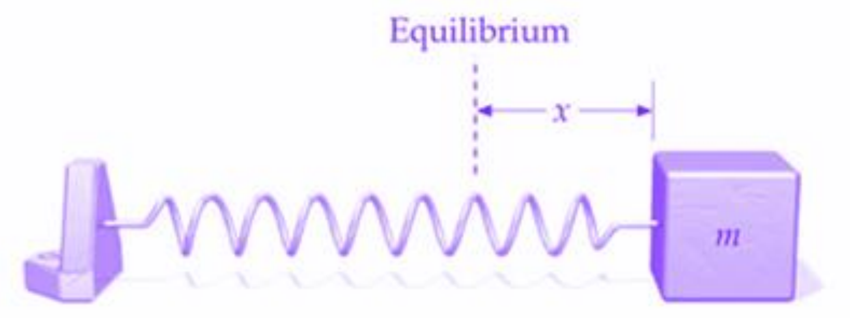
Movimiento Armónico Amortiguado I: Sistema masa – resorte.



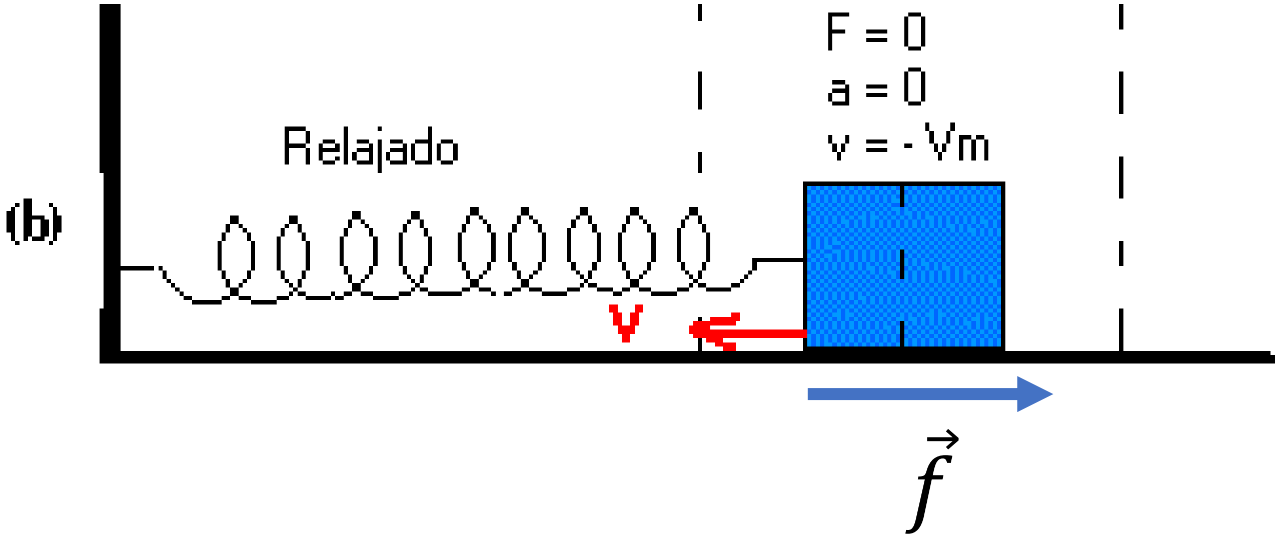
1309 FUNDAMENTOS DE ESPECTROSCOPÍA

PROFESOR: ZURISADAI PADILLA GÓMEZ

M.A.A. I: Sistema masa – resorte

Se considera el sistema ya visto en M.A.S. pero ahora toma en cuenta la **fuerza de fricción**.

La fricción se **opone** al **movimiento** (velocidad).



M.A.A. I: Sistema masa – resorte

Ahora la fuerza de inercia que presenta el bloque ha de ser igual a la contribución de la fuerza del resorte y la fricción:

$$F = -kx - bv$$

F = Fuerza de inercia

k = Constante de restitución (del resorte)

x = Desplazamiento (desde el punto de equilibrio)

b = Constante de fricción

v = Velocidad

M.A.A. I: Sistema masa – resorte

Retomando la 2ª ley de Newton e igualando a cero se obtiene la **ecuación de movimiento**:

$$F = -kx - bv$$

$$ma + bv + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

M.A.A. I: Sistema masa – resorte

Se tiene una nueva ecuación diferencial, un tanto más complicada que la obtenida para M.A.S.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Una solución propuesta a esta ecuación es:

$$\boldsymbol{x = Ce^{\beta t}}$$

M.A.A. I: Sistema masa – resorte

Sustituyendo la solución propuesta, se tiene:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x = Ce^{\beta t} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \beta Ce^{\beta t} \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 Ce^{\beta t}$$

$$m\beta^2 Ce^{\beta t} + b\beta Ce^{\beta t} + kCe^{\beta t} = 0$$

$$Ce^{\beta t}(m\beta^2 + b\beta + k) = 0$$

$$Ce^{\beta t} = 0 \quad ; \quad m\beta^2 + b\beta + k = 0$$

M.A.A. I: Sistema masa – resorte

$$m\beta^2 + b\beta + k = 0$$

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Solución propuesta:

$$x = Ce^{\beta t} \rightarrow \boldsymbol{x = Ce^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}}$$

Solución general:

$$\boldsymbol{x = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}}$$

Caso 1: Movimiento sobreamortiguado

La solución que se obtiene se debe analizar por casos.

Caso 1: $\boldsymbol{b^2 - 4mk > 0}$

$$x = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}$$

Sean:

$$p = \frac{-b}{2m} \quad ; \quad q = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x = C_1 e^{pt+qt} + C_2 e^{pt-qt}$$

Caso 1: Movimiento sobreamortiguado

Se cumple que:

$$x = C_1 e^{pt+qt} + C_2 e^{pt-qt}$$

$$x = e^{pt}(C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt})$$

Se puede comprobar que si

$$F = C_1 + C_2; \quad G = C_1 - C_2$$

entonces:

$$x = e^{pt}\left[\frac{F}{2}(e^{qt} + e^{-qt}) + \frac{G}{2}(e^{qt} - e^{-qt})\right]$$

Caso 1: Movimiento sobreamortiguado

$$x = e^{pt}\left[F\frac{(e^{qt} + e^{-qt})}{2} + G\frac{(e^{qt} - e^{-qt})}{2}\right]$$

$$x = e^{pt}[F cosh(qt) + G senh(qt)]$$

Si el movimiento comienza en amplitud máxima, entonces:

$$x = Fe^{pt}cosh(qt)$$

$$x = Fe^{-\frac{b}{2m}t}cosh\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}t\right)$$

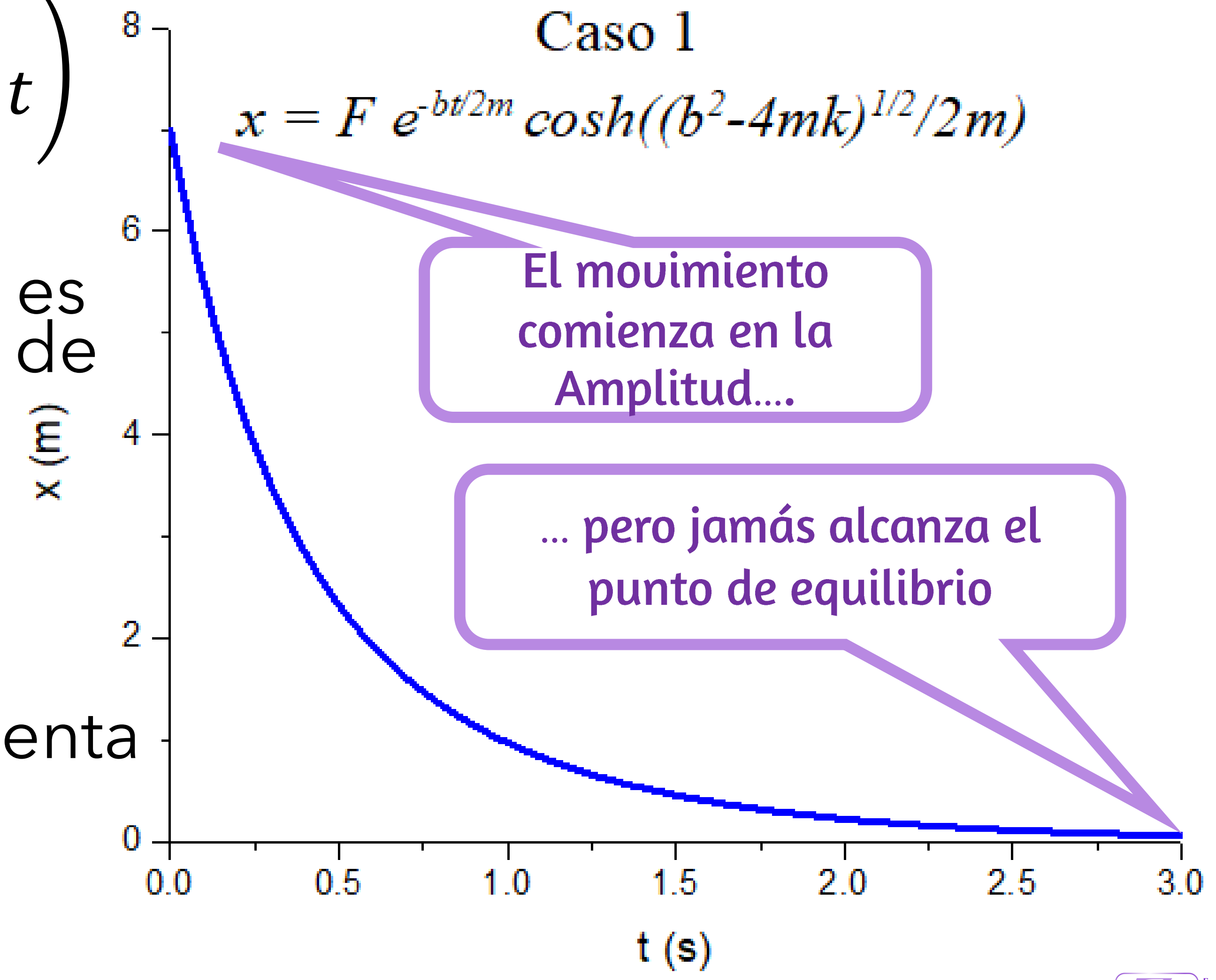
Caso 1: Movimiento sobreamortiguado

$$x = Fe^{\frac{b}{2m}t}cosh\left(\frac{\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t\right)$$

Esto se debe a que la fricción es muy alta, superando la fuerza de restitución del resorte.

$$b^2 - 4mk > 0$$

Por tanto, este caso no representa un movimiento armónico. Es solamente un **movimiento sobreamortiguado**.



Caso 2: Movimiento críticamente amortiguado

Caso 2: $b^2 - 4mk = 0$

$$x = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}$$

$$x = C_1 e^{\frac{-b}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-b}{2m}t}$$

$$x = C e^{\frac{-b}{2m}t}$$

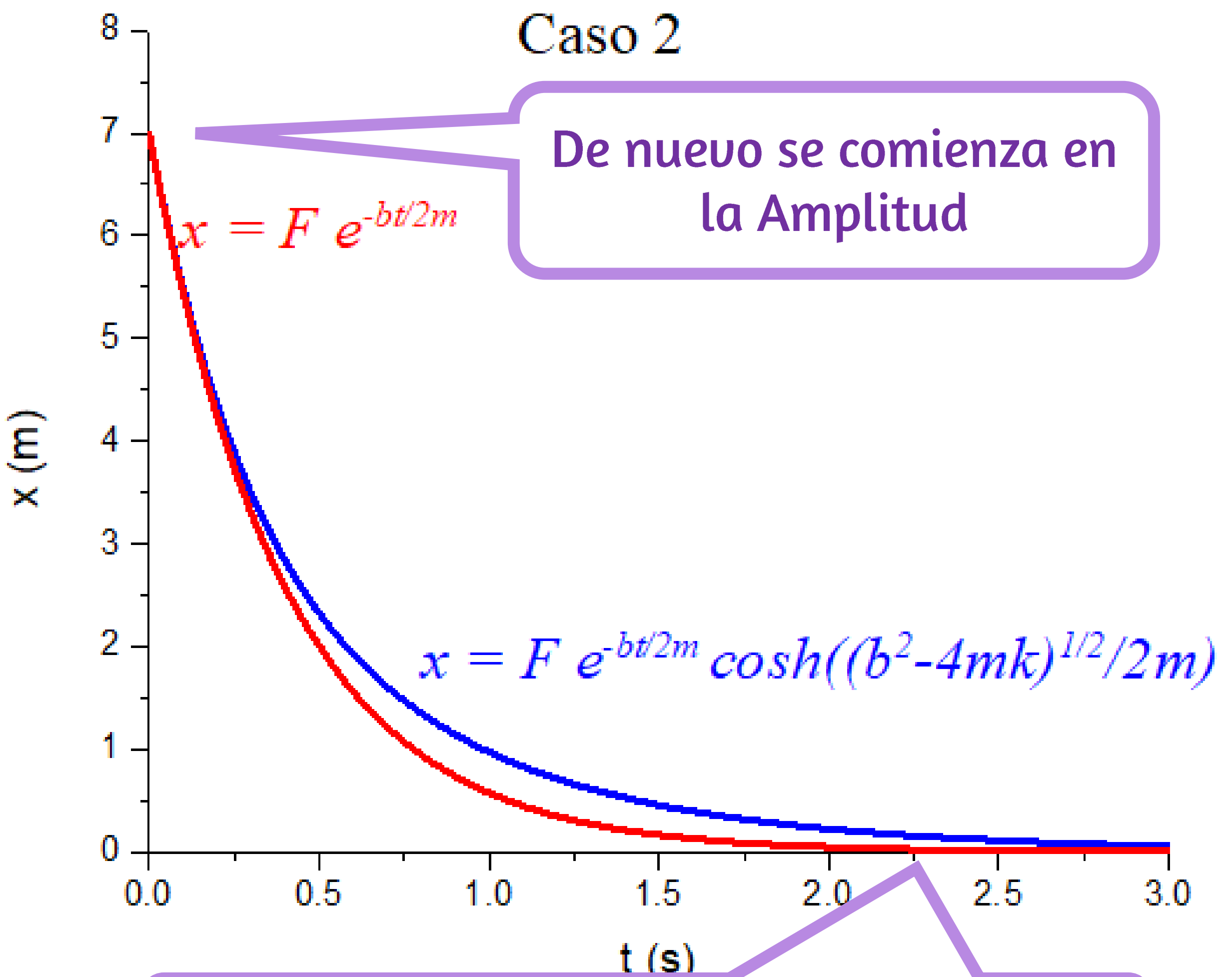
Caso 2: Movimiento críticamente amortiguado

$$x = Ce^{\frac{-b}{2m}t}$$

Aquí la fricción y la fuerza del resorte es *compensan* exactamente

$$b^2 - 4mk = 0$$

Tampoco es un movimiento armónico. Es un **movimiento críticamente amortiguado**.



De nuevo se comienza en la Amplitud

En este caso se decae más rápido alcanzando el punto de equilibrio

Caso 3: Movimiento subamortiguado

Caso 3: $\boldsymbol{b^2 - 4mk < 0}$

Reexpresando el factor *beta*:

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-b \pm \sqrt{-1|b^2 - 4mk|}}{2m}$$

$$\beta = \frac{-b \pm i\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$$

$$\beta = \frac{-b}{2m} \pm \frac{i\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{-b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Caso 3: Movimiento subamortiguado

En detalle:

$$\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}=\sqrt{\omega^2-\frac{b^2}{4m^2}}$$

Por tanto el resultado tiene unidades de frecuencia angular. Se puede renombrar toda esta raíz como una nueva frecuencia:

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-\frac{b^2}{4m^2}}$$

Caso 3: Movimiento subamortiguado

Por tanto:

$$\beta = \frac{-b}{2m} \pm i\omega'$$

Solución general:

$$x = C_1 e^{\left(\frac{-b}{2m}+i\omega'\right)t} + C_2 e^{\left(\frac{-b}{2m}-i\omega'\right)t}$$

$$x = C_1 e^{\frac{-bt}{2m}} e^{i\omega' t} + C_2 e^{\frac{-bt}{2m}} e^{-i\omega' t}$$

Caso 3: Movimiento subamortiguado

Suponiendo que:

$$C_1 = C_2 = C$$

$$x = Ce^{\frac{-bt}{2m}}e^{i\omega' t} + Ce^{\frac{-bt}{2m}}e^{-i\omega' t}$$

$$x = Ce^{\frac{-bt}{2m}}\left(e^{i\omega' t} + e^{-i\omega' t}\right)$$

$$x = Ce^{\frac{-bt}{2m}}[cos(\omega' t) + isen(\omega' t) + cos(\omega' t) - isen(\omega' t)]$$

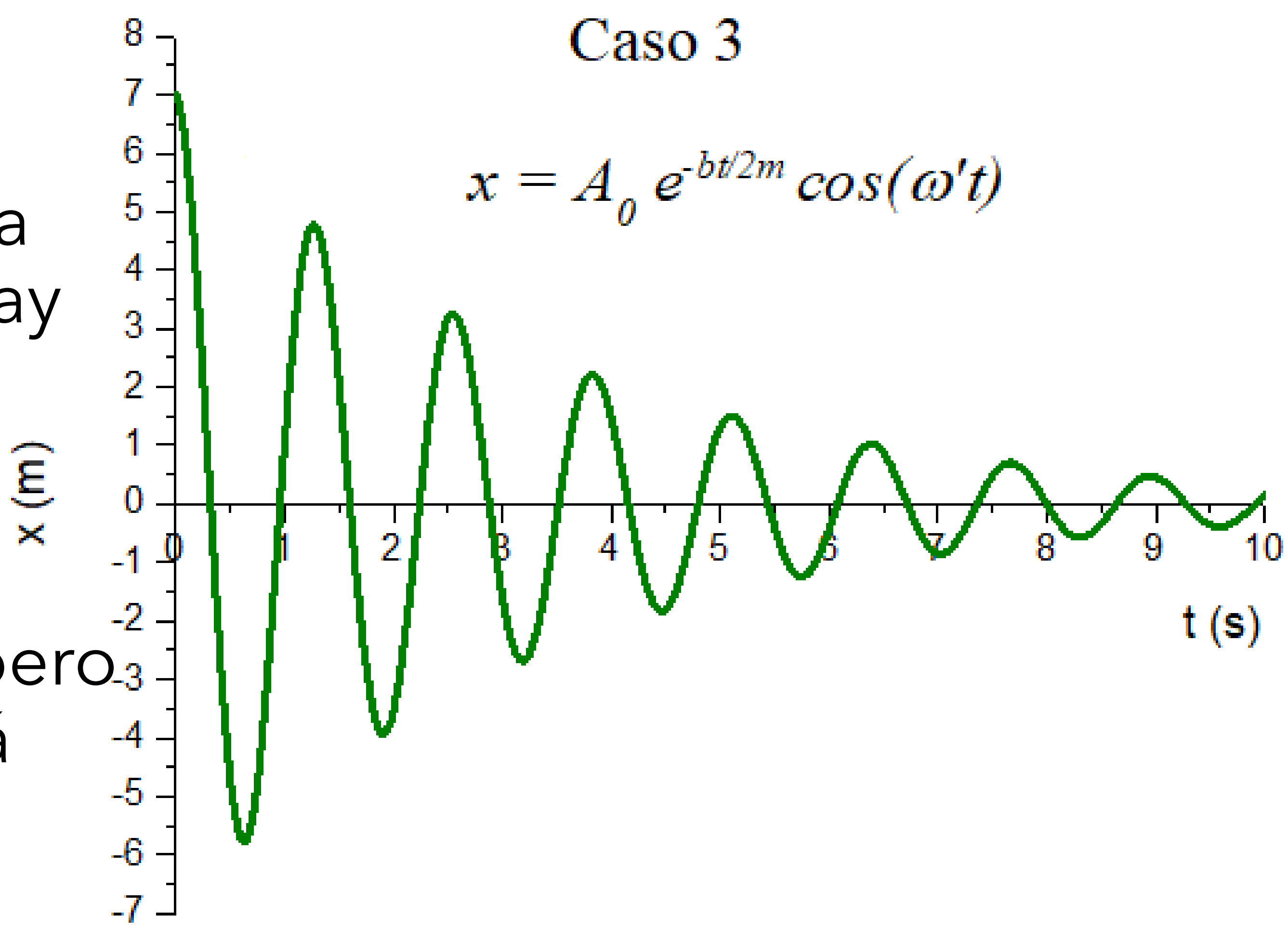
$$\boldsymbol{x = 2Ce^{\frac{-bt}{2m}}cos(\omega' t)}$$

Caso 3: Movimiento subamortiguado

$$x = 2Ce^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega' t)$$

Como en este caso la fuerza del resorte es superior, sí hay oscilación.

Es un **movimiento subamortiguado**. Oscila, pero eventualmente se detendrá por acción de la fricción.



Evolución de la energía en el M.A.A. (Subamortiguado)

Del caso del M.A.S. se sabe que la energía es constante:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

La energía es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.

Evolución de la energía en el M.A.A. (Subamortiguado)

En el M.A.A. la amplitud decae de acuerdo con la función exponencial.

$$x = A_0 e^{\frac{-bt}{2m}} cos(\omega' t) \quad \Rightarrow \quad A_t = A_0 e^{\frac{-bt}{2m}}$$

Por tanto la energía para este caso, resulta ser:

$$E = \frac{1}{2} k {A_t}^2 = \frac{1}{2} k {A_0}^2 e^{\frac{-bt}{m}} = E_0 e^{\frac{-bt}{m}}$$

Estimación del efecto de amortiguamiento

Se pueden evaluar algunos parámetros que pueden servir como indicadores de qué tan amortiguado se encuentra un movimiento armónico.

1. **Decaimiento logarítmico**. Con este parámetro se puede evaluar la *tasa* de disminución de la amplitud.

Al inicio del movimiento la amplitud es $A_t = A_0$

Al completar un periodo $A_t = A_0 e^{\frac{-b\tau'}{2m}}$

Estimación del efecto de amortiguamiento

Se pueden evaluar

Al inicio del movimiento la amplitud es $A_0 = A_0$

Al completar un periodo $A_1 = A_0 e^{\frac{-b\tau\prime}{2m}}$

Al expresar la relación en amplitudes se obtiene:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{\frac{-b\tau'}{2m}}} = e^{\frac{b\tau'}{2m}}$$

Estimación del efecto de amortiguamiento

Extrayendo el logaritmo natural se obtiene el decaimiento logarítmico.

$$\ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) = \frac{b\tau'}{2m} = \delta$$

Un valor grande de decaimiento logarítmico indica una gran disminución de la amplitud durante un ciclo, lo cual se debe a un gran amortiguamiento.

Estimación del efecto de amortiguamiento

2. Tiempo de relajación. Es el tiempo que se tarda el sistema para que la amplitud alcance un valor de $e^{-1} = 0.368$ veces la amplitud inicial.

$$A_0 e^{\frac{-bt_{relax}}{2m}} = A_0 e^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{bt_{relax}}{2m} = 1 \quad \Rightarrow \quad t_{relax} = \frac{2m}{b}$$

Entre mayor sea el tiempo de relajación indica que el sistema se encuentra menos amortiguado.

Estimación del efecto de amortiguamiento

3. Factor de calidad. Evalúa la cantidad de oscilaciones que se desarrollan antes que la energía decaiga a un valor de $e^{-1} = 0.368$ veces la energía inicial.

$$E_0 e^{\frac{-bt_{relax}}{m}} = E_0 e^{-1}$$

Luego entonces:

$$\frac{bt}{m} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{m}{b}$$

Estimación del efecto de amortiguamiento

La cantidad de ciclos que se completan en un determinado tiempo se puede expresar como

$$\omega' t$$

Entonces, sustituyendo el tiempo se obtiene la expresión del factor de calidad:

$$Q = \omega' t = \frac{\omega' m}{b}$$

Un factor de calidad grande indica que el amortiguamiento es pequeño (permite que se completen muchos ciclos)