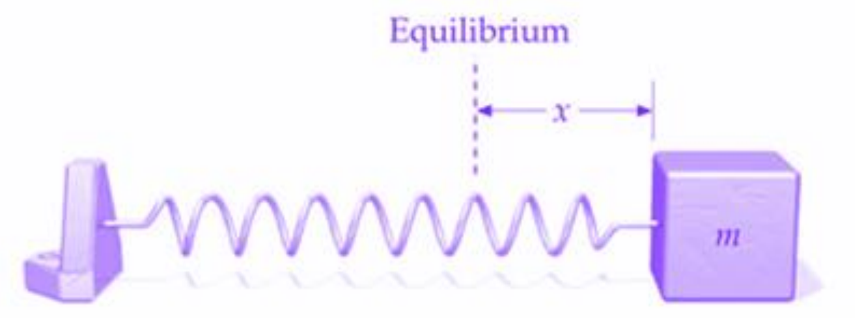
Movimiento Armónico Simple I: Sistema masa – resorte.



1309 FUNDAMENTOS DE ESPECTROSCOPÍA

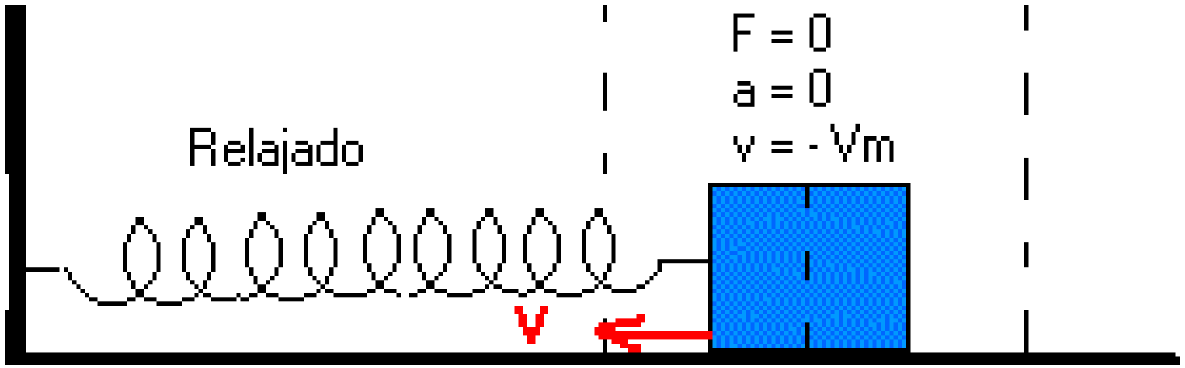
PROFESOR: ZURISADAI PADILLA GÓMEZ

M.A.S. I: Sistema masa – resorte

Un resorte se sujeta a un *muro* y en el otro extremo se sujeta a un bloque de masa *m*.

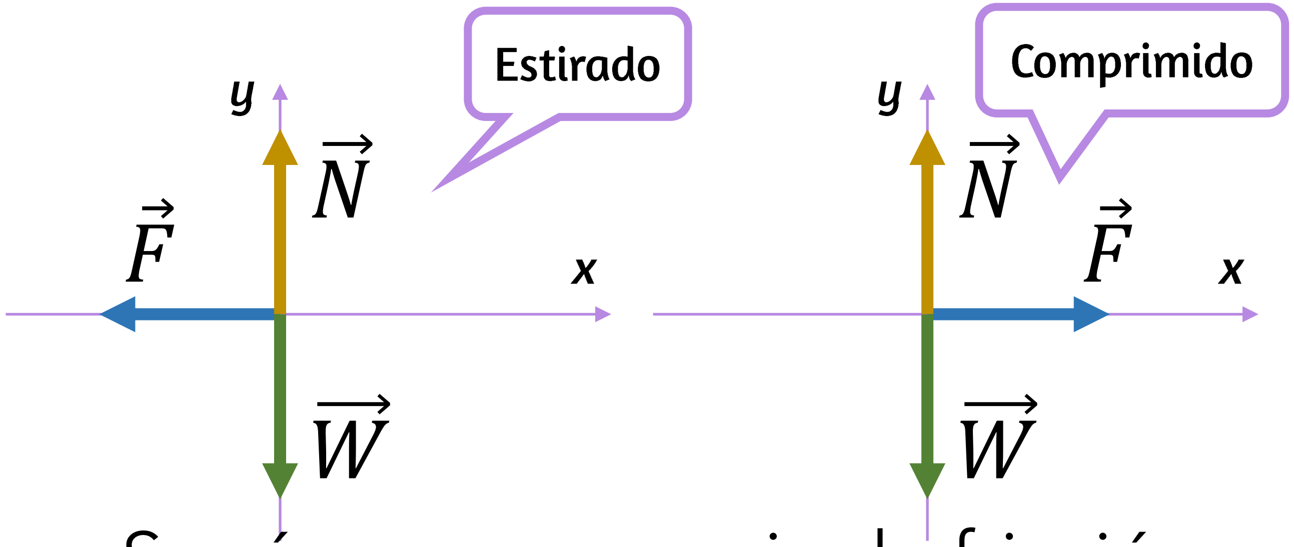
El punto donde el resorte está *relajado* se llama **punto de equilibrio**, y ahí se ubica la posición de referencia $x = 0$.

(b)

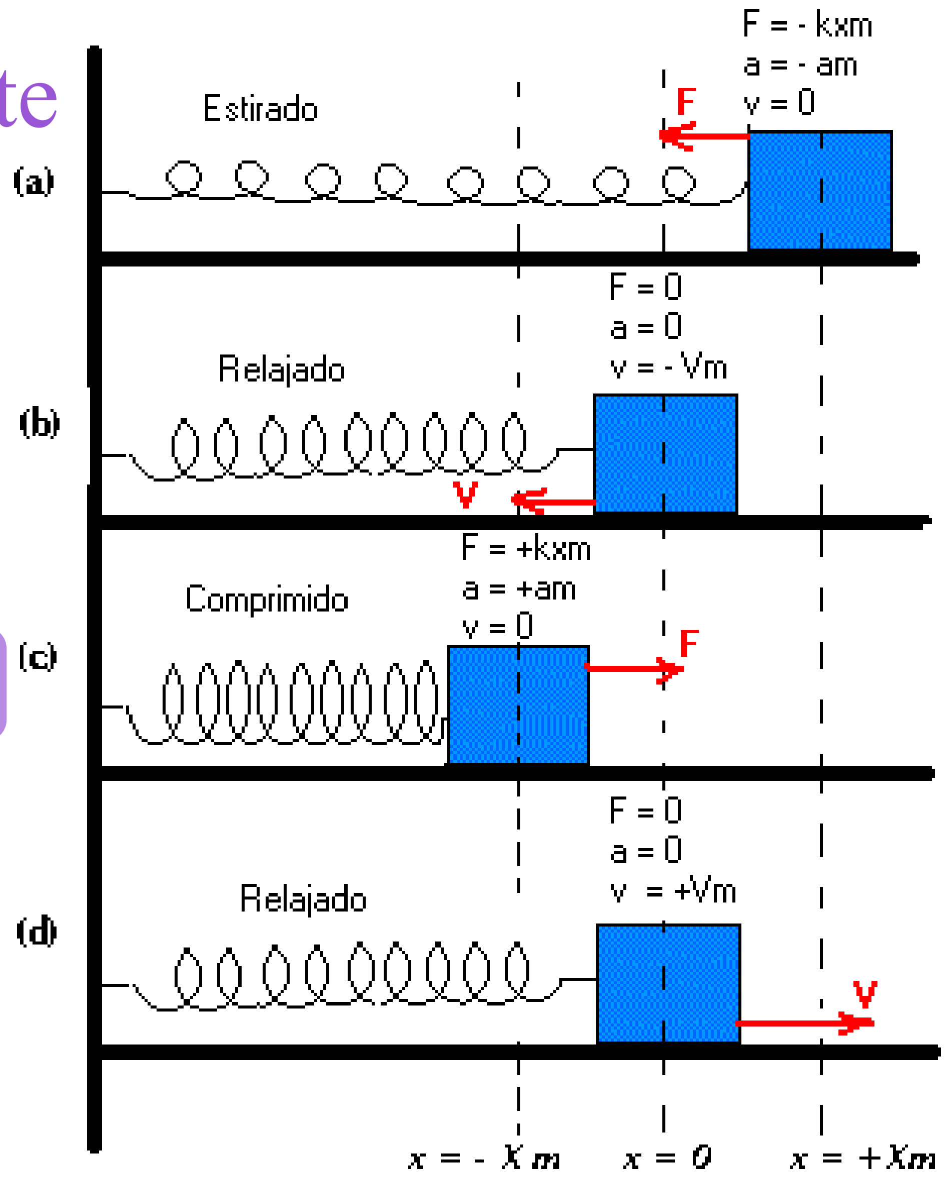


M.A.S. I: Sistema masa – resorte

Al desplazar el bloque del punto de equilibrio, el resorte comienza a ejercer una fuerza sobre el bloque que siempre apunta al punto de equilibrio.

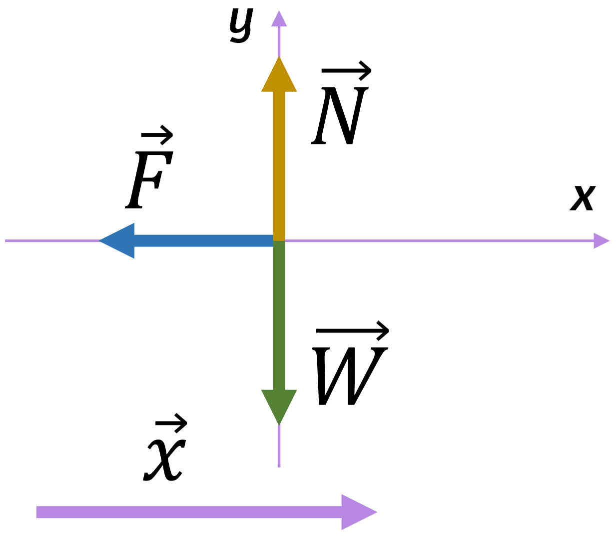


Supóngase ausencia de fricción



Ley de Hooke

La fuerza ejercida por el resorte depende directamente del desplazamiento y actúa en dirección contraria.



$$\boldsymbol{F = -kx}$$

F = Fuerza ejercida por el resorte.

k = Constante de restitución (del resorte)

x = Desplazamiento (desde el punto de equilibrio)

Ley de Hooke

Retomando la segunda Ley de Newton:

$$F = ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

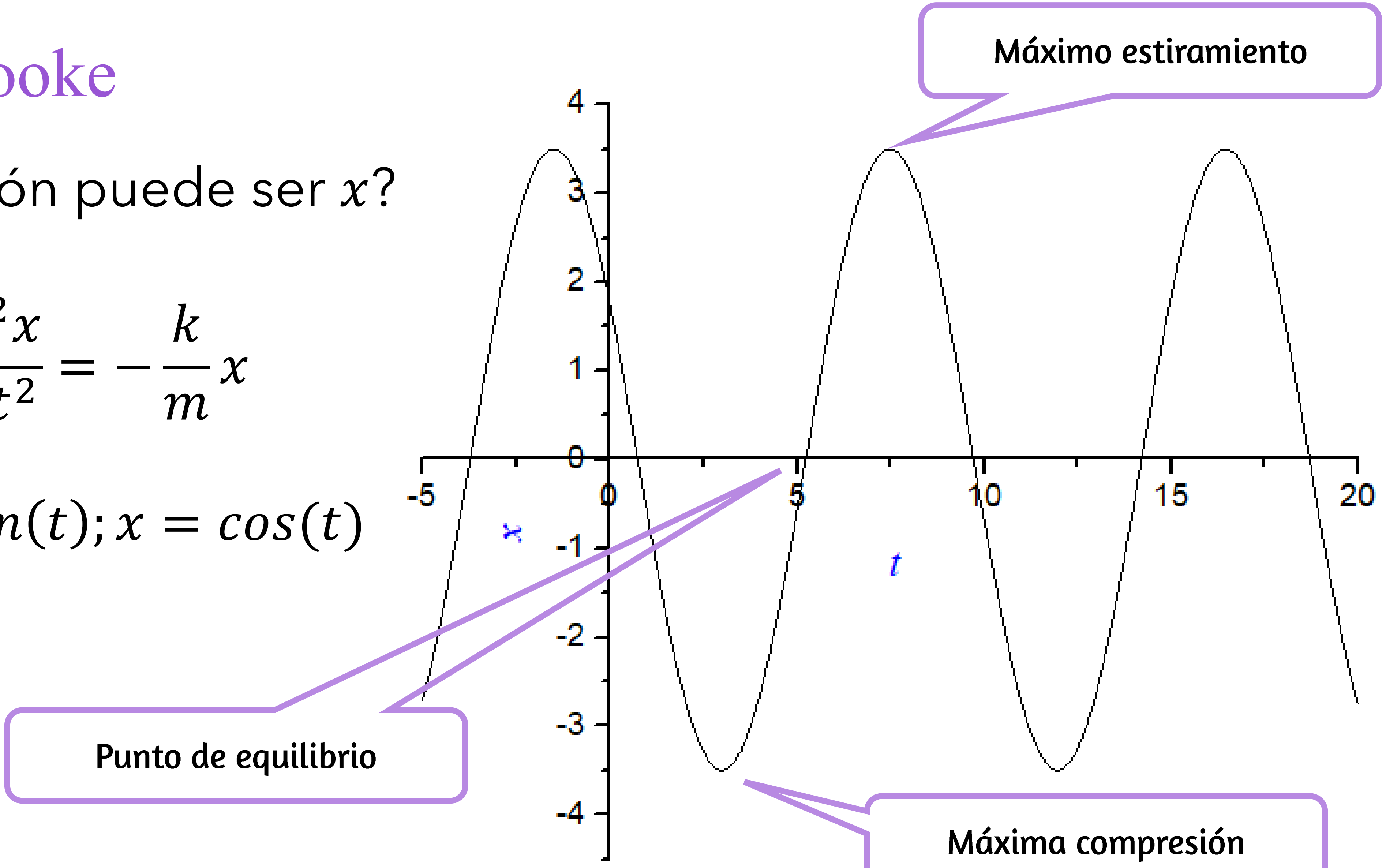
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Ley de Hooke

¿Qué función puede ser x?

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = sen(t); x = cos(t)$$



Ley de Hooke

Se debe presentar la solución general.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = Asen(\omega t + \varphi); \qquad \boldsymbol{x = Acos(\omega t + \varphi)}$$

A = Amplitud

ω = Frecuencia (natural) angular

φ = Constante de fase

Ley de Hooke

A = Amplitud. Indica cuál es el estiramiento (o compresión) máximo.

ω = Frecuencia (natural) angular. Expresa el número de ciclos (medidos en radiantes) completados en un segundo.

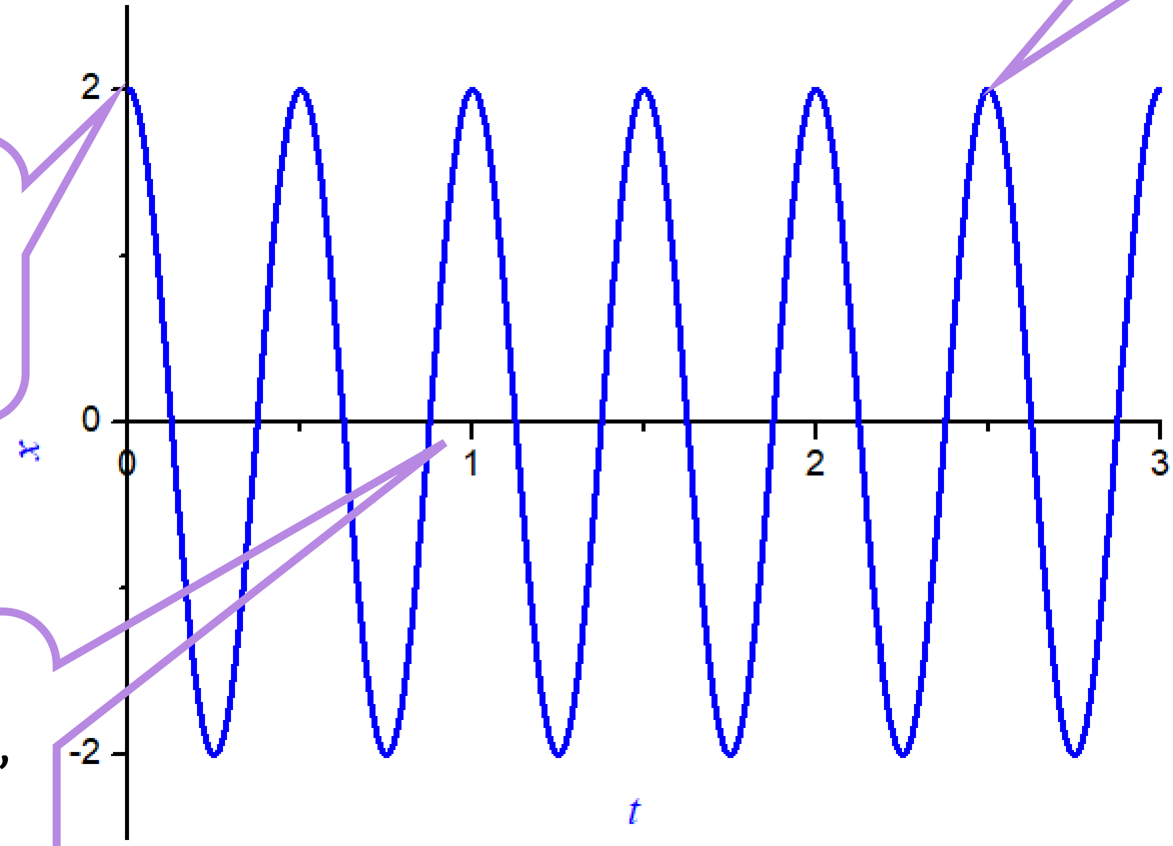
φ = Constante de fase. Depende del estado inicial del sistema (en qué punto y tiempo inició la oscilación).

Ley de Hooke

Amplitud. $A = 2$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Dado que la oscilación comienza en la elongación máxima, la constante de fase es cero.



$$x = 2\cos(4\pi t)$$

Frecuencia angular.
En 1 s se completan 2 ciclos, que equivale a 4π rad. Por tanto, $\omega = 4\pi$ rad/s

Ley de Hooke

Se debe presentar la solución general.

$$\boldsymbol{x = Acos(\omega t)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}Acos(\omega t)\right) = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\omega Asen(\omega t)\right) = -\frac{k}{m}x$$

Ley de Hooke

Se debe presentar la solución general.

$$\frac{d}{dt}\left(-\omega A sen(\omega t)\right) = -\frac{k}{m}x$$

$$-\omega^2 A cos(\omega t) = -\frac{k}{m}x$$

$$-\omega^2 A cos(\omega t) = -\frac{k}{m}A cos(\omega t)$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Frecuencia natural

Dado que $\boldsymbol{\omega}$ queda determinada por las variables *naturales* del sistema (masa y constante del resorte) recibe el nombre de **frecuencia angular natural** del sistema.

También es común representarla como $\boldsymbol{\omega_0}$.

Es la frecuencia a la que oscila un sistema de forma *natural*, y mientras la masa y la constante del resorte sean las mismas, la oscilación tendrá dicha frecuencia independientemente de otras cantidades (como amplitud y constante de fase)

Otras variables temporales

ν = Frecuencia “lineal” (s^{-1} = Hz). Expresa la cantidad de ciclos (oscilaciones) que se completan en un segundo.

τ = Periodo (s). Es el tiempo que transcurre para que se complete una oscilación.

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

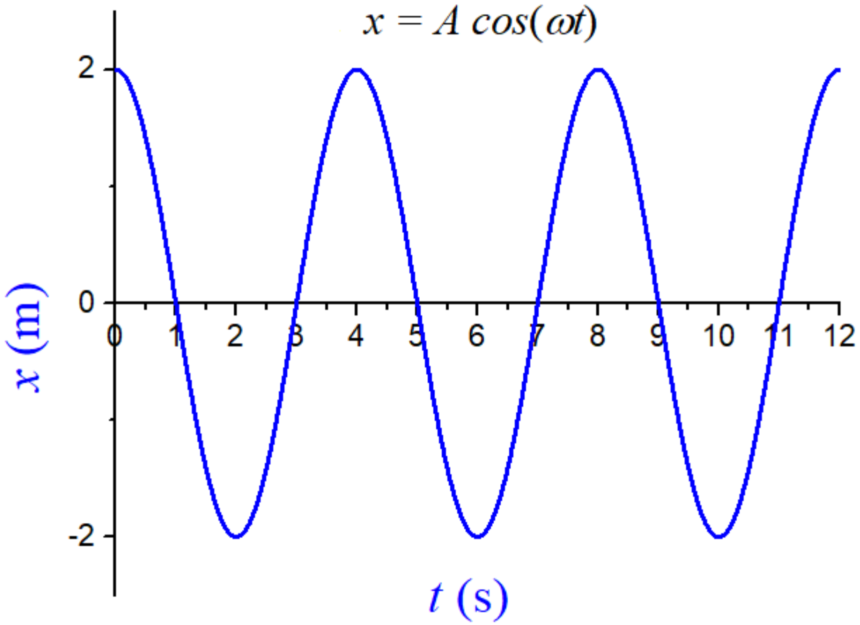
Posición, velocidad y aceleración en el M.A.S. I: Resorte

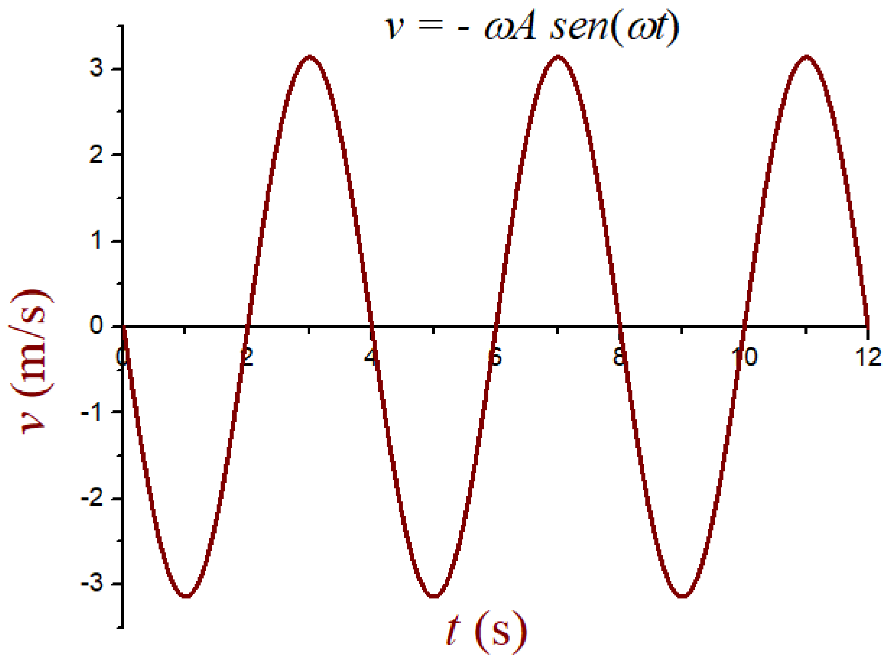
$$x = Acos(\omega t)$$

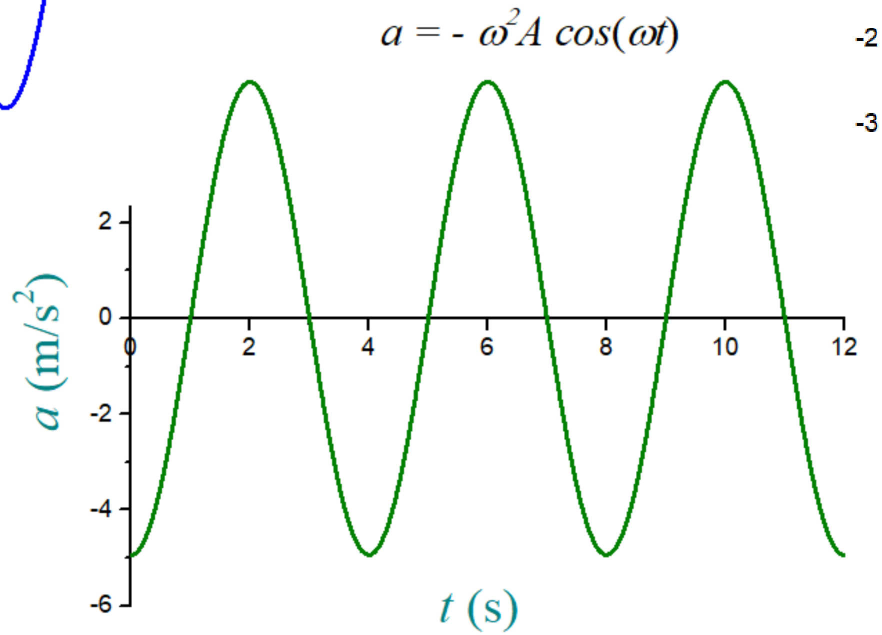
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega Asen(\omega t)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 Acos(\omega t)$$

Posición, velocidad y aceleración en el M.A.S. I: Resorte







Energía en el M.A.S. I: Resorte

Sobre la energía potencial (elásticas) se puede retomar la siguiente expresión:

$$F = -\frac{dU_e}{dx} = -kx$$

De ahí se obtiene la siguiente expresión:

$$dU_e = kx\,dx$$

$$\int dU_e = \int kx\,dx$$

$$\boldsymbol{U_e = \frac{kx^2}{2}}$$

Energía en el M.A.S. I: Resorte

Se retoman la expresión anterior y aquella conocida para la energía cinética:

$$U_e = \frac{kx^2}{2} \quad ; \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$x = Acos(\omega t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega Asen(\omega t)$$

$$U_e = \frac{kA^2cos^2(\omega t)}{2} \quad ; \quad K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sen^2(\omega t)$$

Energía en el M.A.S. I: Resorte

Se simplifica la expresión para la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$K = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2 sen^2(\omega t)$$

$$K = \frac{1}{2} k A^2 sen^2(\omega t)$$

Energía en el M.A.S. I: Resorte

Ahora se puede obtener la energía total:

$$U_e = \frac{kA^2 cos^2(\omega t)}{2} \quad ; \quad K = \frac{kA^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

$$E_{tot} = U_e + K$$

$$E_{tot} = \frac{kA^2 cos^2(\omega t)}{2} + \frac{kA^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2}\left(cos^2(\omega t) + sen^2(\omega t)\right) \rightarrow \boldsymbol{E_{tot} = \frac{kA^2}{2}}$$

Energía en el M.A.S. I: Resorte

Finalmente, se obtiene la energía cinética en función de la posición:

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2} \quad ; \quad U_e = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_{tot} = U_e + K \rightarrow K = E_{tot} - U_e$$

$$K = \frac{kA^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \rightarrow K = \frac{k}{2}(A^2 - x^2)$$

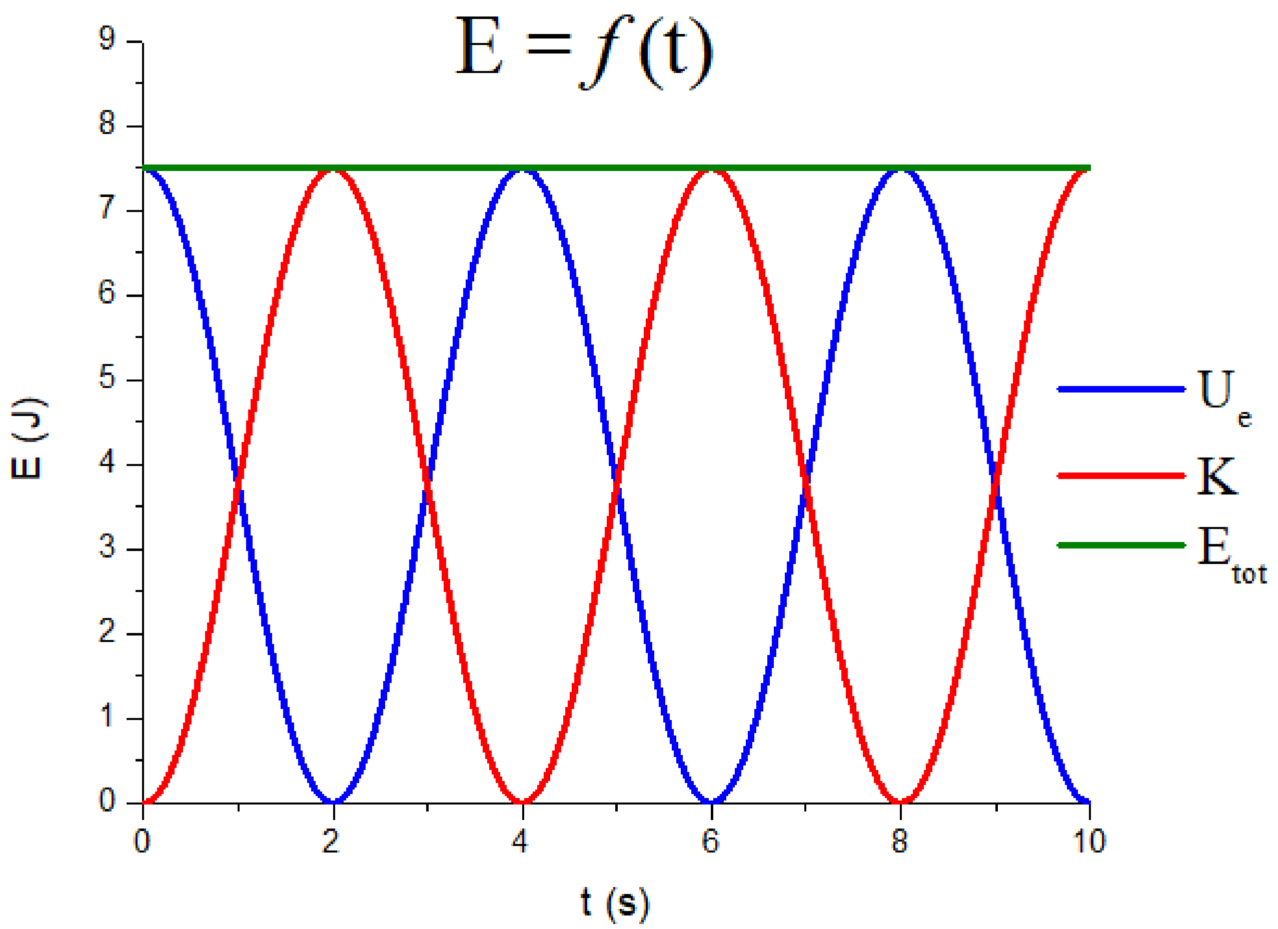
Energía en el M.A.S. I: Resorte

Análisis gráfico de la energía en función del tiempo:

$$U_e = \frac{kA^2 cos^2(\omega t)}{2}$$

$$K = \frac{kA^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{kA^2}{2}}$$



Energía en el M.A.S. I: Resorte

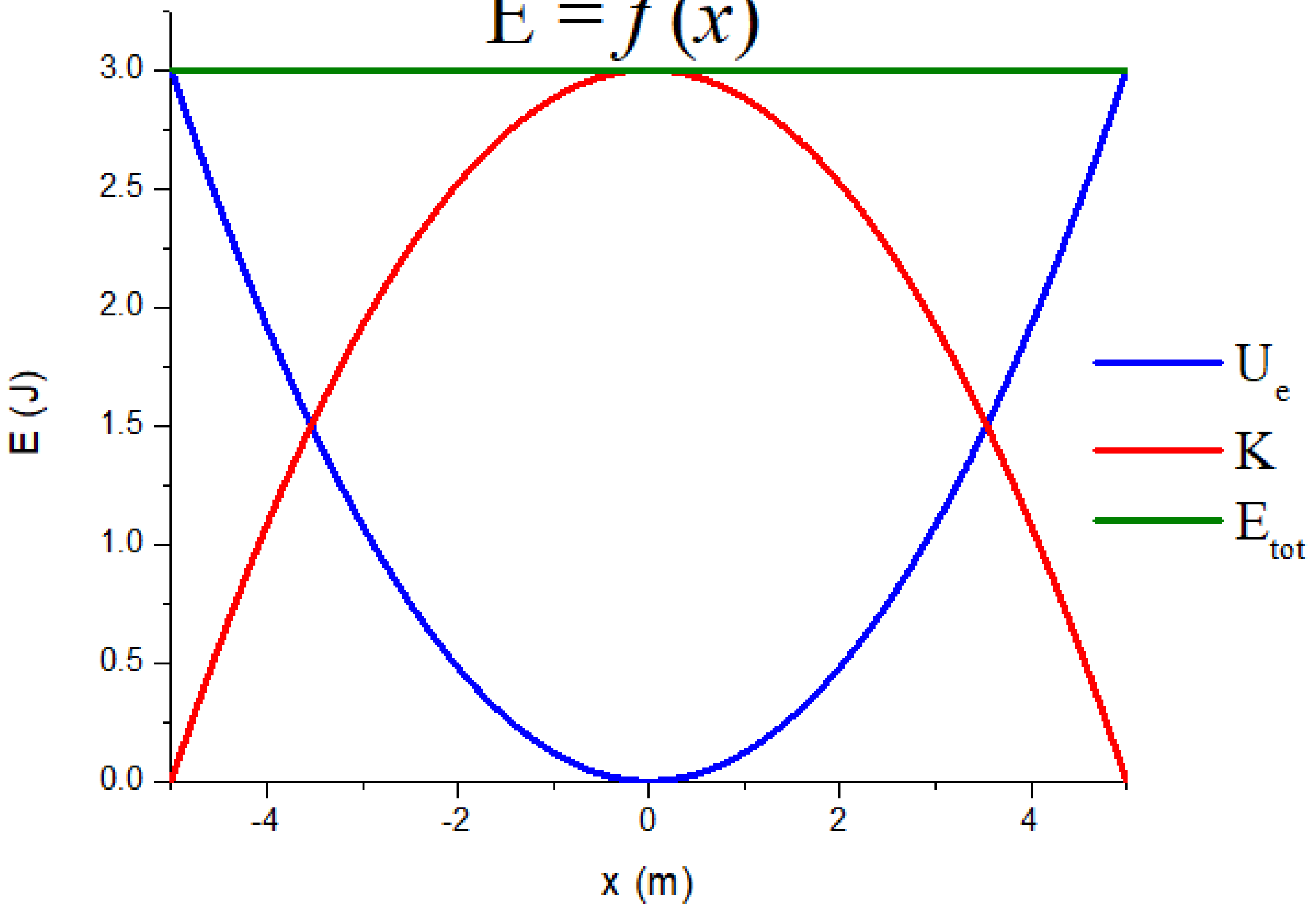
Análisis gráfico de la energía en función de la posición:

$$U_e = \frac{kx^2}{2}$$

$$K = \frac{k}{2}(A^2 - x^2)$$

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2}$$

$$E = f(x)$$



Energía en el M.A.S. I: Resorte

Se concluye entonces que la energía total en un sistema con M.A.S. es conservativo (mantiene constante su energía total).

Durante el movimiento, la energía se está interconvirtiendo en su forma potencial elástica y cinética.

Ejercicio

Un sistema oscilatorio se construye con un resorte cuya constante de elasticidad es de 50 N/m y una masa de 250 g. Considere una elongación máxima de 15 cm.

Calcule:

- ❑ La frecuencia natural angular de oscilación.
- ❑ La velocidad máxima que alcanza la masa.
- ❑ Después de iniciado el movimiento, ¿Cuánto tiempo se requiere para alcanzar la velocidad máxima?
- ❑ ¿Cuál es la energía total del sistema?