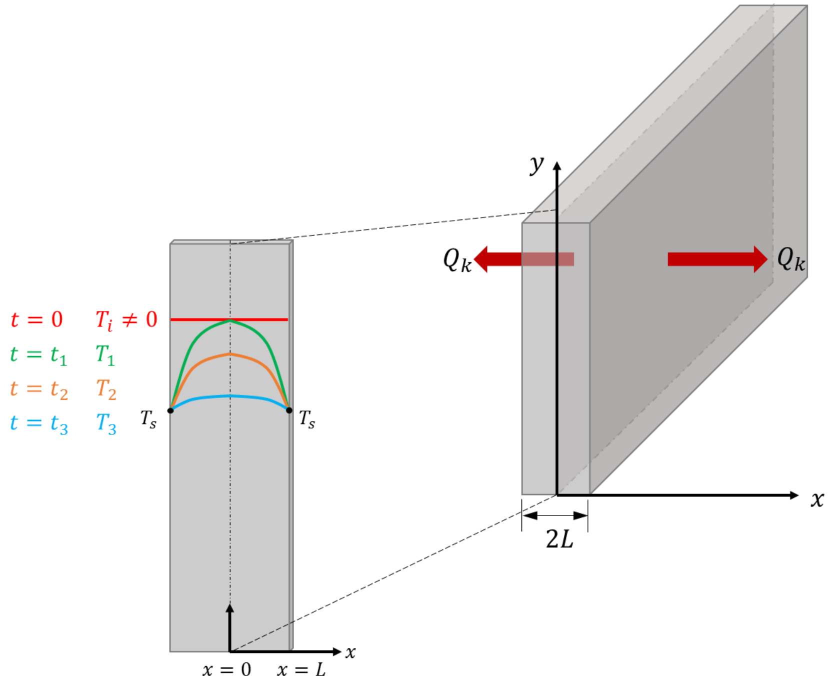
Transporte de Energía 2017-I

Conducción en estado no estacionario. Medio Finito

M. en I. Roberto Cruces Reséndez

Fenómeno de Transporte	*Transporte de energía*
Mecanismo	*Conducción*
Estado	*No Estacionario*
Coordenadas	*Cartesianas*
Dimensiones	*1-D*
	Medio Finito

Esquema



Objetivos de Cálculo

Determinar una expresión para la distribución espacial-temporal de la temperatura.

Derivar una expresión para la densidad de flujo de calor.

Formulación matemática

- Flujo 1D (dirección x, coordenadas cartesianas) en estado no estacionario
- No hay fuentes o pozos de energía (generación=0)
- Mecanismo controlante: Conducción
- Medio finito
- Propiedades constantes
- Distribución inicial de temperatura uniforme en la placa

Ecuación Gobernante

$$-\nabla \cdot \vec{q}_k = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \forall \quad 0 \leq x \leq L \quad , \quad t > 0 \tag{1}$$

Aplicando la Ley de Fourier en la ecuación 1:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial x}\right)=\rho Cp\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} \qquad \forall \quad 0\leq x\leq L \quad , \quad t>0 \tag{2}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 T_{(x,t)}}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} \qquad \forall \quad 0\leq x\leq L \quad , \quad t>0 \tag{3}$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1 $\frac{\partial T_{(0,t)}}{\partial x}=0$ C.F.2 $T_{(L,t)}=T_s=0$

Y a la condición inicial:

C.I. $T_{(x,0)}=T_i$

La ecuación 3, es una ecuación diferencial parcial lineal homogénea de segundo orden.

Solución

El método de **Separación de Variables** permite tratar ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas, cuyas condiciones iniciales y de frontera sean **lineales**; consiste en suponer que la solución para una ecuación diferencial (3) se puede expresar como un producto de funciones, cada una dependiente de una variable:

$$T_{(x,t)}=X_{(x)}*\Theta_{(t)} \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(X_{(x)}*\Theta_{(t)}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\left(X_{(x)}*\Theta_{(t)}\right) \tag{5}$$

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}=\frac{1}{\alpha\Theta_{(t)}}\frac{d\Theta_{(t)}}{dt} \tag{6}$$

En la ecuación (6), el miembro izquierdo de la ecuación (parte espacial) solo depende de *x* y el miembro derecho (parte temporal) solo depende de *t*, para cumplir con esta condición ambos miembros tienen que ser iguales a una constante; dicha constante por razones físicas debe ser negativa por lo que:

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}=-\lambda^2 \tag{7}$$

$$\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+\lambda^2X_{(x)}=0 \tag{7a}$$

$$\frac{1}{\alpha\Theta_{(t)}}\frac{d\Theta_{(t)}}{dt}=-\lambda^2 \tag{8}$$

$$\frac{d\Theta_{(t)}}{dt}+\alpha\lambda^2\Theta_{(t)}=0 \tag{8a}$$

La solución de la ecuación (7a) es:

$$\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+\lambda^2X_{(x)} \ =0 \qquad (7a)$$

Sea:

$$X_{(x)} \ =e^{-\beta x} \qquad (7b)$$

Derivando 2 veces (7b):

$$\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}=\beta^2e^{-\beta x} \qquad (7c)$$

Sustituyendo (7b) y (7c) en (7a):

$$\beta^2e^{-\beta x}+\lambda^2e^{-\beta x}=0 \qquad (7d)$$

$$e^{-\beta x}\left(\beta^2+\lambda^2\right)=0 \qquad (7e)$$

$$\left(\beta^2+\lambda^2\right)=0 \qquad (7f)$$

Donde:

$$\beta=\pm i\lambda \qquad (7g)$$

Entonces las soluciones son:

$$X_{1(x)}=C_1e^{-i\lambda x}$$

$$X_{2(x)}=C_2e^{i\lambda x}$$

La solución general es la suma de las dos expresiones anteriores:

$$X_{(x)}=C_1e^{-i\lambda x}+C_2e^{i\lambda x} \qquad (7h)$$

Aplicando la identidad de Euler:

$$X_{(x)}=C_1[cos(\lambda x)-isen(\lambda x)]+C_2[cos(\lambda x)+isen(\lambda x)] \qquad (7i)$$

Agrupando términos:

$$X_{(x)}=(C_1+C_2)cos(\lambda x)+i(C_2+C_1)sen(\lambda x) \qquad (7j)$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{X_{(x)} \ =A_1cos(\lambda x)+A_2sin(\lambda x)} \qquad (7k)$$

La solución de la ecuación (8a) es:

$$\frac{d\Theta_{(t)}}{dt}+\alpha\lambda^2\Theta_{(t)}=0 \qquad (8a)$$

Sea:

$$\frac{d\Theta}{\Theta_{(t)}} = -\alpha\lambda^2 dt \qquad (8b)$$

Integrando (8b):

$$\ln \Theta = -\alpha\lambda^2 t + A_3 \qquad (8c)$$

Despejando Θ de la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{\Theta = A_4 e^{-\alpha\lambda^2 t}} \qquad (8c)$$

Evaluando las condiciones de frontera C. F. 1 y C. F. 2:

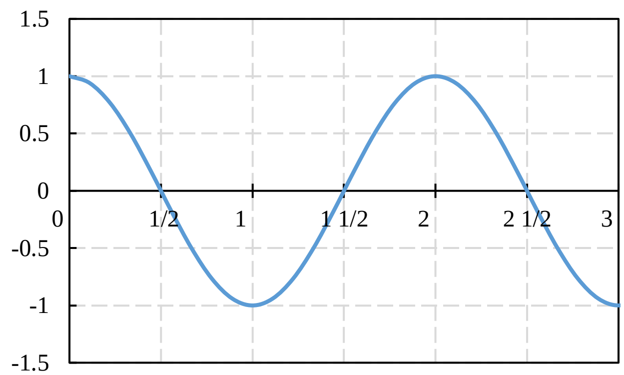
$$X'_{(0)} = -A_1\lambda\, sin(0) + A_2\lambda\, cos(0) = 0 \qquad (9)$$

$$A_2 = 0 \qquad (10)$$

$$X_{(L)} = A_1 cos(\lambda L) = T_s = 0 \qquad (11)$$

$$cos(\lambda L) = 0 \qquad (12)$$

La función coseno es de la forma:



Para que la función coseno sea cero es necesario que:

$$\lambda L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \rightarrow \lambda = \frac{(2n+1)}{2L}\pi \qquad donde\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (13)$$

λ , son los eigenvalores y $cos(\lambda L)$, son las eigenfunciones que satisfacen el problema de Sturm-Liouville

Por lo tanto la ecuación (7h) queda expresada como:

$$\boldsymbol{X_{(x)} = A_1 cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)} \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) y (8c) en la ecuación (4):

$$\boldsymbol{T_{(x,t)} = \left[A_5 cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\right] exp^{-\alpha\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right\}^2 t}} \qquad (15)$$

Por el principio de superposición sabemos que esta ecuación tiene un número infinito de soluciones en el intervalo $0 \leq x \leq L$, por lo que la solución se puede expresar como la combinación lineal de dichas soluciones:

$$\boldsymbol{T_{(x,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right) \right] exp^{-\left\{ \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} * \frac{\alpha t}{L^2} \right\}}} \tag{16}$$

Finalmente, solo resta hallar las constantes A_n, de modo que la condición inicial se cumpla. Para ello se evalúa la condición inicial C. I. y se emplean la Serie de Fourier correspondiente:

$$T_{(x,0)} = \left[A_n cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right) \right] = f(x) = T_i \tag{17}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_i cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right) dx$$

$$A_n = \frac{2T_i}{L} \left(\frac{2L}{(2n+1)\pi} \right) sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right) \Bigg|_0^L = \frac{4T_i}{(2n+1)\pi} sin\left(\frac{2n+1}{2} \pi \right) = \frac{4T_i}{(2n+1)\pi} (-1)^n$$

La solución es:

$$\boldsymbol{T_{(x,t)} = \frac{4T_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} exp^{-\left\{ \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} * \frac{\alpha t}{L^2} \right\}} cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{x}{L} \right)} \tag{18}$$

De la expresión anterior se identifica el número de Fourier:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \tag{19}$$

Este número relaciona la rapidez de conducción de calor con la rapidez de almacenamiento de energía.

Para calcular la densidad de flujo de calor en cualquier punto de la placa se aplica la ley de Fourier:

$$\boldsymbol{q_{(x,t)} = -k \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial x} = k \frac{2T_i}{L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n exp^{-\left\{ \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} * \frac{\alpha t}{L^2} \right\}} sen\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{x}{L} \right)} \tag{20}$$