1.- Propiedades físicas de diferentes materiales líquidos.

Material	ρ [Kg m^{-3}]	μ [Kg m^{-1} s^{-1}]	ν [m^2 s^{-1}]
Agua	1000	0.001	1.00×10^{-6}
Vidrio fundido	3000	10	0.0033
Acero fundido	7100	0.0065	0.92×10^{-6}

Metodología de solución

Comencemos por obtener una expresión para describir la velocidad en la dirección y en función de la posición x, para lo cual resolveremos la Ecuación 9 considerando las condiciones de frontera presentadas en la Ecuaciones 10 y 11:

$$-\mu\left(\frac{d^2 v_y}{dx^2}\right) = \rho g_y \qquad (\mathbf{9})$$

Reescribimos la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dv_y}{dx}\right) = -\frac{\rho g_y}{\mu} \qquad (\mathbf{12})$$

Separamos e integramos obteniendo:

$$\int d\left(\frac{dv_y}{dx}\right) = -\frac{\rho g_y}{\mu}\int dx \qquad (\mathbf{13})$$

$$\frac{dv_y}{dx} = -\frac{\rho g_y}{\mu}x + c_1 \qquad (\mathbf{14})$$

Ahora aplicamos la condición de frontera 2 (Ecuación 11), para obtener el valor de c_1:

$$(0) = -\frac{\rho g_y}{\mu}(h) + c_1 \qquad (\mathbf{15})$$

$$c_1 = \frac{\rho g_y h}{\mu} \qquad (\mathbf{16})$$

Por lo que queda la siguiente expresión:

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{\rho g_y h}{\mu} - \frac{\rho g_y}{\mu}x \qquad (\mathbf{17})$$

Nuevamente separamos e integramos:

$$\int dv_y = \frac{\rho g_y h}{\mu}\int dx - \frac{\rho g_y}{\mu}\int x dx \qquad (\mathbf{18})$$

$$v_y = \frac{\rho g_y h}{\mu}x - \frac{\rho g_y}{\mu}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2 \qquad (\mathbf{19})$$

Considerando la condición de frontera 1 (Ecuación 10) obtenemos el valor de c_2:

$$(0) = \frac{\rho g_y h}{\mu}(0) - \frac{\rho g_y}{\mu}\left(\frac{(0)^2}{2}\right) + c_2 \qquad \textbf{(20)}$$

$$c_2 = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior se obtiene:

$$v_y = \frac{\rho g_y h}{\mu} x - \frac{\rho g_y}{\mu}\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad \textbf{(22)}$$

Finalmente reagrupamos y obtenemos:

$$v_y(x) = \frac{\rho g_y}{2\mu}(2hx - x^2) \qquad \textbf{(23)}$$

La Ecuación 23 presenta muestra que la velocidad en y es función de la posición x del sistema ($v_y(x)$).

Para obtener el valor de velocidad máxima, observemos que la velocidad cercana a la pared es 0 (Ecuación 10), por lo que la velocidad máxima debe estar en el punto del sistema más alejado de la misma, es decir en $x = h$, por lo que la velocidad máxima es:

$$v_{y,max} = \frac{\rho g_y h^2}{2\mu} \qquad \textbf{(24)}$$

Para obtener el valor de velocidad media, podemos hacer uso del teorema del valor medio:

$$\bar{v}_y = \frac{\int_0^h v_y(x)dx}{\int_0^h dx} = \frac{\int_0^h \frac{\rho g_y}{2\mu}(2hx - x^2)dx}{\int_0^h dx} \qquad \textbf{(25)}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\frac{\rho g_y}{2\mu}\int_0^h (2hx - x^2)dx}{h} = \frac{\frac{\rho g_y}{2\mu}\left[hx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^h}{h} \qquad \textbf{(26)}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\rho g_y h^2}{3\mu} \qquad \textbf{(27)}$$

Para obtener el flujo másico partimos del valor de velocidad media y de que:

$$\dot{m} = \rho A_{\perp} \bar{v}_y \qquad (\mathbf{28})$$

Observemos que el $A_{\perp}$ en este caso es igual a h, ya que z es infinitamente largo, por lo que se puede considerar unitario, por lo cual:

$$\dot{m} = \rho h \bar{v}_y \qquad (\mathbf{29})$$

Quedando la expresión para el flujo másico como:

$$\dot{m} = \frac{\rho^2 g_y h^3}{3\mu} \qquad (\mathbf{30})$$

Con lo cual obtenemos todos los objetivos de cálculo del problema: velocidad en función de la posición en la Ecuación 23, la velocidad máxima del sistema en la Ecuación 24, la velocidad media del sistema en la Ecuación 27 y el flujo másico en la Ecuación 30.

Estas ecuaciones están restringidas para un flujo laminar, así que hay que considerar el número de Reynolds para este sistema que es:

$$N_{Re,capa} = \frac{\rho \bar{v}_y 4h}{\mu} \qquad (\mathbf{31})$$

Donde la longitud característica del sistema es $4h$.

En este sistema el flujo laminar se tiene cuando:

$$N_{Re,capa} < 20 \qquad (\mathbf{32})$$

El flujo de transición donde se comienzan a formar pequeños remolinos en la superficie de la capa y que se van volviendo más profundos entre más se incremente en número de Reynolds está en los límites:

$$20 \leq N_{Re,capa} \leq 2000 \qquad (\mathbf{33})$$

Y el flujo es completamente turbulento cuando:

$$N_{Re,capa} > 2000 \qquad (\mathbf{34})$$

Por lo que el espesor de la capa, está en función de la velocidad media y de las propiedades físicas del fluido, cumpliendo siempre con la condición de la Ecuación 34.

Resultados

Como resultados hay que evaluar los materiales presentados en la Tabla 1 y observar las diferencias que presentan en su comportamiento en base a sus propiedades físicas. Para ello se fija el número de Reynolds en el régimen laminar, en este caso se evaluara un número de Reynolds de 20 (límite del flujo laminar). Esto con el fin de obtener:

a) El espesor de capa h.
b) El perfil de velocidad evaluando por lo menos 10 puntos de x, en el dominio del sistema.
c) La velocidad máxima de la capa.
d) La velocidad media de la capa.
e) El flujo másico de la capa.

Una vez obtenidos los resultados, ordenarlos y comentar las diferencias entre los materiales y como afecta el número de Reynolds los resultados.

Comencemos calculando agua con un $N_{Re,capa} = 20$ (nota, la gravedad se considera 9.81, pero recuerden que la dirección del flujo es negativa en cuanto a y).

a) Comenzamos calculando el espesor de la capa que cae, para ello empleamos el número de Reynolds y la expresión calculada para la velocidad promedio del fluido.

$$h = 0.000115m = 0.1152mm$$

b) Para obtener el perfil de velocidad, que es una forma de representar la velocidad del fluido, sustituimos diversos valores de la posición x en la expresión que describe la velocidad en y en función de la posición, esto dentro de los límites de 0 y h. La Tabla 2 presenta los valores calculados, mientras que la Figura 2 muestra el perfil de velocidad obtenido.

Tabla 2.- Resultados del perfil de velocidad.

Puntos	x [m]	$v_y(x)$ [m s^{-1}]
0	0.000000	0.0000
1	0.000012	-0.0124
2	0.000023	-0.0234
3	0.000035	-0.0332
4	0.000046	-0.0417
5	0.000058	-0.0488
6	0.000069	-0.0547
7	0.000081	-0.0592
8	0.000092	-0.0625
9	0.000104	-0.0644
10	0.000115	-0.0651

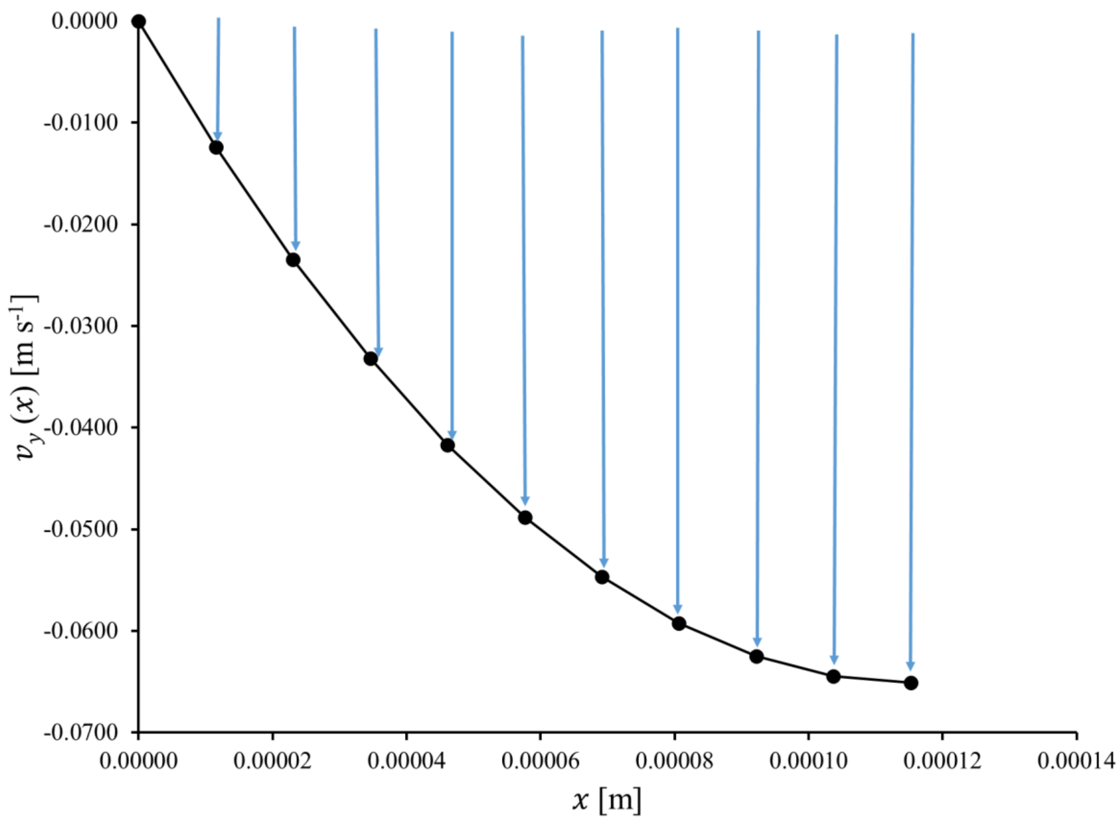

Figura 2.- Perfil de velocidad del agua en la dirección y.

c) Calculamos la velocidad máxima:

$$v_{y,max} = \frac{\rho g_y h^2}{2\mu} = -0.0651\,\frac{m}{s}$$

d) Calculamos la velocidad promedio:

$$\bar{v}_y = \frac{\rho g_y h^2}{3\mu} = -0.0434\ \frac{m}{s}$$

e) Calculamos el flujo másico del agua que cae:

$$\dot{m} = \frac{\rho^2 g_y h^3}{3\mu} = -0.0075\,\frac{kg}{s}$$

Nota: Recuerden usar las unidades correspondientes, en el caso del flujo másico, va multiplicado por 1m para que les de las unidades de kg/s debido a que se considera que z es infinito.

La Figura 3 muestra los perfiles de velocidad para el acero fundido y el agua. Se puede ver que ambos son similares tanto en espesor, como en magnitud, esto se debe principalmente a que la viscosidad cinemática (ver Tabla 1) es similar en ambos materiales, por lo que ambos tienen un movimiento similar ante la misma fuerza, en este caso la aceleración de la gravedad. Es debido a esta similitud que es posible emplear agua para simular acero en modelos físicos.

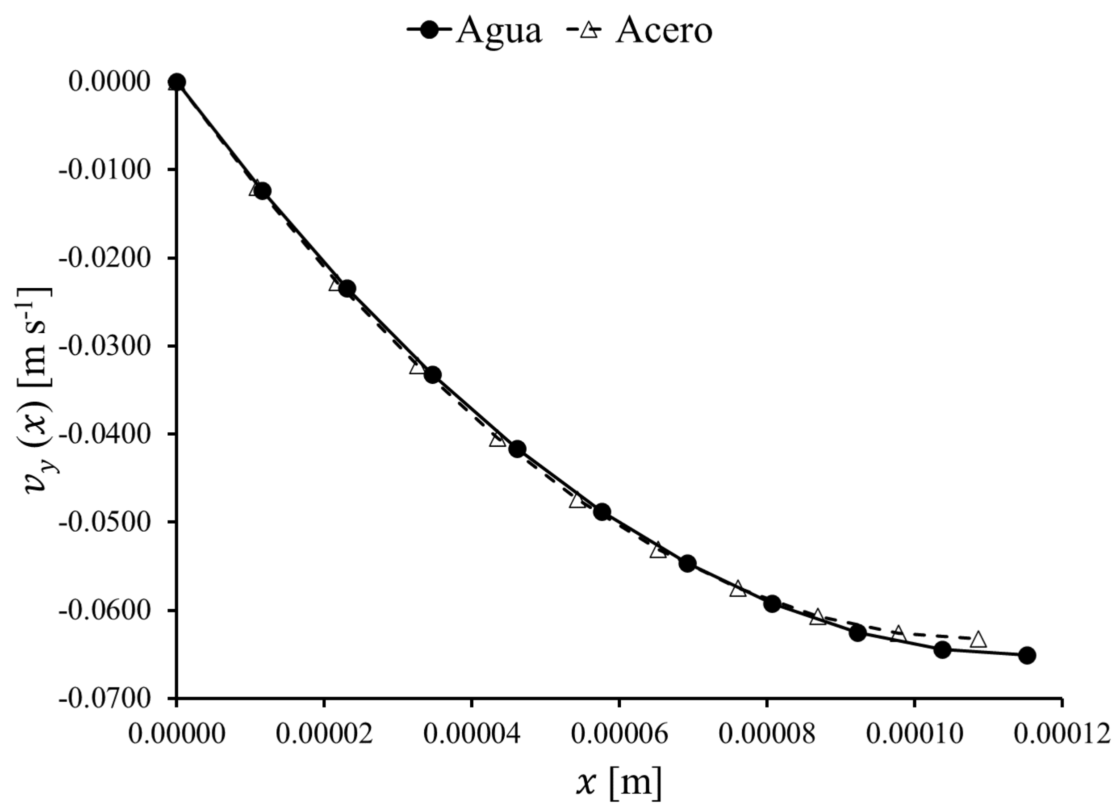

Figura 3.- Perfil de velocidad del agua y el acero fundido en dirección y.

La Figura 4 muestra los perfiles de velocidad para el agua y el vidrio fundido, nótese que en este caso son muy diferentes tanto en espesor de la capa, como en la magnitud de la velocidad. Esta gran diferencia es principalmente a la diferencia en viscosidad que presentan ambos materiales, recordemos que esta da una idea de la facilidad o dificultad que presenta un material para transferir momentum, en el caso del vidrio, se requiere mucho mayor momentum para que el flujo sea turbulento, ya que su viscosidad es muy grande, esto en comparación con el agua. Debido a esto la capa que puede llegar a presentar flujo laminar es mucho mayor, al igual que la velocidad que alcanza.

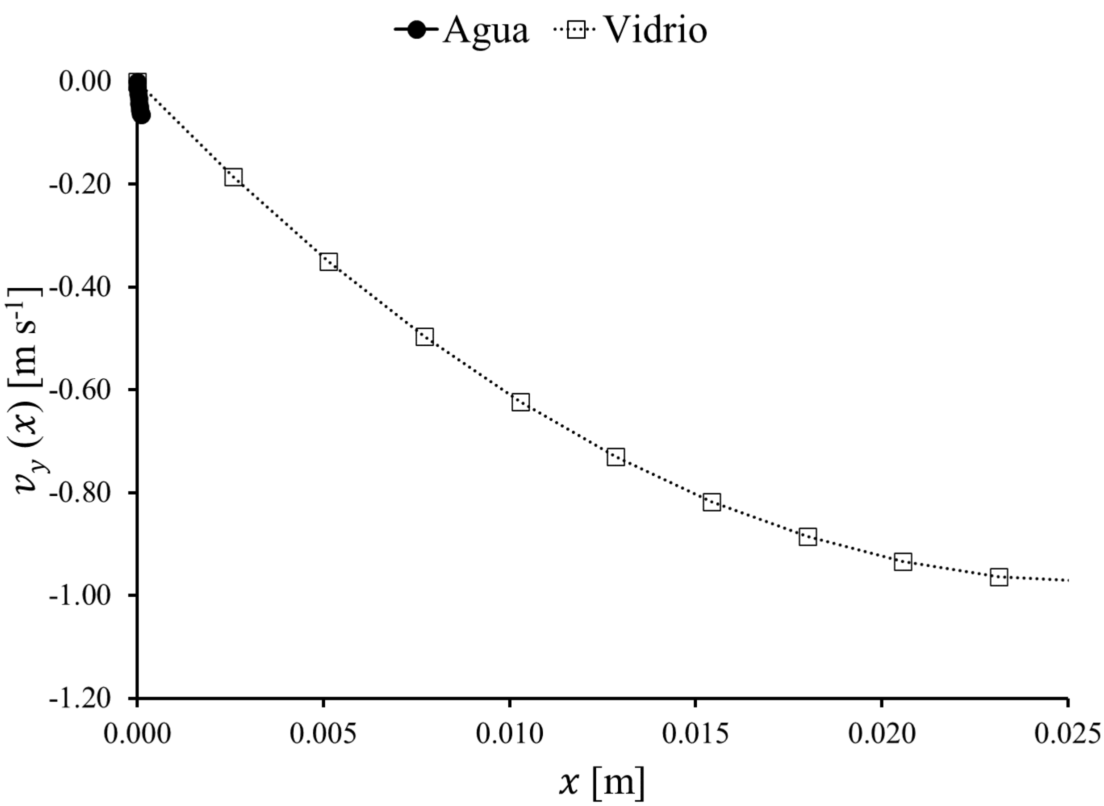

Figura 4.- Perfil de velocidad del agua y el vidrio fundido en dirección y.