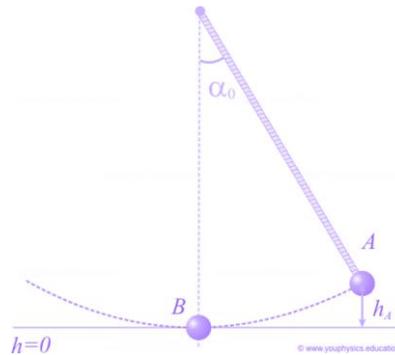




Movimiento Armónico Simple II: Péndulo simple



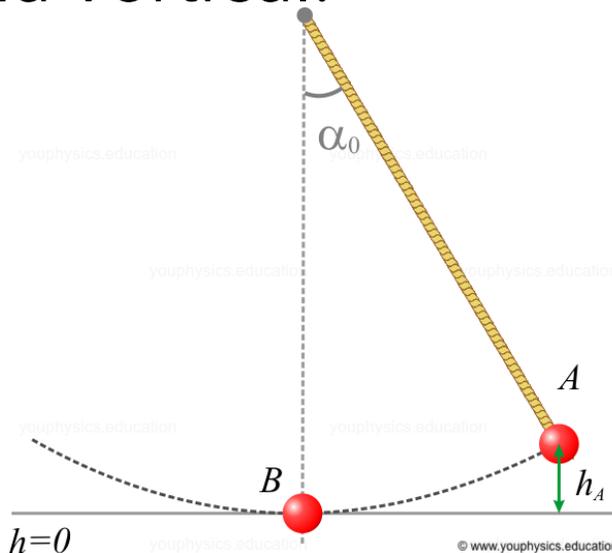
1309 FUNDAMENTOS DE ESPECTROSCOPÍA

PROFESOR: ZURISADAI PADILLA GÓMEZ

M.A.S. II: Péndulo simple

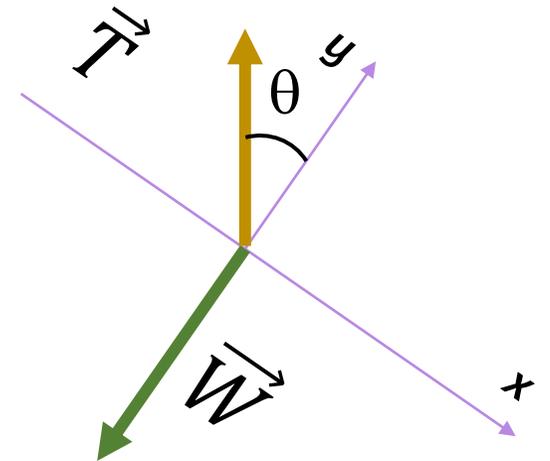
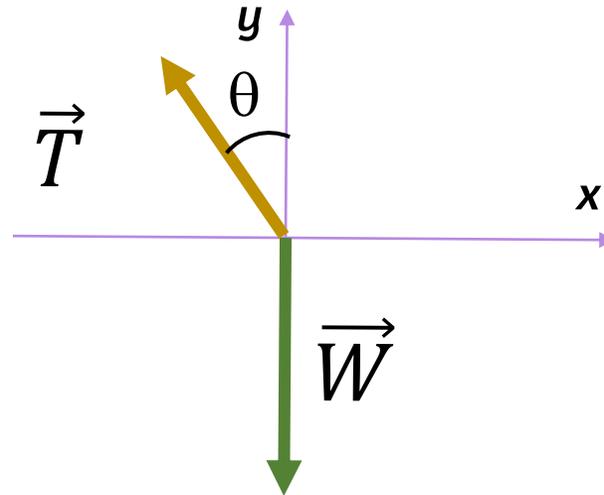
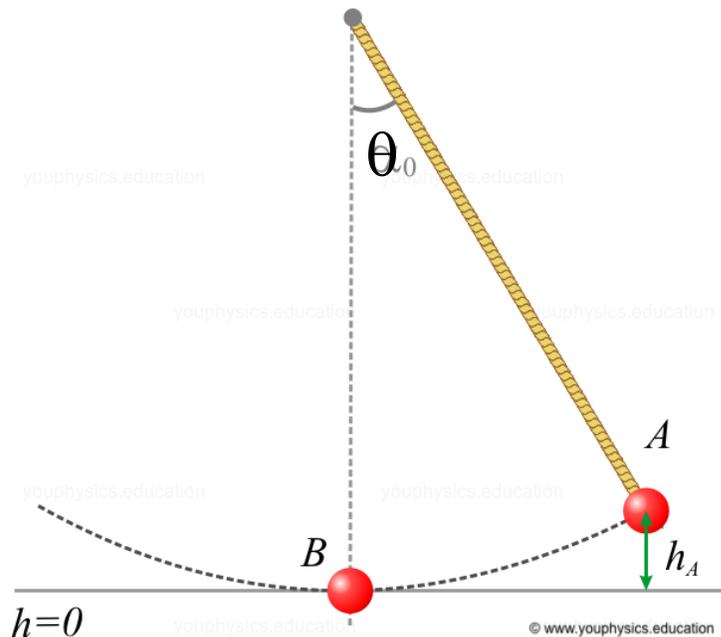
Consiste en un bloque con masa conocida atado al extremo de un hilo o varilla (cuya masa es despreciable) la cual está a su vez sujeta por el otro extremo a un soporte.

Se llama **punto de equilibrio** en donde la varilla o hilo se encuentra justo sobre la vertical.



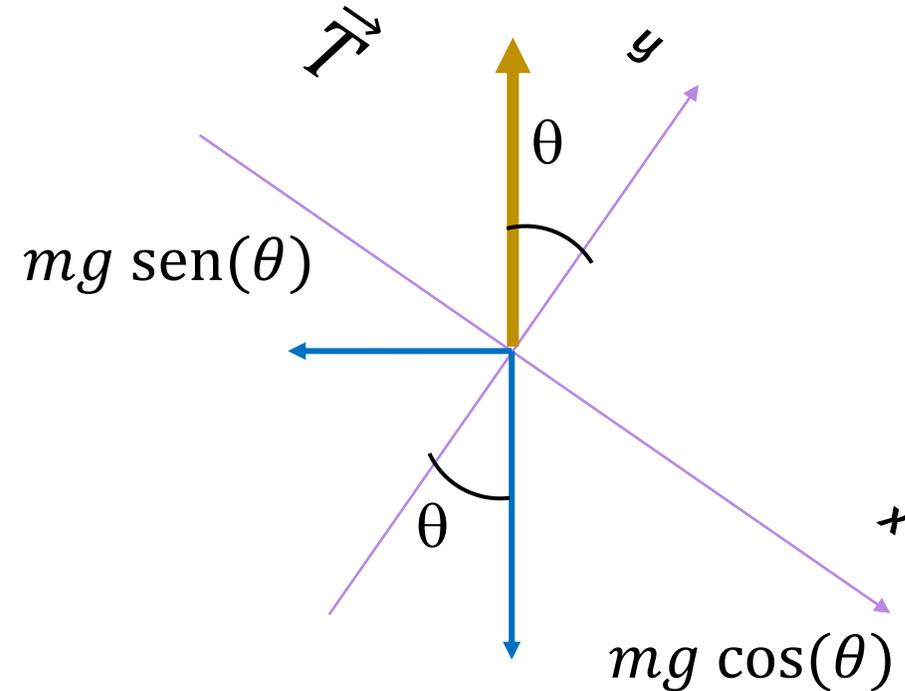
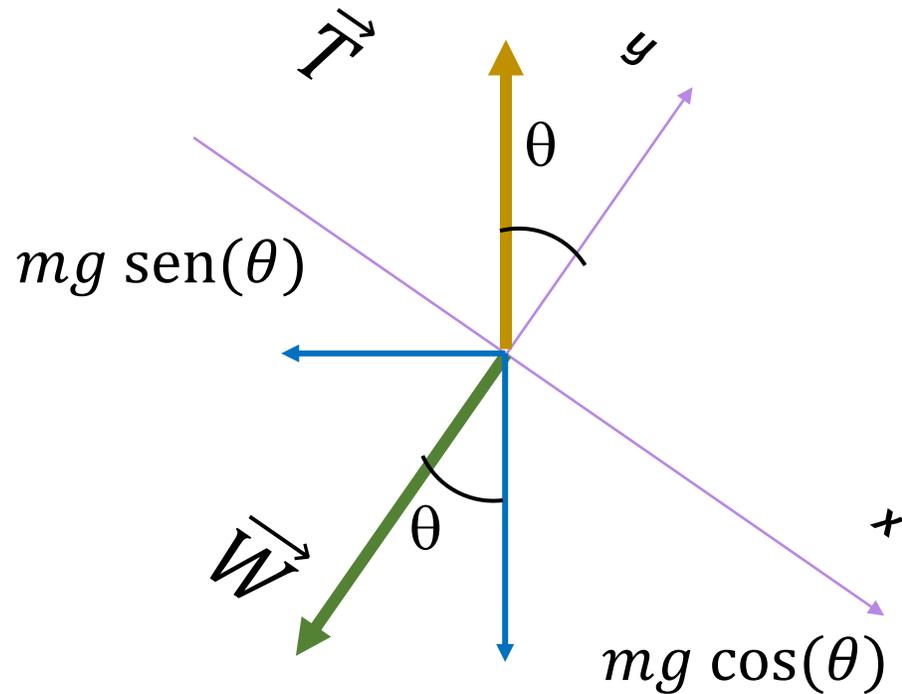
M.A.S. II: Péndulo simple

Al desplazar el péndulo de su posición de equilibrio se observa la acción de dos fuerzas: la tensión de la cuerda y el peso.



M.A.S. II: Péndulo simple

El peso se puede descomponer en dos vectores: uno antiparalelo a la tensión y otro perpendicular.



M.A.S. II: Péndulo simple

La tensión y el término $mg \cos(\theta)$ se anulan, quedando únicamente la componente tangencial como fuerza de restitución.

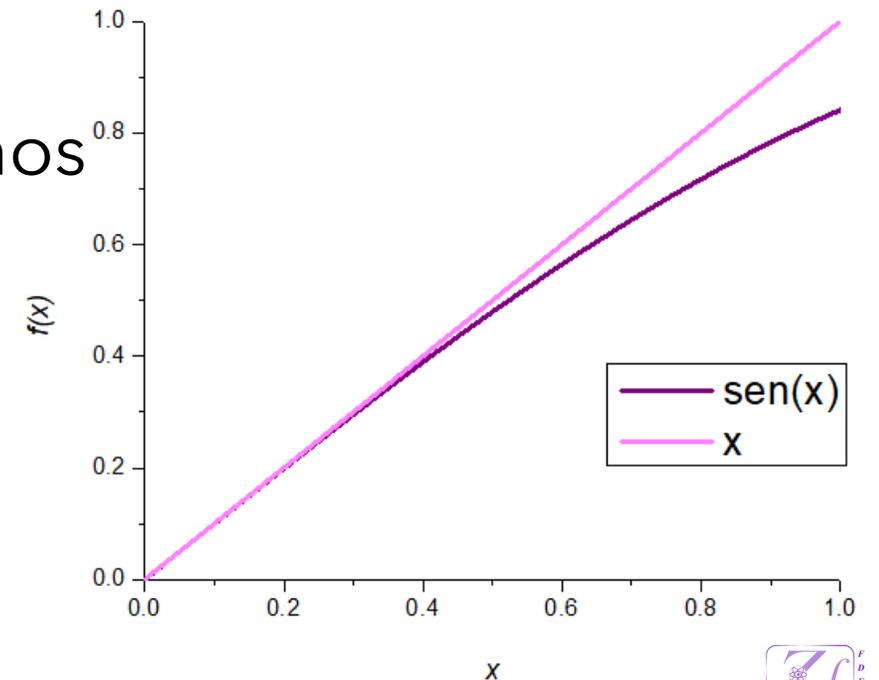
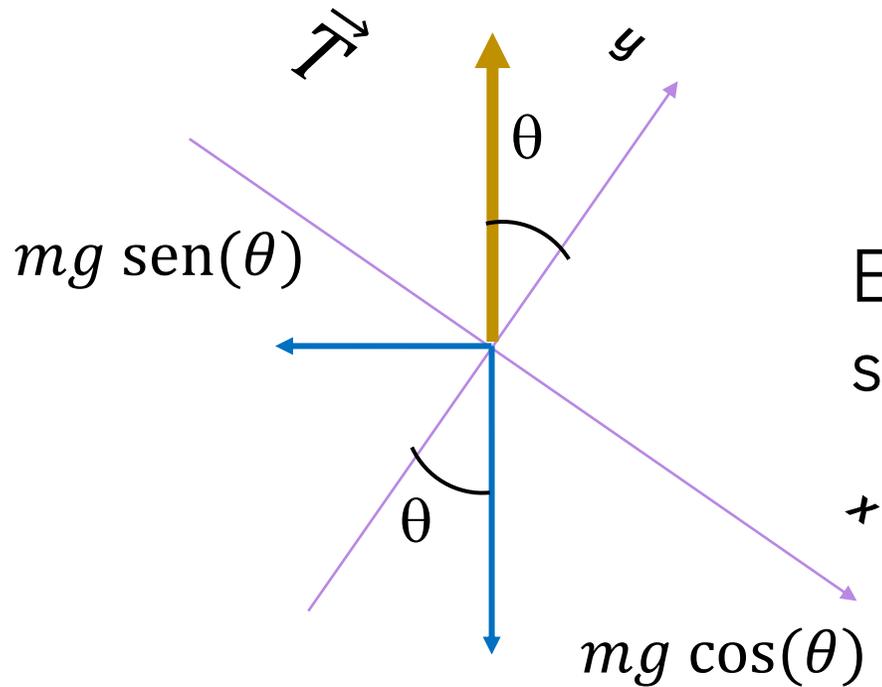
$$ma = -mg \operatorname{sen}(\theta)$$

$$a = -g \operatorname{sen}(\theta)$$

En ángulos pequeños se cumple que:

$$\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$$

$$a = -g\theta$$



M.A.S. II: Péndulo simple

$$a = -g\theta$$

La aceleración lineal guarda la siguiente relación con la aceleración angular:

$$a = l\alpha$$

$$a = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

M.A.S. II: Péndulo simple

Esto es un *déjà vu*.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Posición, velocidad y aceleración en el M.A.S. II:

Péndulo simple

Sobre posición, velocidad y aceleración angulares.

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_0 \text{sen}(\omega t)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t)$$

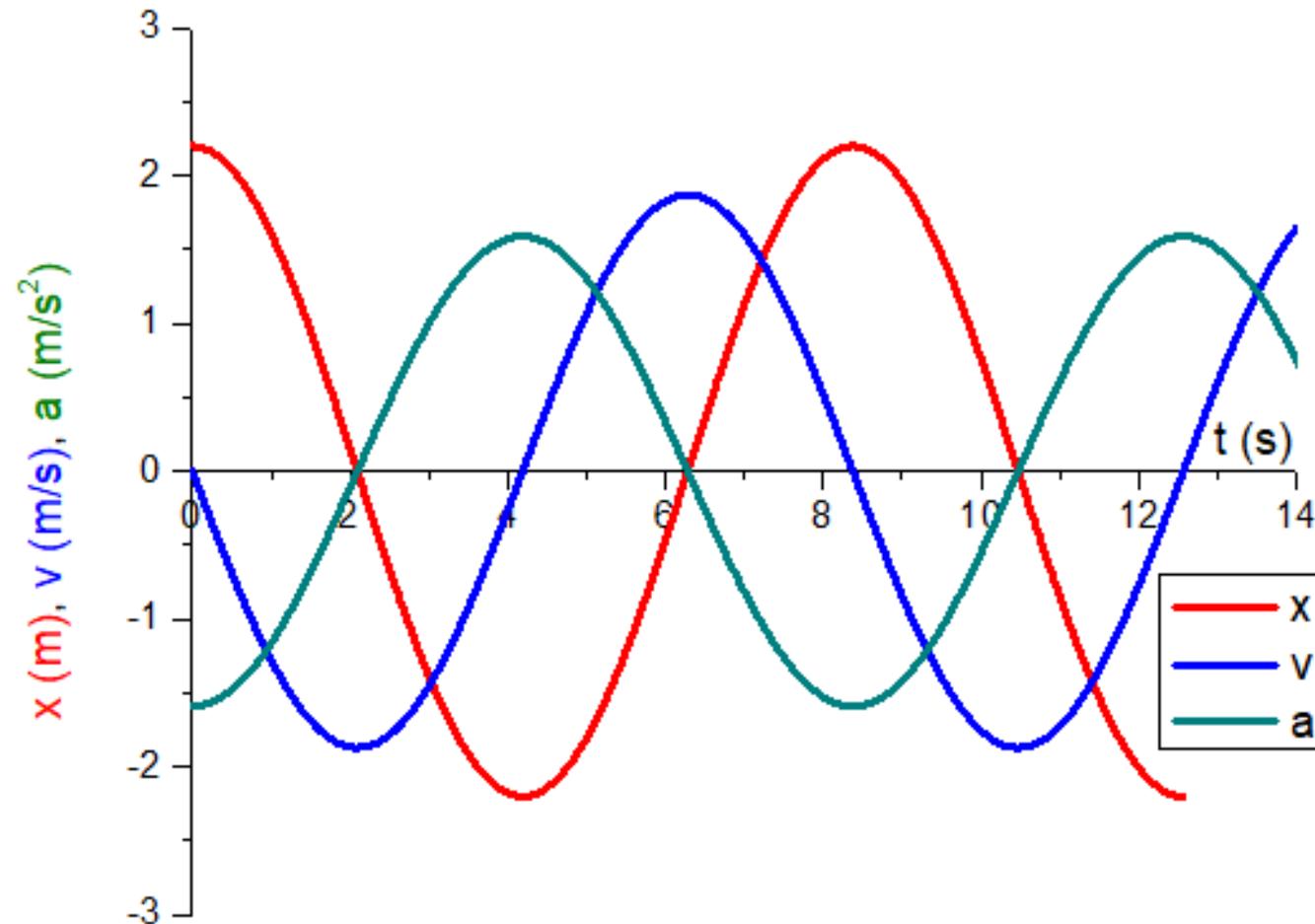
Sobre posición, velocidad y aceleración lineales.

$$r = l\theta = A \cos(\omega t)$$

$$v = l \frac{d\theta}{dt} = -\omega A \text{sen}(\omega t)$$

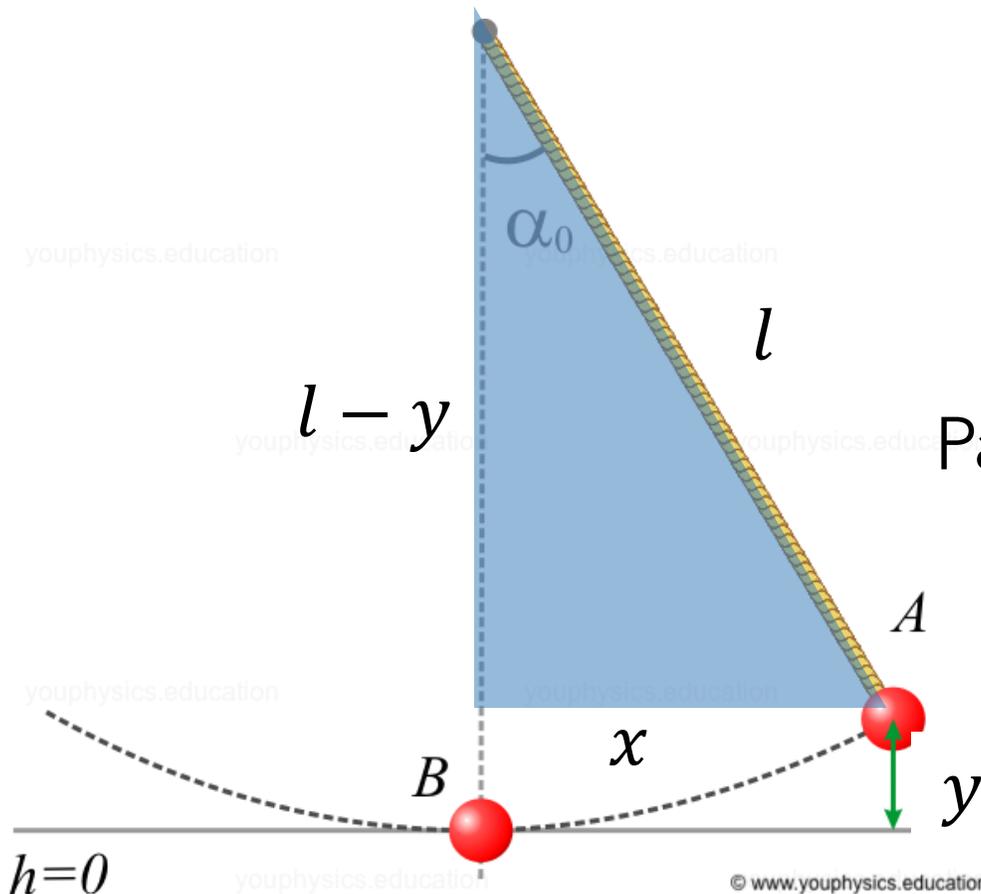
$$a = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

Posición, velocidad y aceleración en el M.A.S. II: Péndulo simple



Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Obtención de la energía potencial gravitacional:



$$l^2 = (l - y)^2 + x^2$$
$$l^2 = l^2 - 2ly + y^2 + x^2$$
$$2ly = y^2 + x^2$$

Para ángulos pequeños, se cumple que:

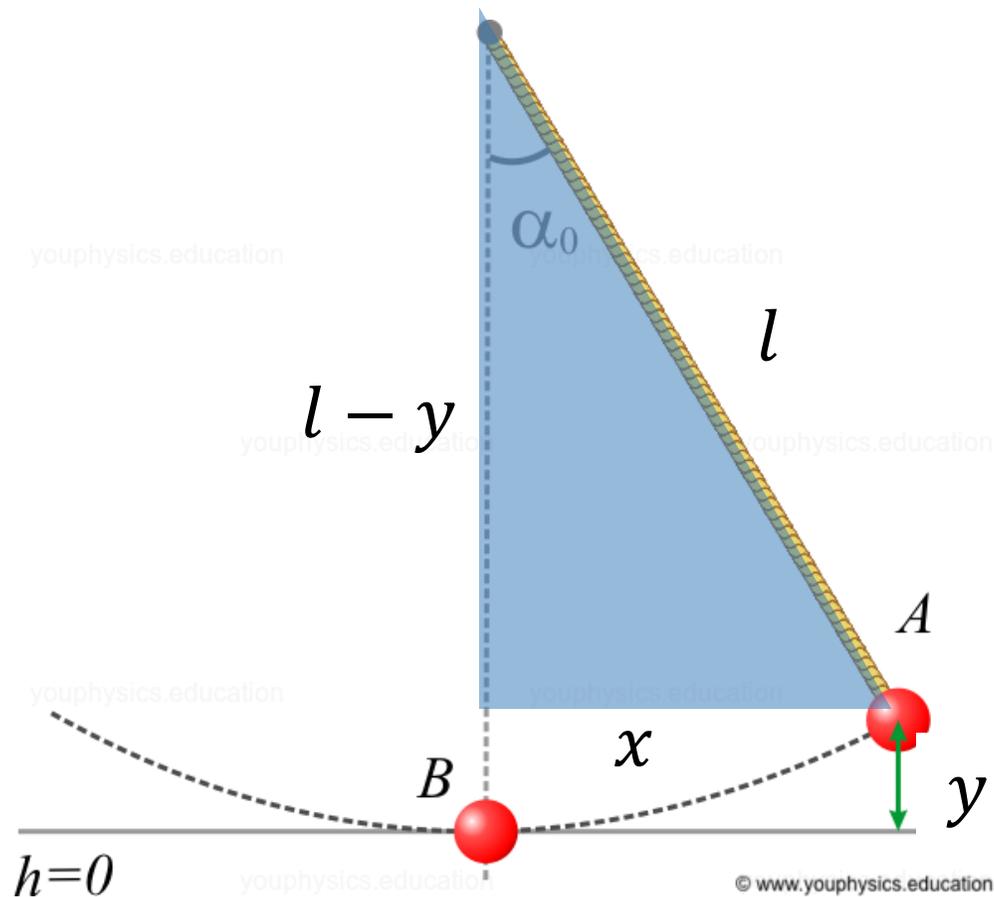
$$l \gg x \gg y$$

$$2ly \approx x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2l}$$

Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Obtención de la energía potencial gravitacional:



$$y = \frac{x^2}{2l}$$

$$U_g = mgy = \frac{mgx^2}{2l}$$

$$x \approx r = l\theta = l\theta_0 \cos(\omega t)$$

$$U_g = \frac{mgl\theta^2}{2} = \frac{mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t)}{2}$$

Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Obtención de la energía cinética y total:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{TOT} = U_g + K$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

$$E_{TOT} = \frac{mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t)}{2} + \frac{mgl\theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}m \frac{g}{l} l^2 \theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

$$E_{TOT} = \frac{mgl\theta_0^2}{2} = \frac{mgA^2}{2l}$$

$$K = \frac{mgl\theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)}{2}$$

Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Obtención de la energía cinética y total:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{TOT} = U_g + K$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

$$E_{TOT} = \frac{mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t)}{2} + \frac{mgl\theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}m \frac{g}{l} l^2 \theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

$$E_{TOT} = \frac{mgl\theta_0^2}{2} = \frac{mgA^2}{2l}$$

$$K = \frac{mgl\theta_0^2 \text{sen}^2(\omega t)}{2}$$

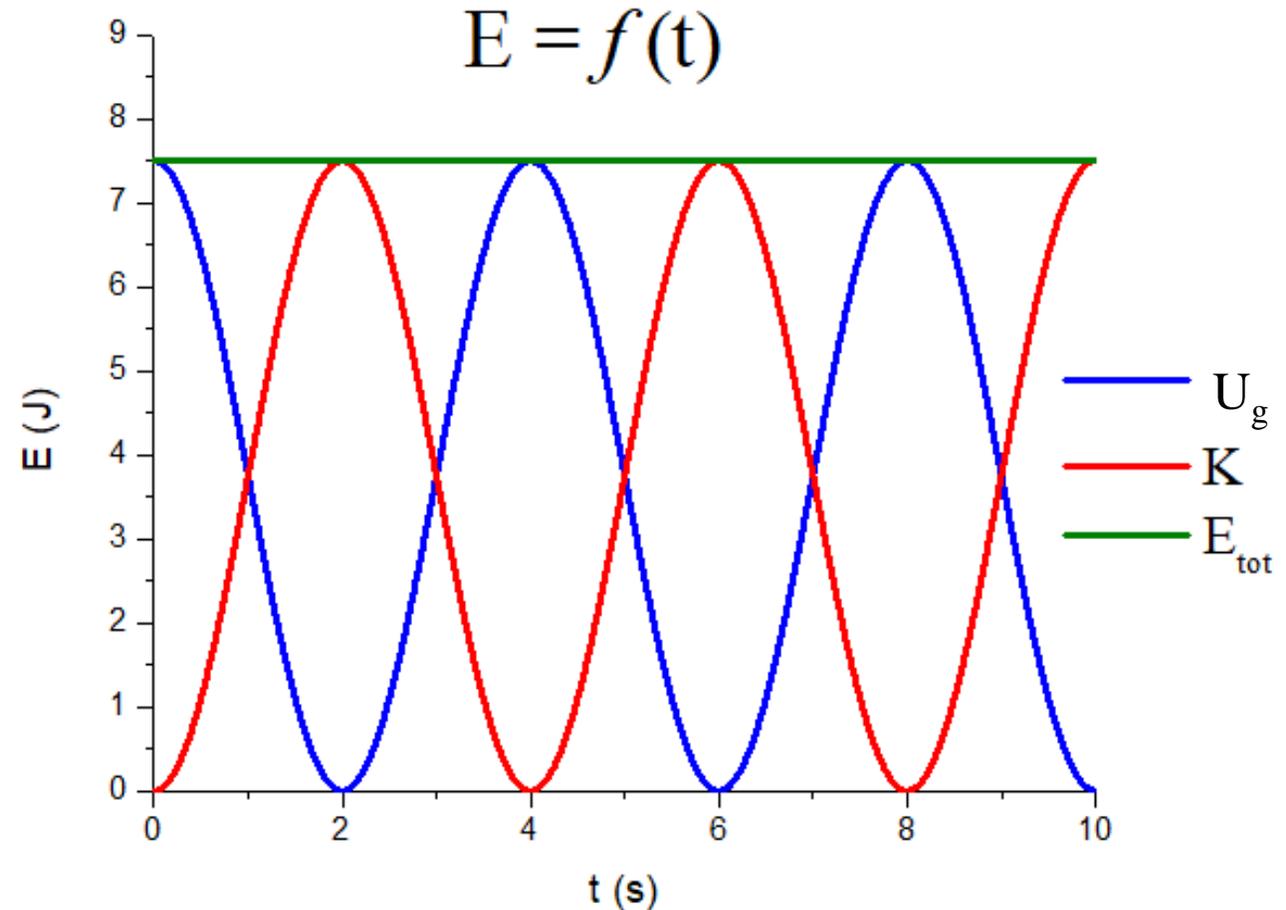
Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Análisis gráfico de la energía en función del tiempo:

$$U_g = \frac{mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t)}{2}$$

$$K = \frac{mgl\theta_0^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$E_{tot} = \frac{mgl\theta_0^2}{2}$$



Energía en el M.A.S. II: Péndulo simple

Análisis gráfico de la energía en función de la posición:

$$K = E_{TOT} - U_g$$

$$U_g = \frac{mgl\theta^2}{2}$$

$$E_{TOT} = \frac{mgl\theta_0^2}{2}$$

$$K = \frac{mgl\theta_0^2}{2} - \frac{mgl\theta^2}{2}$$

$$K = \frac{mgl}{2} (\theta_0^2 - \theta^2)$$

