

Transporte de Energía

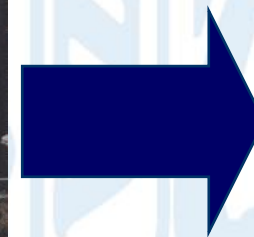
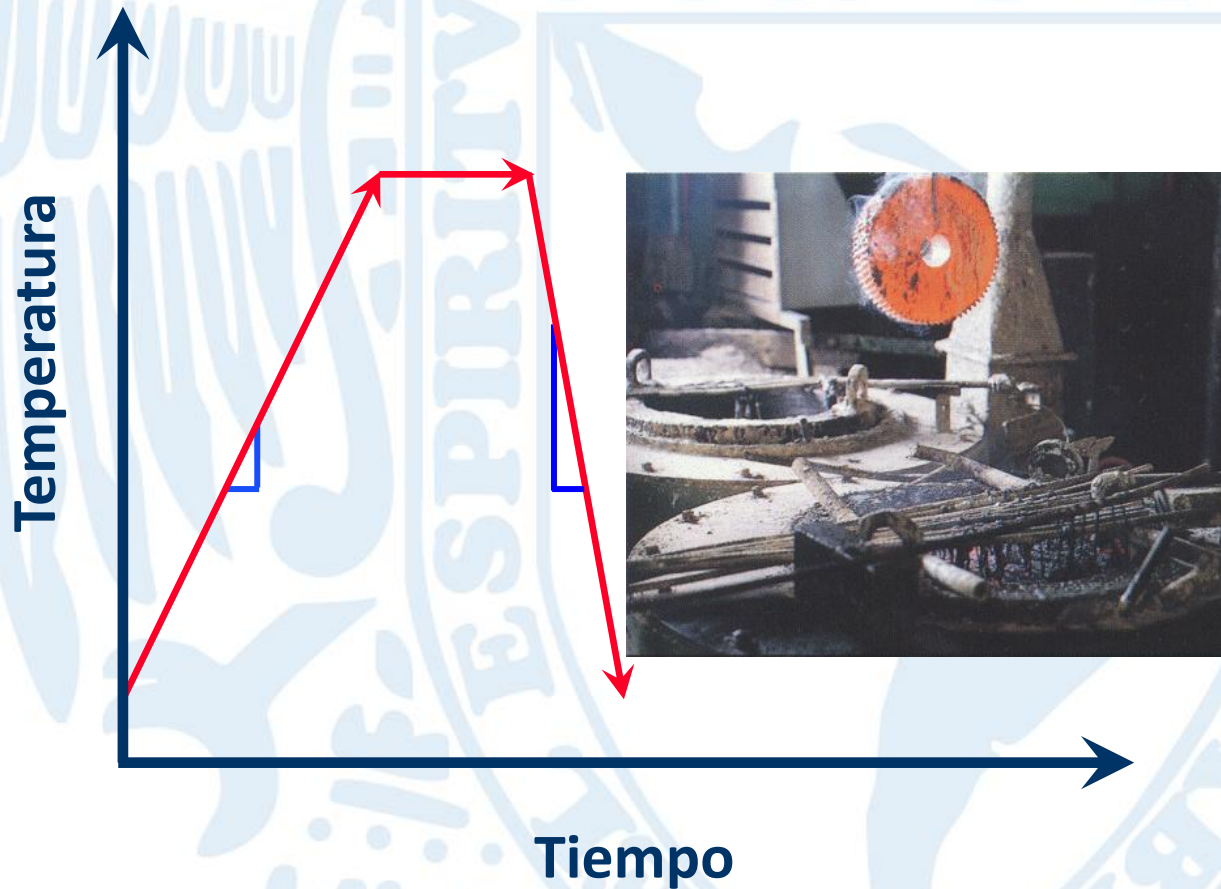
Ecuación general de conducción

Dr. Bernardo Hernández Morales

**Depto. de Ingeniería Metalúrgica
Facultad de Química, UNAM**

Semestre 2017-1





Microestructura



**Propiedades
del producto**

Ecuación de balance:

$$\sum E + \sum G = \sum S + A$$



Balance microscópico (3D)

$$-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t) + q_G(\vec{x}, t) = \frac{\partial [\rho C_p T(\vec{x}, t)]}{\partial t}$$

Ley de
Fourier



$$\nabla \cdot [k \nabla T(\vec{x}, t)] + q_G(\vec{x}, t) = \frac{\partial [\rho C_p T(\vec{x}, t)]}{\partial t}$$

EGC

Medio isotrópico

$$\begin{aligned}k &= \text{cte.} \\ \rho &= \text{cte.} \\ C_p &= \text{cte.}\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

Difusividad térmica

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\vec{x}, t)] + q_G(\vec{x}, t) = \frac{\partial [\rho C_p T(\vec{x}, t)]}{\partial t}$$

$$\nabla^2 T(\vec{x}, t) + \frac{1}{k} q_G(\vec{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$q_G(\vec{x}, t) = 0$$

Ecn. de
Fourier

$$\nabla^2 T(\vec{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

Edo. estable

$$\nabla^2 T(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{Ecn. de Laplace}$$

EGC: $\nabla \cdot [k \nabla T(\vec{x}, t)] + q_G(\vec{x}, t) = \frac{\partial [\rho C_p T(\vec{x}, t)]}{\partial t}$

Métodos de solución:

- Analítico (Ref. 4, bibliografía complementaria)
 - Separación de variables, Transformada de Laplace, etc.
- Analítico aproximado
- Numérico
 - Diferencias finitas, elementos finitos, etc.
- Analógico
- Gráfico

EGC: $\nabla \cdot [k \nabla T(\vec{x}, t)] + q_G(\vec{x}, t) = \frac{\partial [\rho C_p T(\vec{x}, t)]}{\partial t}$

Descripción del problema matemático analítico:

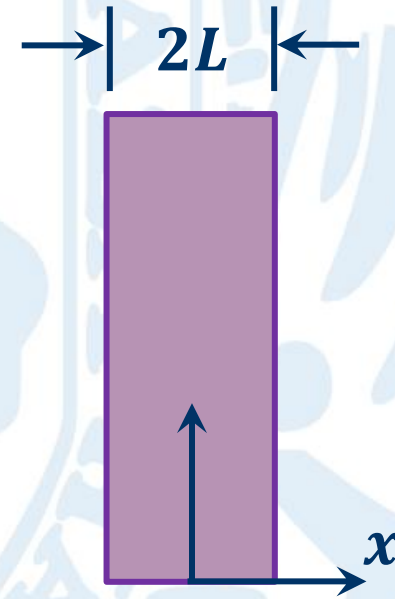
- Ecuación diferencial parcial
 - De segundo orden
 - Lineal/No lineal
 - Homogénea/No homogénea
- Condiciones a la frontera
 - Lineales/No lineales
 - Homogéneas/No homogéneas

La ecuación de Fourier para el caso de flujo 1D, geometría rectangular es:

$$\nabla^2 T(\vec{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$



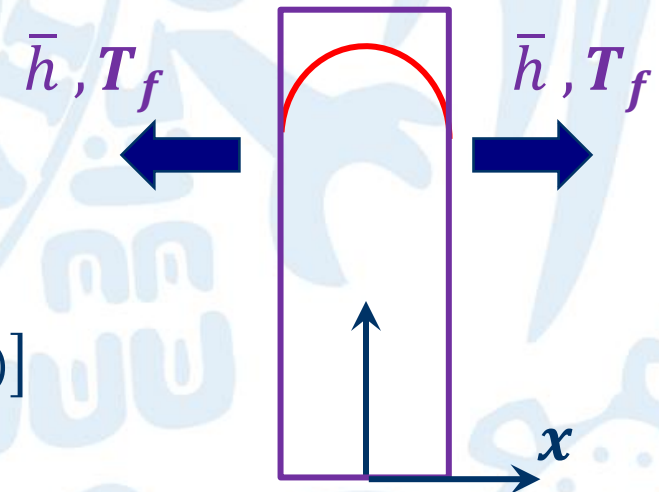
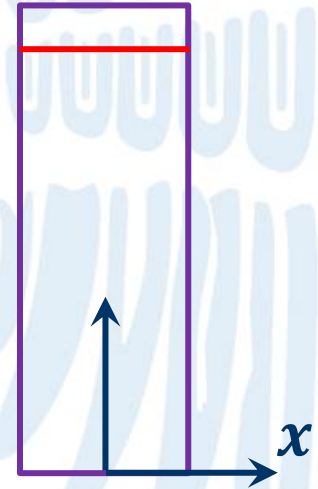
Si la condición inicial es de distribución uniforme:

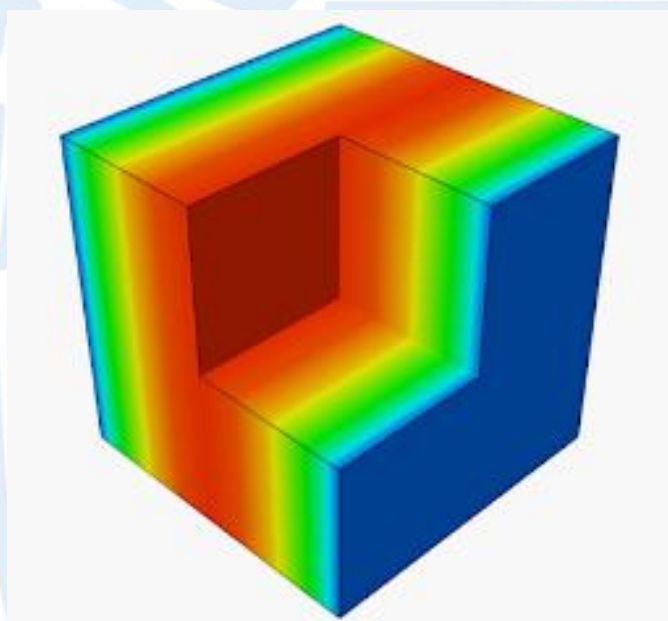
Cuando $t = 0$, $0 \leq x \leq L$: $T(x, t) = T_i$

Condiciones a la frontera:

En $x = 0$, $t > 0$ $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0$

En $x = L$, $t > 0$ $-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\bar{h}[T_f - T(x, t)]$

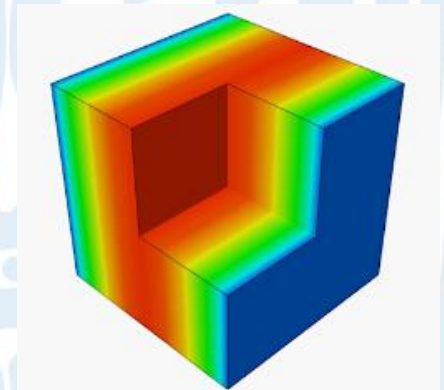




Sistema 1

$$T_1, x_1, t_1, L_1, k_1, \rho_1, C_{p1}, \bar{h}_1, T_{f1}$$

¿ Qué se requiere para
que sean térmicamente
similares?



Sistema 2

$$T_2, x_2, t_2, L_2, k_2, \rho_2, C_{p2}, \bar{h}_2, T_{f2}$$

Sistema 1

$$\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right]_1$$

Factor de escala geométrico:

Factor de escala de tiempo:

Factor de escala de dif. térmica:

Factor de escala de temperatura:

Sistema 2

$$\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right]_2$$

$$x_2 = C_L x_1 \quad L_2 = C_L L_1$$

$$t_2 = C_t t_1$$

$$\alpha_2 = C_\alpha \alpha_1, \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$T_2 = C_T T_1$$

Factores de escala

$$\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right]_2$$



$$\left[\frac{C_T}{C_L C_L} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{C_T}{C_t C_\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right]_1$$

Por lo que

$$\frac{C_T}{C_L C_L} = \frac{C_T}{C_t C_\alpha} \rightarrow \frac{C_T}{C_T} = \frac{C_t C_\alpha}{C_L C_L} = 1$$

Substituyendo las definiciones de los factores de escala:

$$\frac{C_t C_\alpha}{C_L C_L} = \frac{\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha_2 t_2}{L_2^2} = \frac{\alpha_1 t_1}{L_1^2} \quad \text{¿dimensiones ?}$$

Para que las respuestas de los sistemas sean similares:

$$\frac{\alpha_2 t_2}{L_2^2} = \frac{\alpha_1 t_1}{L_1^2} \quad \rightarrow \quad \text{Fo}_2 = \text{Fo}_1$$

Donde Fo es el número de Fourier

Sistema 1

$$\left[-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\bar{h} [T_f - T(x, t)] \right]_1$$

Sistema 2

$$\left[-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\bar{h} [T_f - T(x, t)] \right]_2$$

Factor de escala geométrico:

$$x_2 = C_L x_1 \quad L_2 = C_L L_1$$

Factor de escala de transp. de intercara:

$$\bar{h}_2 = C_h \bar{h}_1$$

Factor de escala de conducción:

$$k_2 = C_k k_1$$

Factor de escala de temperatura:

$$T_2 = C_T T_1 \quad T_{f_2} = C_T T_{f_1}$$

Factores de escala


$$\left[-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\bar{h} [T_f - T(x, t)] \right]_2$$
$$\left[-\frac{C_k C_T}{C_L} k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -C_h C_T \bar{h} [T_f - T(x, t)] \right]_1$$

Por lo que

$$\frac{C_k C_T}{C_L} = C_h C_T \quad \rightarrow \quad \frac{C_T}{C_T} = \frac{C_h C_L}{C_k} = 1$$

Substituyendo las definiciones de los factores de escala:

$$\frac{C_h C_L}{C_k} = \frac{\left(\frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1}\right) \left(\frac{L_2}{L_1}\right)}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{h}_2 L_2}{k_2} = \frac{\bar{h}_1 L_1}{k_1} \quad \text{¿ dimensiones ?}$$

Para que las respuestas de los sistemas sean similares:

$$\frac{h_2 L_2}{k_2} = \frac{h_1 L_1}{k_1} \rightarrow \text{Bi}_2 = \text{Bi}_1$$

Donde Bi es el número de Biot