

Ejemplo de Balance Microscópico de Momentum
(Alambrón)

El ejemplo consiste en plantear un balance microscópico de momentum en aceite que se encuentra dentro de un tubo vertical y que es arrastrado por un alambón ubicado en el centro geométrico del mismo paralelo a la dirección del tubo, manteniendo un flujo laminar, el objetivo es obtener el perfil de velocidad del aceite en una zona de flujo desarrollado.

Planteamiento del problema

Durante un proceso de extrusión continuo se hace pasar alambón de cobre por el centro de un tubo de sección redonda, a una velocidad baja (flujo laminar), con el fin de recubrirlo con una pequeña capa de aceite que sirva de lubricante en el resto del proceso. El aceite se considera incompresible y newtoniano, sin embargo, sus propiedades cambian con la temperatura. Nuestro objetivo es realizar un modelo matemático que describa el movimiento del aceite dentro del tubo y analizar cómo afecta la temperatura y la dirección del alambre el perfil de velocidad obtenido.

La Figura 1 presenta un esquema del proceso descrito. Se considerará que el tubo se encuentra vertical, y que el sistema es suficientemente largo para lograr tener un flujo completamente desarrollado, por lo que el efecto de la gravedad será importante. El modelo considerará un flujo laminar en estado estacionario.

Es importante señalar, que a pesar de que las propiedades se consideran dependientes de la temperatura, el proceso es isotérmico, es decir, el sistema trabaja a una temperatura constante. Nos interesa analizar el efecto de la temperatura y de la velocidad del alambón sobre la fluidodinámica del sistema.



Figura 1.- Esquema del proceso para recubrir un alambón con una capa delgada de aceite.

Planteamiento del modelo matemático

El modelo matemático que se planteará debe considerar la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes, dado que únicamente nos interesa el transporte de momentum en el sistema.

Suposiciones

Para el modelo matemático se consideran las siguientes suposiciones:

- Flujo laminar
- El sistema es isotérmico
- Coordenadas cilíndricas
- Flujo en 1D (z)
- Fluido incompresible y newtoniano
- Estado estacionario
- Flujo completamente desarrollado
- Se considera simetría angular (axisimétrico)
- Se considera el efecto de la gravedad
- La diferencia de presión es despreciable

La Figura 2 presenta un esquema de las suposiciones de simetría angular y flujo completamente desarrollado.

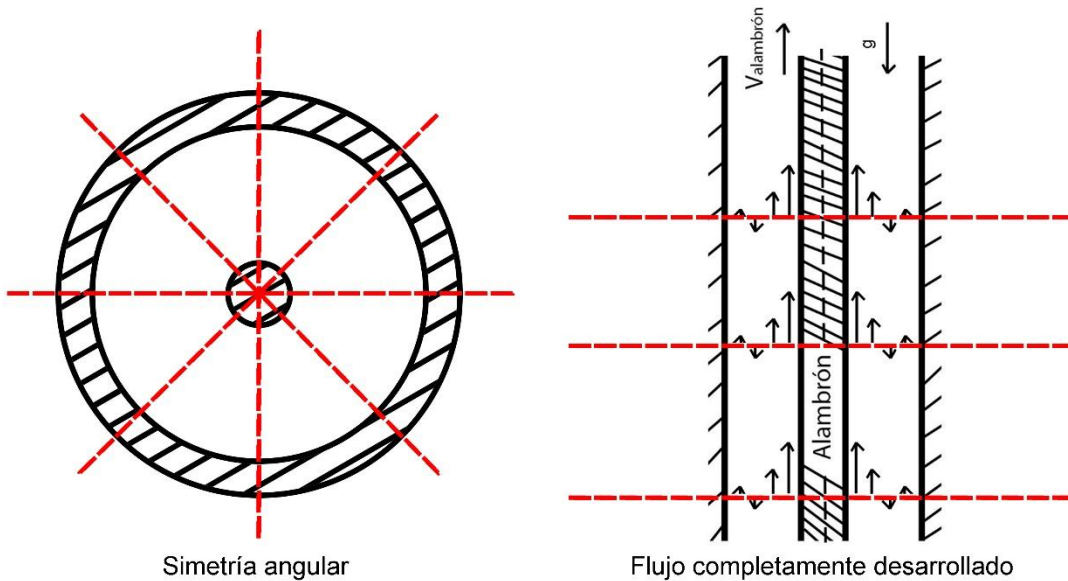


Figura 2.- Esquema de simetría angular y flujo completamente desarrollado.

Ecuaciones gobernantes

Dado que el balance de momentum se hace sobre un sistema con flujo laminar, se deben resolver la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes.

Ecuación de continuidad:

Se empleará la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dado que el modelo considera estado estacionario podemos eliminar el término asociado con la acumulación, que multiplicando ambos lados de la ecuación por -1 queda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Considerando que el fluido es incompresible la expresión puede tomar la siguiente forma, sacando la densidad de las diferenciales y dividiendo ambos términos de la ecuación sobre la misma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

Dado que el flujo es únicamente en una dirección la velocidad en las direcciones r y θ es cero, por lo tanto:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Que es la ecuación de continuidad (conservación de masa) para nuestro modelo matemático.

Ecuación de conservación de momento en dirección z:

Considerando las suposiciones podemos emplear la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible y newtoniano en coordenadas cilíndricas y dirección z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Comencemos eliminando el término correspondiente a la acumulación dado que el modelo considera estado estacionario:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Luego considerando que la velocidad radial y angular es cero, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Dado que la diferencia de presión se puede despreciar, podemos llegar la siguiente expresión:

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Dado que el sistema tiene simetría angular, podemos considerar que la velocidad en dirección z no varía con el ángulo θ :

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Finalmente acoplamos la ecuación de continuidad con la ecuación de Navier-Stokes, llegando a:

$$0 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z$$

Y llegado a este punto, dado que la velocidad en dirección z solo depende de la posición radial se llega finalmente a la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Que es válida en los límites del sistema que son: $kR < r < R$

Condiciones de frontera

En este caso las fronteras del sistema son la pared interna del tubo ($r = R$) y la pared externa del alambrión ($r = kR$), la Figura 3 presenta una vista frontal del sistema, mientras que la Figura 1 presenta una vista frontal del mismo.

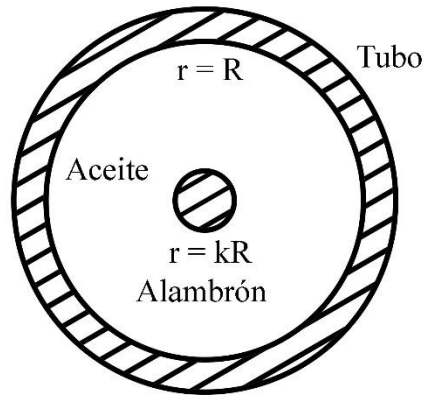


Figura 3.- Vista frontal del proceso de recubrimiento de un alambrión con una capa delgada de aceite.

En este caso, al tener dos fronteras en donde existe condición de no deslizamiento en ambas paredes, tenemos dos condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

CF1:

$$v_z|_{r=kR} = V_{alambrión} \frac{m}{s}$$

CF2:

$$v_z|_{r=R} = 0 \frac{m}{s}$$

Las cuales emplearemos para obtener el modelo matemático al resolver la ecuación gobernante obtenida.

Condiciones Iniciales

Dado que el sistema se encuentra en estado estacionario, no es necesario colocar condiciones iniciales para describir el mismo.

Materiales

En este caso se considerará que el alambrión estará rodeado por aceite SAE 10W-60, las propiedades del mismo cambian con la temperatura, la Tabla 1 presenta la viscosidad cinemática, la viscosidad dinámica y la densidad para dicho aceite a diferentes temperaturas.

Tabla 1.- Propiedades físicas para un aceite SAE 10W-60.

Temperatura (°C)	Viscosidad dinámica (mPa s)	Viscosidad cinemática (mm ² /s)	Densidad (g/cm ³)
0	1453.80	1684.40	0.8631
10	712.34	831.44	0.8568
20	381.08	448.10	0.8504
30	220.06	260.69	0.8442
40	135.52	161.73	0.8380
50	88.55	106.47	0.8318
60	60.60	73.41	0.8256
70	43.23	52.77	0.8193
80	31.95	39.29	0.8130
90	24.31	30.13	0.8069
100	18.99	23.72	0.8008

Metodología de solución

Procederemos a resolver la ecuación gobernante mediante el método de separación de variables:

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} r dr = d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$-\frac{\rho g_z}{\mu} \int r dr = \int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$-\frac{\rho g_z}{2\mu} r^2 + c_1 = r \frac{dv_z}{dr}$$

$$-\frac{\rho g_z}{2\mu} r + \frac{c_1}{r} = \frac{dv_z}{dr}$$

$$\left(-\frac{\rho g_z}{2\mu} r + \frac{c_1}{r} \right) dr = dv_z$$

$$\int \left(-\frac{\rho g_z}{2\mu} r + \frac{c_1}{r} \right) dr = \int dv_z$$

$$v_z = -\frac{\rho g_z}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

Ahora sustituimos las condiciones de frontera en la ecuación para obtener el valor de las constantes de integración:

CF1:

$$V_{alambción} = -\frac{\rho g_z}{4\mu} (kR)^2 + c_1 \ln kR + c_2$$

CF2:

$$0 = -\frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 + c_1 \ln R + c_2$$

Por lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, comencemos despejando la segunda constante de la segunda ecuación:

$$c_2 = \frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 - c_1 \ln R$$

Sustituimos en la segunda y resolvemos para obtener el valor de la primera constante:

$$V_{alambción} = -\frac{\rho g_z}{4\mu} (kR)^2 + c_1 \ln kR + \frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 - c_1 \ln R$$

$$c_1 \ln R - c_1 \ln kR = \frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 - \frac{\rho g_z}{4\mu} (kR)^2 - V_{alambción}$$

$$c_1 (\ln R - \ln kR) = \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 (1 - k^2) - V_{alambción}$$

$$c_1 \left(\ln \frac{R}{kR} \right) = \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 (1 - k^2) - V_{alambción}$$

$$c_1 (-\ln k) = \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 (1 - k^2) - V_{alambción}$$

$$c_1 = \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k}$$

Ahora sustituimos en la primera expresión para obtener el valor de la segunda constante:

$$c_2 = \frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 - \left[\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k} \right] \ln R$$

Sustituimos el valor de ambas constantes en la expresión para la velocidad en dirección z:

$$v_z = -\frac{\rho g_z}{4\mu} r^2 + \left[\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k} \right] \ln r + \frac{\rho g_z}{4\mu} (R)^2 - \left[\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k} \right] \ln R$$

$$v_z = \frac{\rho g_z}{4\mu} (R^2 - r^2) + \left[\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k} \right] (\ln r - \ln R)$$

$$v_z = \frac{\rho g_z}{4\mu} (R^2 - r^2) + \left[\frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k} \right] \left(\ln \frac{r}{R} \right)$$

Esta expresión sirve para calcular la velocidad del aceite en dirección z y es función de la posición radial. Con el fin de hacer más manejable la expresión, la reescribiremos como:

$$v_z = A(R^2 - r^2) + B \left(\ln \frac{r}{R} \right)$$

Donde A y B son constantes:

$$A = \frac{\rho g_z}{4\mu}$$

$$B = \frac{\rho g_z}{4\mu} R^2 \frac{(k^2 - 1)}{\ln k} + \frac{V_{alambción}}{\ln k}$$

Adicionalmente a la expresión de la velocidad, vamos a obtener una expresión para la velocidad media y la velocidad mínima que puede presentar la capa de aceite. Para la velocidad promedio podemos usar el teorema del valor medio:

$$\bar{v}_z = \frac{\int_{kR}^R v_z 2\pi r dr}{\int_{kR}^R 2\pi r dr}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_{kR}^R \left[A(R^2 - r^2) + B \left(\ln \frac{r}{R} \right) \right] 2\pi r dr}{\int_{kR}^R 2\pi r dr}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \int_{kR}^R [AR^2 r - Ar^3 + Br \ln r - Br \ln R] dr}{2\pi \int_{kR}^R r dr}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \left[AR^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R - A \frac{r^4}{4} \Big|_{kR}^R + B \int_{kR}^R r \ln r dr - B \frac{r^2}{2} \ln R \Big|_{kR}^R \right]}{2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R}$$

Aplicamos un cambio de variable

$$U = \ln r$$

$$dU = dr/r$$

$$dV = r$$

$$V = r^2/2$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \left[AR^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R - A \frac{r^4}{4} \Big|_{kR}^R + B \left(\frac{r^2 \ln r}{2} \Big|_{kR}^R - \int_{kR}^R \frac{r}{2} dr \right) - B \frac{r^2}{2} \ln R \Big|_{kR}^R \right]}{2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \left[AR^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R - A \frac{r^4}{4} \Big|_{kR}^R + B \frac{r^2 \ln r}{2} \Big|_{kR}^R - B \frac{r^2}{4} \Big|_{kR}^R - B \frac{r^2}{2} \ln R \Big|_{kR}^R \right]}{2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{kR}^R}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \left[AR^2 \frac{R^2}{2} - AR^2 \frac{k^2 R^2}{2} - A \frac{R^4}{4} + A \frac{k^4 R^4}{4} + B \frac{R^2 \ln R}{2} - B \frac{k^2 R^2 \ln kR}{2} - B \frac{R^2}{4} + B \frac{k^2 R^2}{4} - B \frac{R^2}{2} \ln R + B \frac{k^2 R^2}{2} \ln R \right]}{2\pi \frac{R^2}{2} - 2\pi \frac{k^2 R^2}{2}}$$

$$\bar{v}_z = \frac{2\pi \left[A \frac{R^4}{2} - Ak^2 \frac{R^4}{2} - A \frac{R^4}{4} + Ak^4 \frac{R^4}{4} + B \frac{R^2}{2} \ln R - Bk^2 \frac{R^2}{2} \ln kR - B \frac{R^2}{4} + Bk^2 \frac{R^2}{4} - B \frac{R^2}{2} \ln R + Bk^2 \frac{R^2}{2} \ln R \right]}{2\pi \left[\frac{R^2}{2} - k^2 \frac{R^2}{2} \right]}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\pi \left[AR^4 - Ak^2 R^4 - A \frac{R^4}{2} + Ak^4 \frac{R^4}{2} + BR^2 \ln R - Bk^2 R^2 \ln kR - B \frac{R^2}{2} + Bk^2 \frac{R^2}{2} - BR^2 \ln R + Bk^2 R^2 \ln R \right]}{\pi [R^2 - k^2 R^2]}$$

$$\bar{v}_z = \frac{AR^2 - Ak^2 R^2 - A \frac{R^2}{2} + Ak^4 \frac{R^2}{2} + B \ln R - Bk^2 \ln kR - \frac{B}{2} + \frac{Bk^2}{2} - B \ln R + Bk^2 \ln R}{1 - k^2}$$

$$\bar{v}_z = \frac{A \frac{R^2}{2} - Ak^2 R^2 + Ak^4 \frac{R^2}{2} + \frac{B}{2} (k^2 - 1) + Bk^2 \ln \frac{R}{kR}}{1 - k^2}$$

$$\bar{v}_z = \frac{A \frac{R^2}{2} (1 - k^2)^2 - \frac{B}{2} (1 - k^2) + Bk^2 \ln \frac{1}{k}}{1 - k^2}$$

$$\bar{v}_z = A \frac{R^2}{2} (1 - k^2) - B \left(\frac{1}{2} + k^2 \frac{\ln k}{1 - k^2} \right)$$

Para obtener la velocidad mínima del fluido, hay que obtener el punto crítico de la función de la velocidad en donde la derivada adquiere un valor de cero:

$$\frac{dv_z}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[A(R^2 - r^2) + B \left(\ln \frac{r}{R} \right) \right] = 0$$

$$-2Ar + \frac{B}{r} = 0$$

$$\frac{B}{r} = 2Ar$$

$$B = 2Ar^2$$

$$r = \sqrt{\frac{B}{2A}}$$

Ahora sustituimos el valor que obtuvimos de radio en la expresión de la velocidad para obtener la velocidad mínima:

$$v_{z,min} = A \left(R^2 - \frac{B}{2A} \right) + B \left(\ln \frac{\sqrt{\frac{B}{2A}}}{R} \right)$$

Para calcular el número de Reynolds se usa la siguiente expresión:

$$N_{Re} = \frac{\rho |\bar{v}_z| L}{\mu}$$

Donde la longitud característica L se calcula mediante el diámetro hidráulico:

$$L = D_h = \frac{4A_{\perp}}{P_{Mojado}}$$

$$L = \frac{4 \int_{kR}^R 2\pi r dr}{2\pi kR + 2\pi R}$$

$$L = \frac{4\pi[R^2 - k^2 R^2]}{2\pi[kR + R]}$$

$$L = \frac{2R(1 - k^2)}{k + 1}$$

$$L = \frac{2R(1 - k)(1 + k)}{k + 1}$$

$$L = 2R(1 - k)$$

Por lo que el número de Reynolds se calcula con la expresión:

$$N_{Re} = \frac{2\rho |\bar{v}_z| R(1 - k)}{\mu}$$

En este sistema los límites de Reynolds [1] para los regímenes de flujo son:

$$\text{Flujo laminar } N_{Re} < 800$$

$$\text{Régimen de transición } 800 \leq N_{Re} \leq 10,000$$

$$\text{Flujo turbulento } N_{Re} > 10,000$$

[1] Rothfus, R. R., Sartory, W. K., & Kermode, R. I. (1966). Flow in concentric annuli at high Reynolds numbers. *AIChE Journal*, 12(6), 1086-1091.

Resultados

Comencemos analizando el efecto de la temperatura sobre el patrón de flujo, para ello consideremos un caso en donde el radio interno de la tubería es 5 cm, el alambión abarca $\frac{1}{4}$ del diámetro del tubo, es decir, k es 0.25 y la velocidad del alambre es de 1 m/s.

La Figura 4 muestra el perfil de velocidades cuando la temperatura del aceite es de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y la Figura 5 lo muestra para una temperatura de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. En estos mismo también se marca la velocidad mínima alcanzada y la velocidad promedio. Observemos primeramente que el perfil de velocidad en la Figura 4 cumple con las condiciones de frontera planteadas, es decir, en kR tiene un valor de 1 m/s y en R tiene un valor de 0 m/s. El perfil tiene en las cercanías al alambión una velocidad positiva, pero conforme se aleja del mismo se vuelve negativa, para finalmente llegar a un valor de cero. Esto es debido a que el alambión arrastra el fluido debido a su movimiento, sin embargo, al tener la gravedad en sentido contrario este provoca que el fluido tenga una fuerza de cuerpo que provoca una velocidad negativa en las regiones alejadas a las paredes en donde existe la condición de no deslizamiento.

Otro apunte importante es que la velocidad promedio aparentemente no es el promedio de los puntos graficados, esto se debe a que al trabajar en coordenadas cilíndricas el área afecta la forma en la que la velocidad se ve promediada, siendo mayor el aporte entre más grande sea el valor de la posición radial.

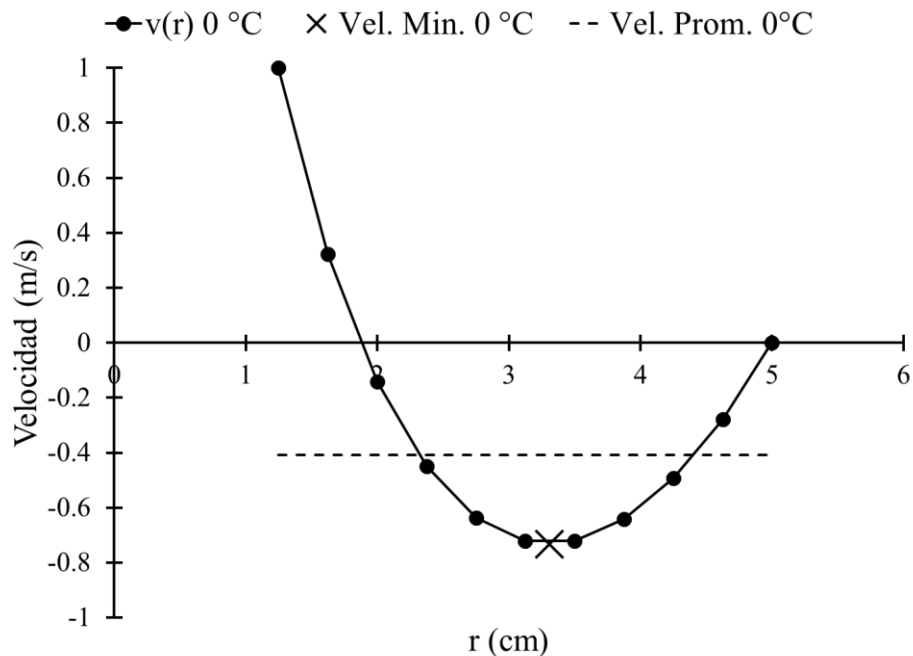


Figura 4.- Perfil de velocidad, velocidad mínima y velocidad promedio para un proceso de recubrimiento de un alambión con aceite lubricante a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Con respecto al valor de la temperatura se observa que al incrementarse la misma, tanto la densidad como la viscosidad se ven afectadas, haciendo que la transferencia de momentum

dentro del fluido se ve beneficiada, esto lleva a que el efecto de la gravedad se vea potenciado, dando un perfil mucho más pronunciado hacia los valores negativos, aunque las condiciones en las fronteras se siguen cumpliendo. Bajo estas condiciones el número de Reynolds a 0 °C es 23.27, mientras que a 20 °C es de 464.58, el cambio es bastante significativo, ya que tanto las propiedades físicas como la velocidad promedio se ven modificadas.

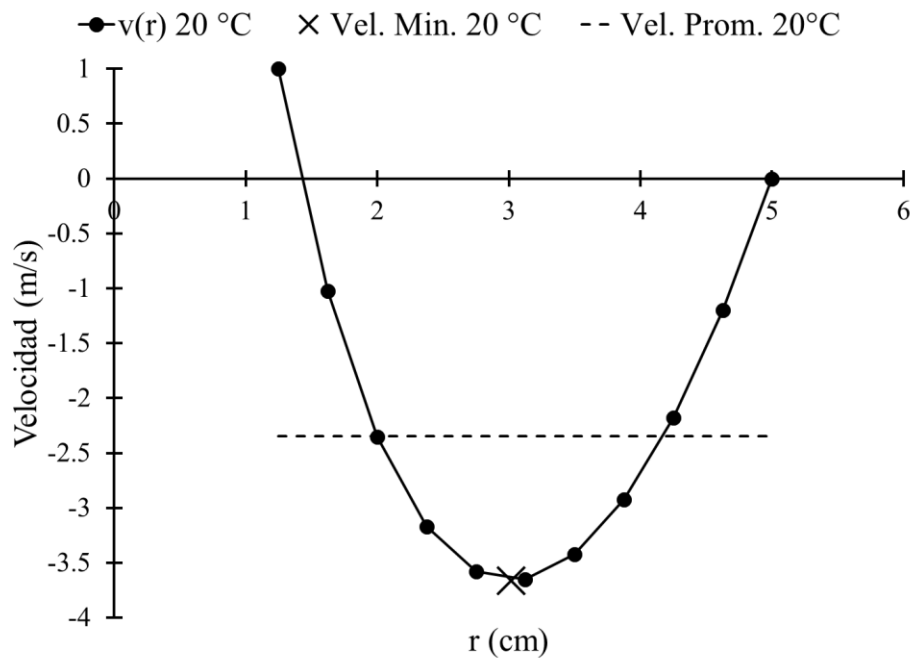


Figura 5.- Perfil de velocidad, velocidad mínima y velocidad promedio para un proceso de recubrimiento de un alambón con aceite lubricante a 20 °C.

La Figura 6 presenta el perfil de velocidad a 20°C para distintas velocidades en el alambón, puede verse en términos generales que la forma del perfil no se ve muy modificada, se ven las dos paredes del sistema que arrastran el fluido y el efecto de la fuerza de gravedad sobre el mismo. Hay un ligero efecto sobre la velocidad promedio, siendo de -2.77 m/s, -3.07 m/s y -3.47 m/s para velocidades de alambón de 1 m/s, 0 m/s y -1 m/s respectivamente. Por lo que el número de Reynolds también se ve modificado, presentando valores de 464.58, 513.79 y 563.00 conforme la velocidad del alambón se vuelve más negativa, es decir, al tener un valor absoluto de la velocidad promedio mayor, el número de Reynolds se ve incrementado a pesar de que las propiedades físicas se conservan.

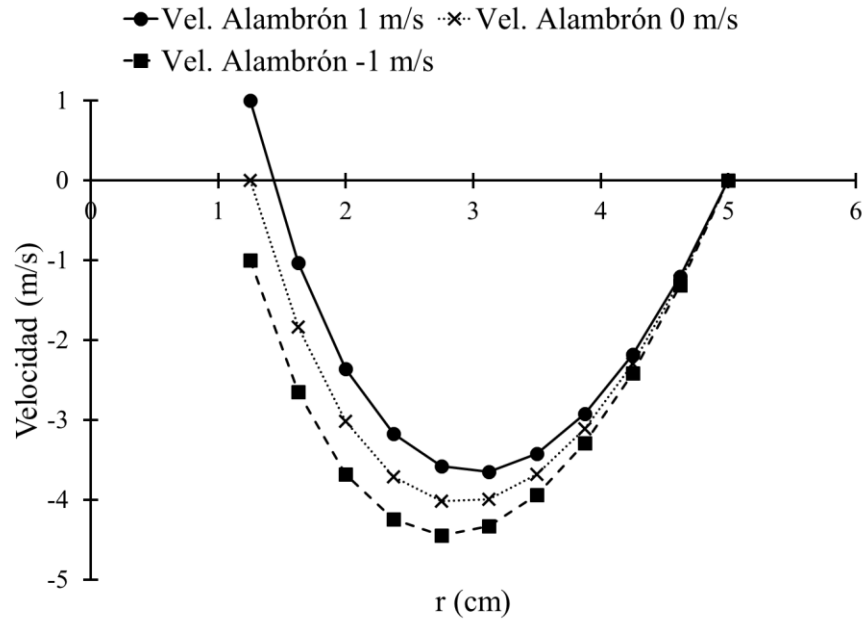


Figura 6.- Perfil de velocidad, velocidad mínima y velocidad promedio para un proceso de recubrimiento de un alambión con aceite lubricante a 20 °C, con diferentes valores de velocidad en el alambión.

Es interesante explorar un poco más el efecto de modificar algunas variables del proceso, para ello consideremos un segundo caso en donde R es 0.75 cm, k es 0.1 y la velocidad del alambre es nuevamente 1 m/s.

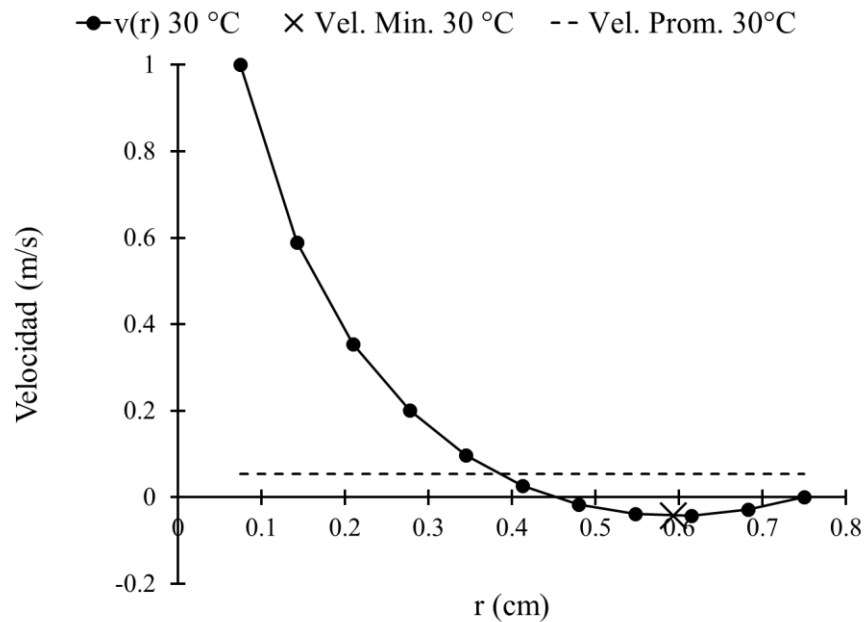


Figura 7.- Perfil de velocidad, velocidad mínima y velocidad promedio para un proceso de recubrimiento de un alambión con aceite lubricante a 30 °C.

La Figura 7 presenta el perfil de velocidad para las condiciones previamente descritas a 30 °C, mientras que la Figura 8 lo presenta a 100 °C. Vemos que en términos generales el comportamiento se mantiene, pero al existir una menor distancia entre ambas paredes se requiere de mayor temperatura para que el efecto de la gravedad sea mayor, presentando incluso una velocidad promedio positiva a bajas temperaturas. Es importante señalar que el número de Reynolds a 100 °C es un poco mayor a 800, pero lo que en principio entraríamos en régimen de transición y el modelo no predice adecuadamente el perfil de velocidad a esta temperatura, pero podemos considerar que es una estimación adecuada.

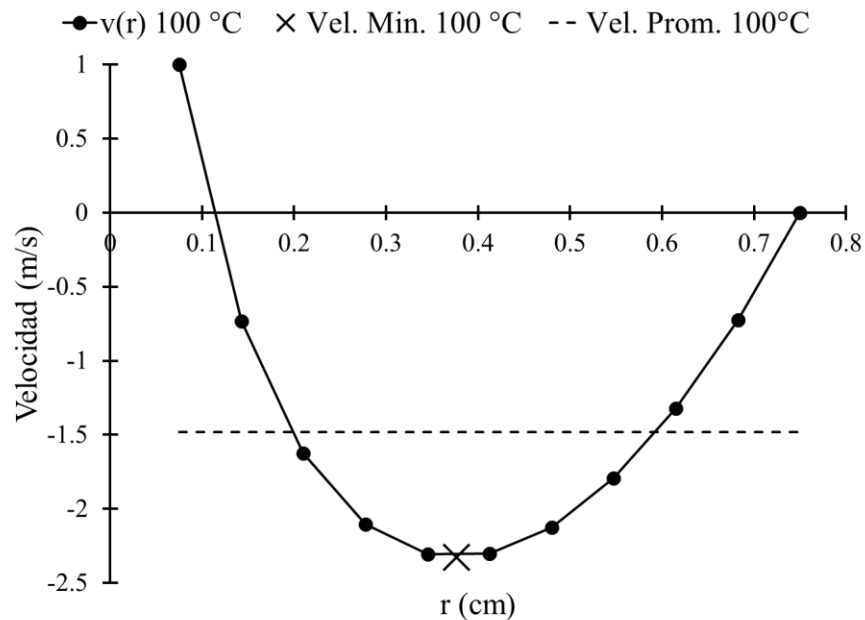


Figura 8.- Perfil de velocidad, velocidad mínima y velocidad promedio para un proceso de recubrimiento de un alambrcn con aceite lubricante a 100 °C.

Finalmente, las Figuras 9 y 10 presentan a diferentes temperaturas la velocidad promedio y el número de Reynolds respectivamente. En la Figura 9 se observa que conforme la temperatura se incrementa, la velocidad promedio disminuye, esto principalmente al cambio en el valor de la viscosidad, presentando el aceite una mayor facilidad de ser afectado por la fuerza de gravedad, entre menor sea el valor de la viscosidad.

El hecho de que las propiedades físicas del aceite cambien con la temperatura, no solo modifica la velocidad media del aceite, sino que también modifica el valor del número de Reynolds, en términos generales, salvo en el caso de 100°C (ver Figura 10) el régimen se mantiene laminar, sin embargo, es muy notorio que en el punto en que la velocidad promedio empieza a ser negativa, es decir, el punto en que la viscosidad es suficientemente baja para que el efecto de la gravedad sobrepase la fuerza de arrastre del alambrcn, el número de Reynolds comienza a crecer exponencialmente.

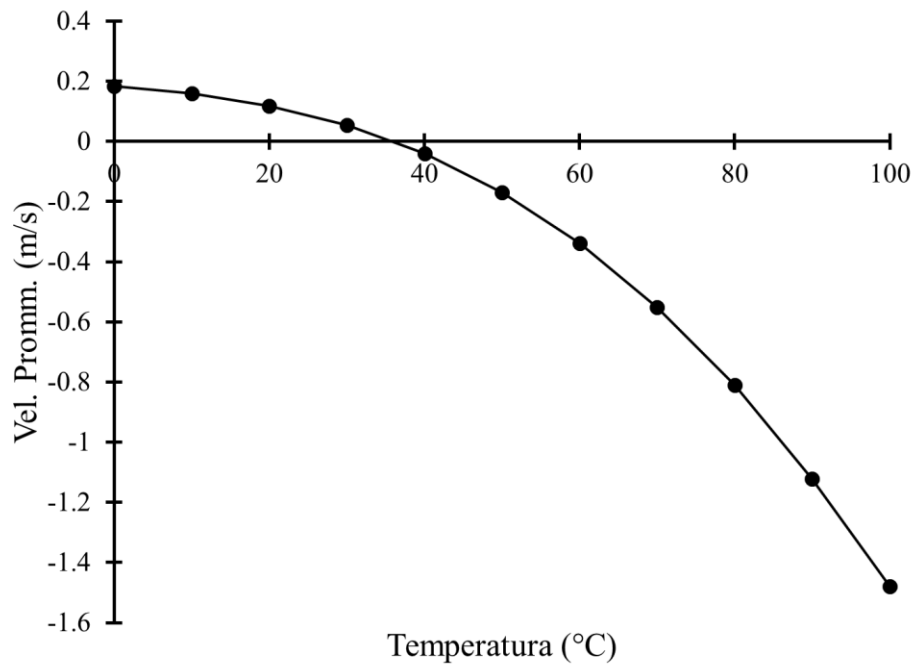


Figura 9.- Variación en la velocidad promedio del aceite con respecto a la temperatura.

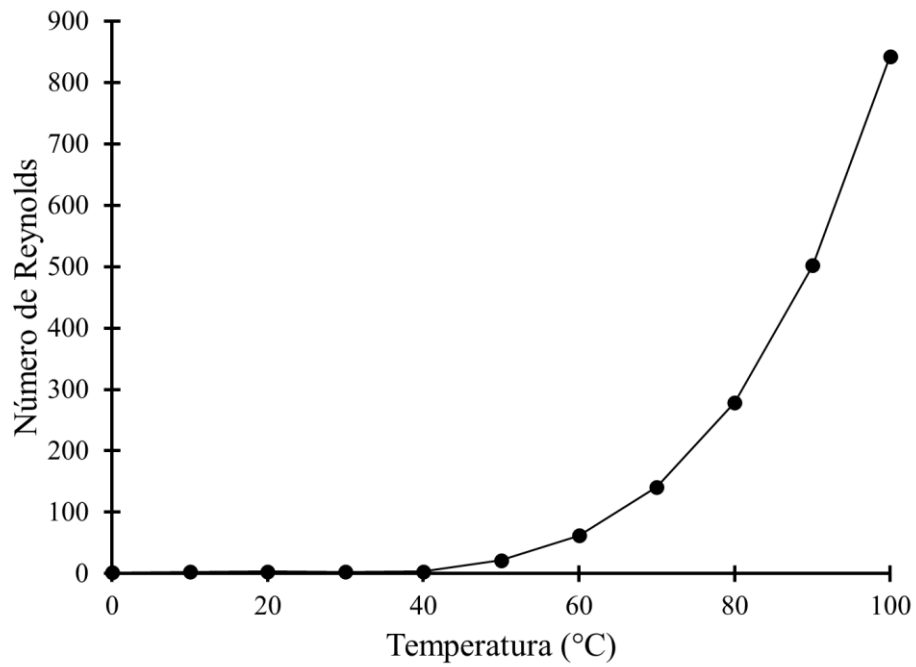


Figura 10.- Variación en el número de Reynolds del flujo de aceite con la temperatura.