Transporte de Energía

Gráficas de Heisler

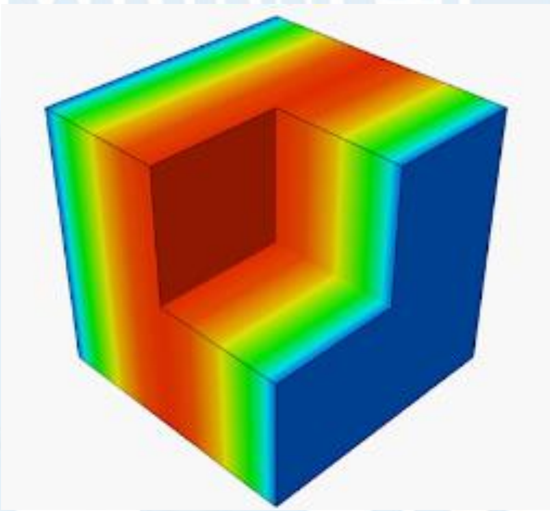
Dr. Bernardo Hernández Morales

Depto. de Ingeniería Metalúrgica
Facultad de Química, UNAM

Semestre 2017-1

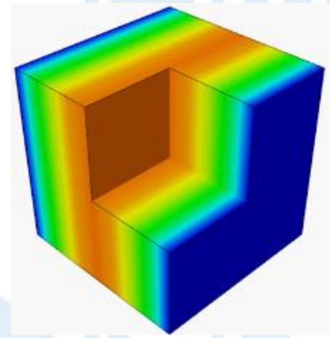
100 años
Facultad de Química
1916 · UNAM · 2016

Enfriamiento/calentamiento con gradientes

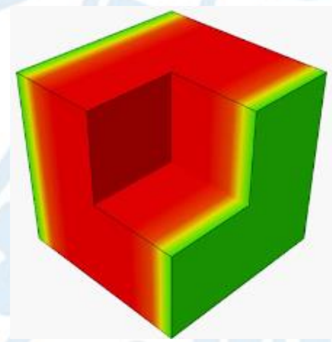


$\mathrm{Bi} > 0.1$

Medio finito



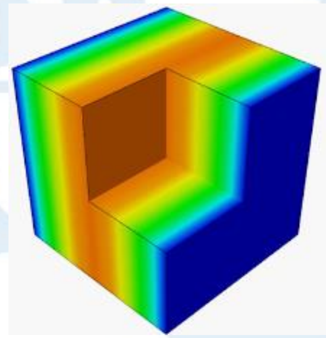
Medio semi-infinito



Enfriamiento/calentamiento con gradientes

Medio finito

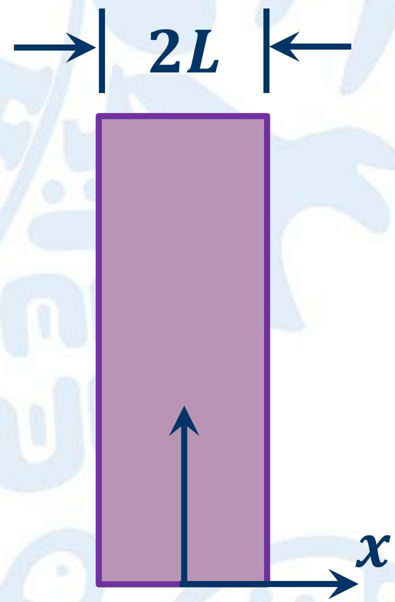
- Sin generación
- Props. ctes.



La ecuación de Fourier para el caso de flujo 1D, geometría rectangular es:

$$\nabla^2 T(\vec{x},t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial t}$$

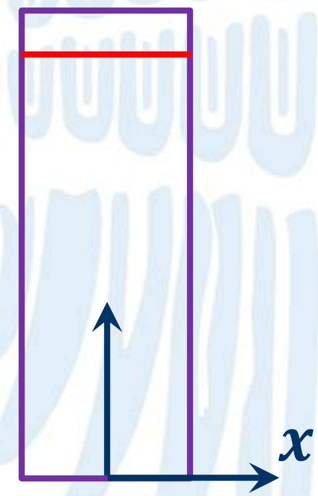
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$



Condición inicial y condiciones a la frontera

Si la condición inicial es de distribución uniforme:

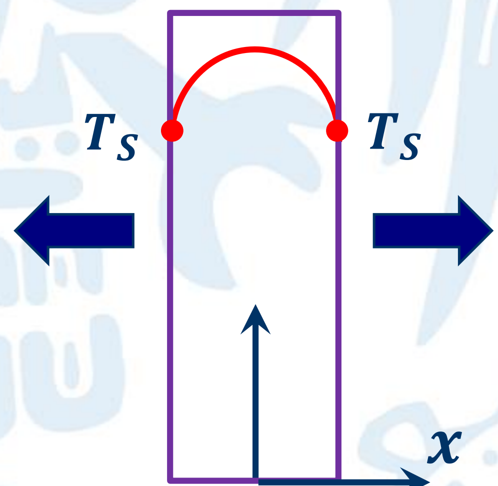
Cuando $t = 0$, $\quad 0 \leq x \leq L$: $\quad T(x,t) = T_i$



Condiciones a la frontera:

En $x = 0$, $\quad t > 0 \quad \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0$

En $x = L$, $\quad t > 0 \quad T(x,t) = T_S = 0$



Solución analítica exacta

Método de solución: Variables separables (ver AMYD)

$$T(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\,\Gamma(t)}\frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\lambda^2$$

C.F.1’ C.F.2’ C.I.’

$$T(x,t)$$

Solución analítica exacta

Método de solución: Separación de variables (ver AMYD)

$$T(x,t) = \frac{4T_i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\,exp\left[-\frac{(2n+1)^2\,\pi^2}{4}\frac{\alpha t}{L^2}\right] cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\frac{x}{L}\right]$$

$$\frac{T(x,t)}{T_i} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\,exp\left[-\frac{(2n+1)^2\,\pi^2}{4}\frac{\alpha t}{L^2}\right] cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\frac{x}{L}\right]$$

¿ Cómo se evalúan ?

Forma adimensional de la ecuación gobernante:

$$\Theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_f}{T_i - T_f}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$X = \frac{x}{L} \qquad \tau = \mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(X,\tau)}{\partial X^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Theta(x,\tau)}{\partial \tau}$$

Dominios:

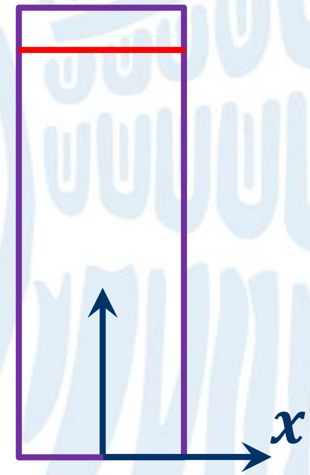
$$0 \le x \le L \quad \rightarrow \quad 0 \le X \le 1$$

$$\mathrm{t} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = 0$$

Solución analítica exacta

Si la condición inicial es de distribución uniforme:

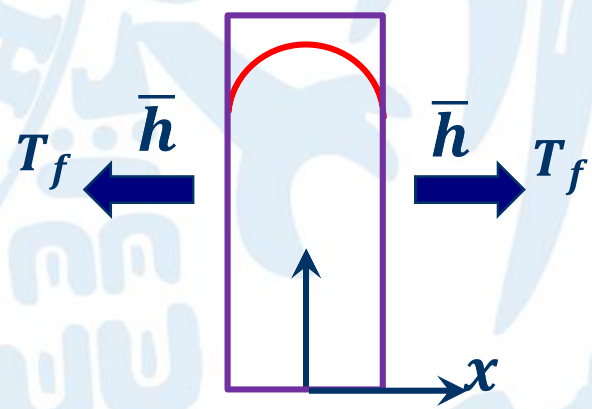
Cuando $\tau = 0, \quad 0 \leq X \leq 1: \quad \Theta(X,\tau) = 1$



Condiciones a la frontera:

En $X = 0, \quad \tau > 0 \quad \dfrac{\partial\Theta(X,\tau)}{\partial x} = 0$

En $X = 1, \quad \tau > 0 \quad \dfrac{\partial\Theta(X,\tau)}{\partial X} = -Bi\,\Theta(x,\tau)$



¡ Comprueba las ecuaciones !

Solución analítica exacta

Método de solución: Separación de variables

$$\frac{\partial^2 \Theta(X,\tau)}{\partial X^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Theta(x,\tau)}{\partial \tau}$$

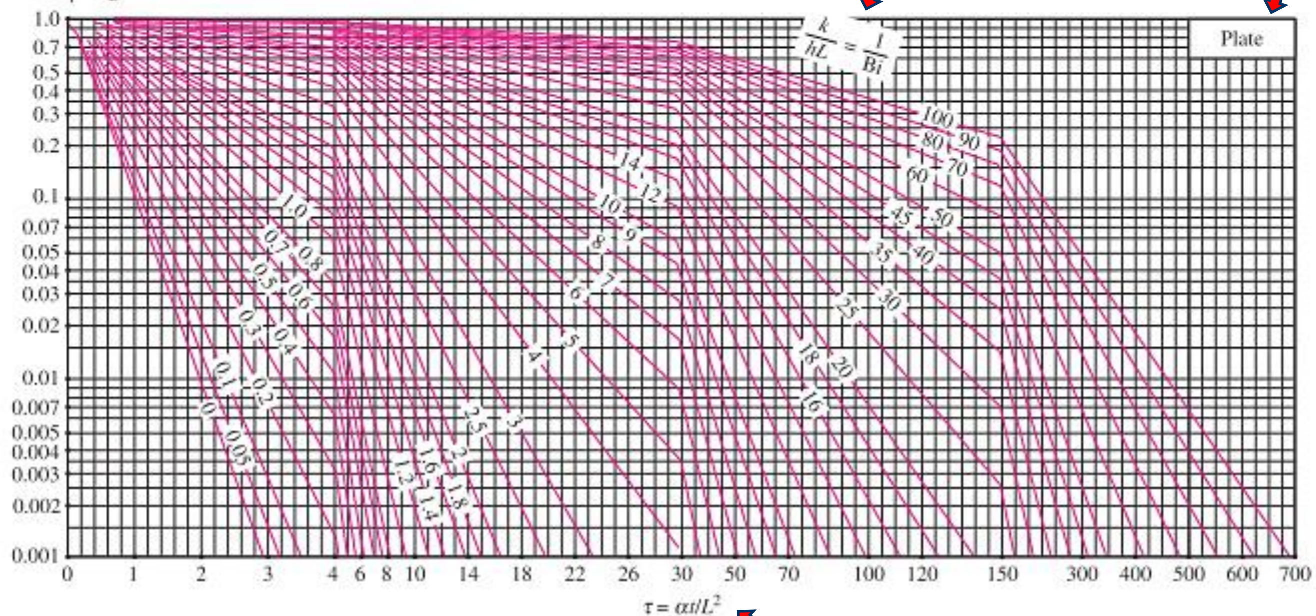
$$\Theta(x,t) = f(X, \mathrm{Bi}, \tau)$$

$$\tau = \mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\left[\frac{k}{L}\Delta T\right] L^2}{\left(\frac{\rho\, C_p\, L^3\, \Delta T}{t}\right)} \equiv \frac{\text{Rapidez de conducción}}{\text{Rapidez de almacenamiento}}$$

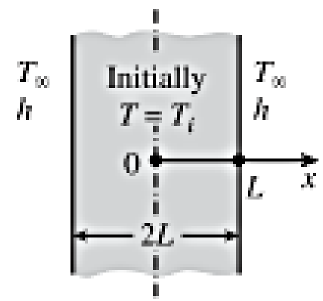
Gráficas de Heisler

M.P. Heisler (1947)

Para el centro

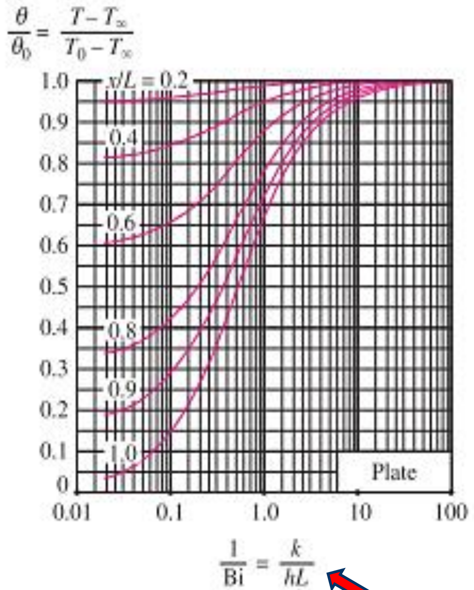


(*a*) Midplane temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)

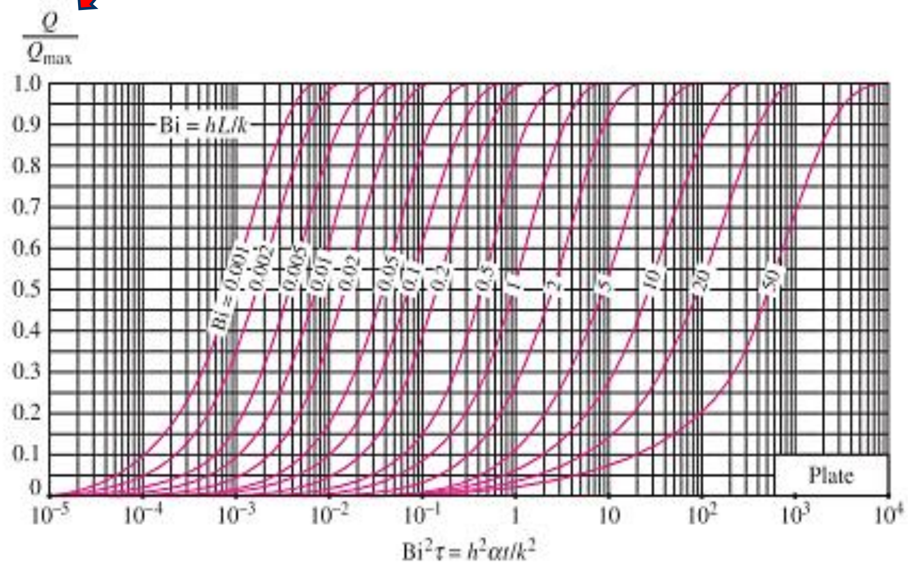


* Gráficas para todos los sistemas de coordenadas en AMYD

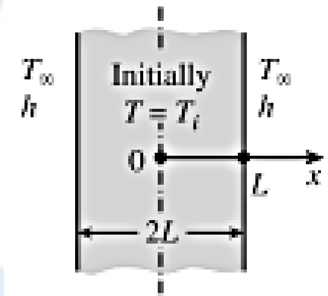
Gráficas de Heisler



(*b*) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



(*c*) Heat transfer (from H. Gröber et al.) 1961



$$Q_{máx} = m\, C_p\, (T_\infty - T_0) = \rho C_p V (T_\infty - T_0)$$

$$Q(t) = \int_V \rho\, C_p\, (T(x,t) - T_0)\, dV$$

Solución de tiempos "largos"

Solución analítica (método de Separación de variables)

$$\Theta(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(\lambda_n L)}{\lambda_n L + sen(\lambda_n L)cos(\lambda_n L)} exp[-(\lambda_n)^2 \alpha t] cos(\lambda_n L)$$

$\mathrm{Fo} > 0.25$

$$\Theta(x,t) = 2\sum_{n=1}^{2} \xi_n exp[-(\lambda_n)^2 \mathrm{Fo}] cos\left[(\lambda_n L)\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\xi_n = \frac{sen(\lambda_n L)}{\lambda_n L + sen(\lambda_n L)cos(\lambda_n L)}$$

Referencias

En los libros que se citan a continuación hay un gran número de soluciones analíticas a problemas de conducción de calor:

- H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, 2ª ed., Oxford University Press, 1959.
- M. N. Özişik, Heat Conduction, John Wiley & Sons, New York, 1980.