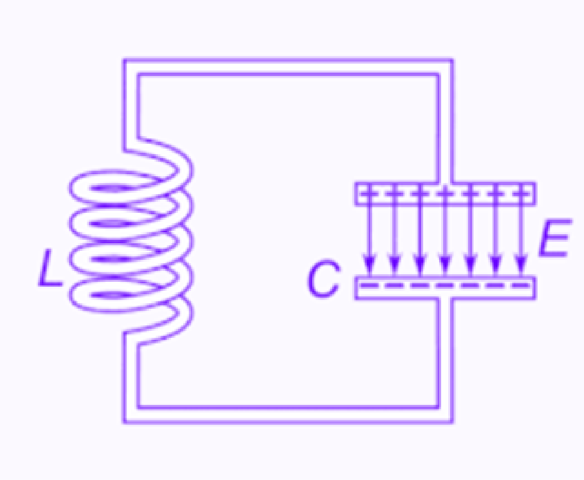
Movimiento Armónico Simple III: Circuito LC



1309 FUNDAMENTOS DE ESPECTROSCOPÍA

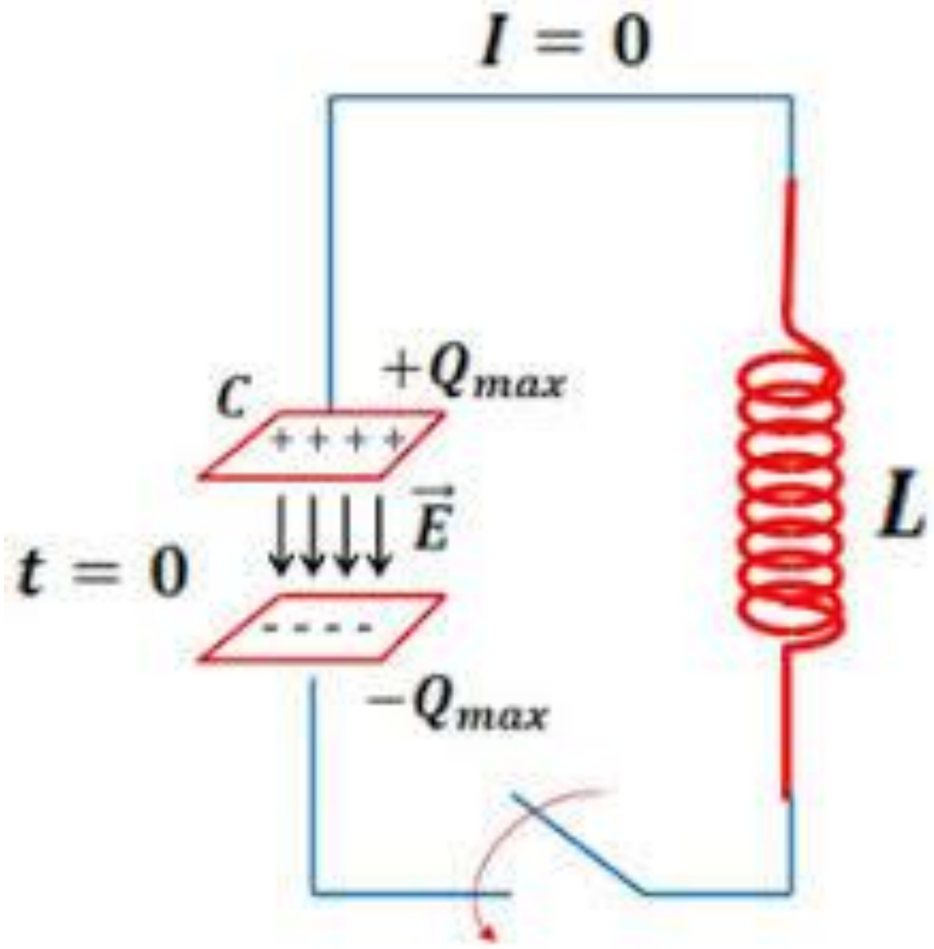
PROFESOR: ZURISADAI PADILLA GÓMEZ

M.A.S. III: Circuito LC

Aquí el movimiento es de la **carga eléctrica**.

El punto de equilibrio se tiene cuando el capacitor está descargado.

Se supone ausencia de resistencia.



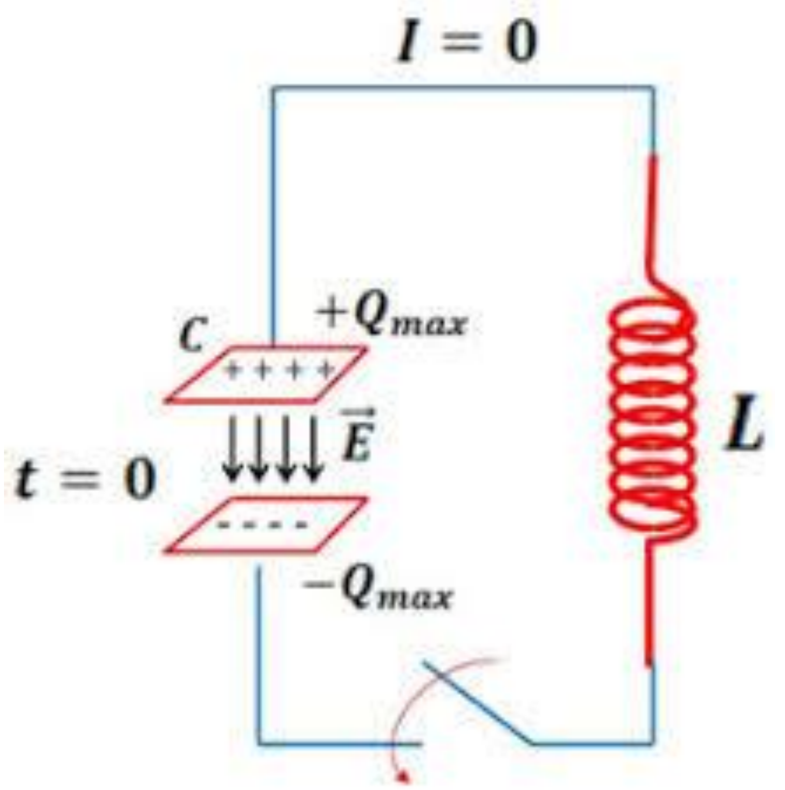
M.A.S. III: Circuito LC

Para este sistema se debe cumplir la **Ley de Kirchhoff:**

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 0$$

$$V_C + V_L = 0$$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$



M.A.S. III: Circuito LC

Para este sistema se debe cumplir la **Ley de Kirchhoff:**

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{LC}$$

M.A.S. III: Circuito LC

Es una ecuación diferencial muy *familiar*:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{LC} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\theta = \boldsymbol{\theta_0 cos(\omega t)} \qquad \boldsymbol{q = Q_0 \cos(\omega t)} \qquad \boldsymbol{x = Acos(\omega t)}$$

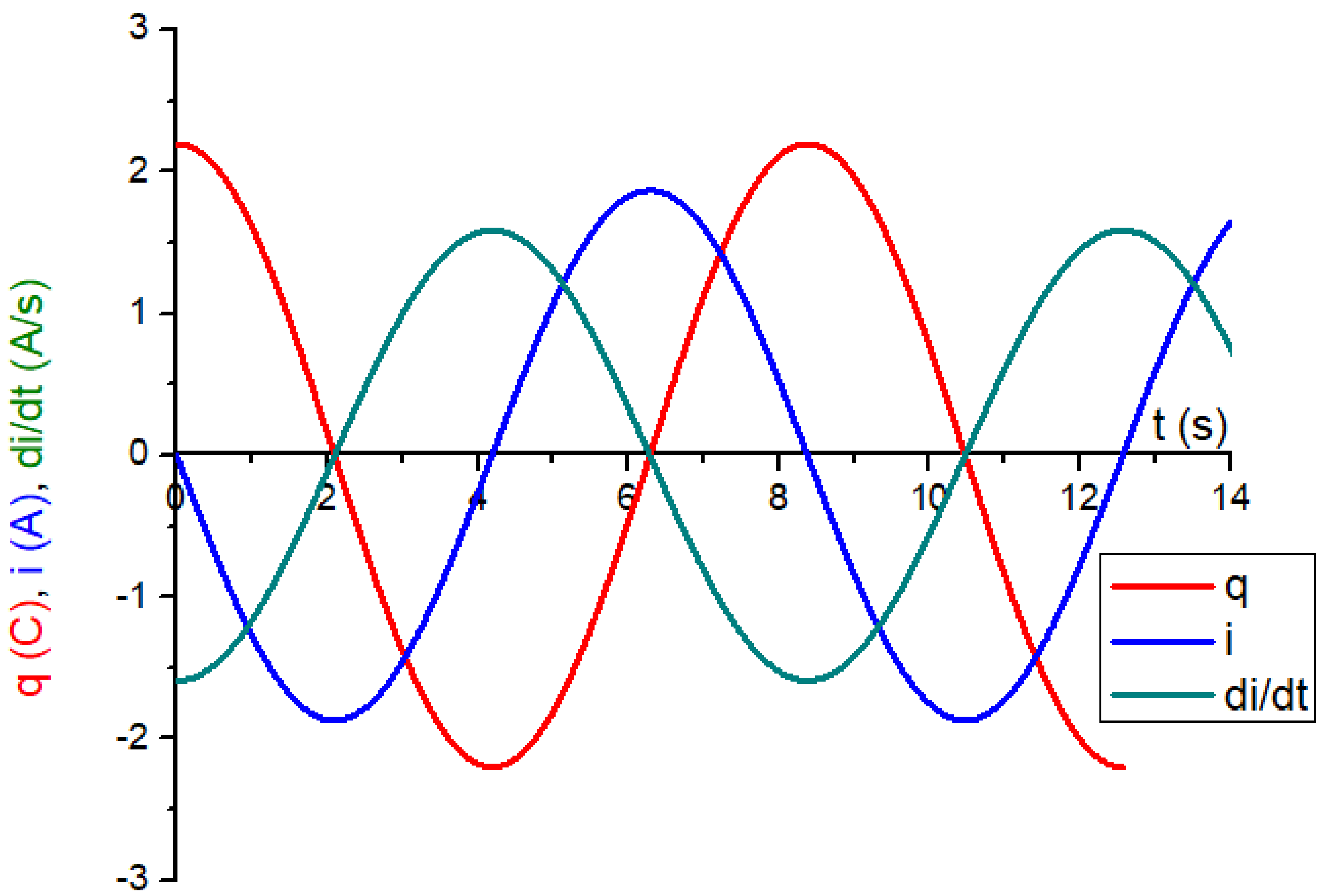
$$\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{g}{l} \qquad \boldsymbol{\omega}^2 = \frac{1}{LC} \qquad \boldsymbol{\omega}^2 = \frac{k}{m}$$

Carga, intensidad de corriente y cambio de corriente en el M.A.S. III: Circuito LC

$$q = Q_0 cos(\omega t)$$

$$i = -\omega Q_0 sen(\omega t)$$

$$\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q_0 cos(\omega t)$$



Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

En este caso se tienen dos energías potenciales. La primera es de naturaleza eléctrica, correspondiente al capacitor:

$$\frac{dU_C}{dq} = V_C$$

$$dU_C = V_C dq$$

$$\int dU_C = \int V_C dq = \int \frac{q}{C} dq$$

$$\boldsymbol{U_C = \frac{q^2}{2C}}$$

Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

La segunda es de naturaleza magnética, referente al inductor:

$$P = iV_L$$

$$\frac{dU_L}{dt} = i\,L\,\frac{di}{dt}$$

$$dU_L = Li\,di$$

$$\boldsymbol{U_L = \frac{Li^2}{2}}$$

Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

Se obtienen las expresiones de la energía en función del tiempo:

$$E_{tot} = U_C + U_L = \frac{\boldsymbol{q^2}}{\boldsymbol{2C}} + \frac{\boldsymbol{Li^2}}{\boldsymbol{2}}$$

$$q = Q_0 cos(\omega t)$$

$$i = -\omega Q_0 sen(\omega t)$$

$$E_{tot} = \frac{{Q_0}^2 cos^2(\omega t)}{2C} + \frac{L\omega^2 {Q_0}^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E_{tot} = \frac{{Q_0}^2 cos^2(\omega t)}{2C} + \frac{{Q_0}^2 sen^2(\omega t)}{2C}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{{Q_0}^2}{2C}}$$

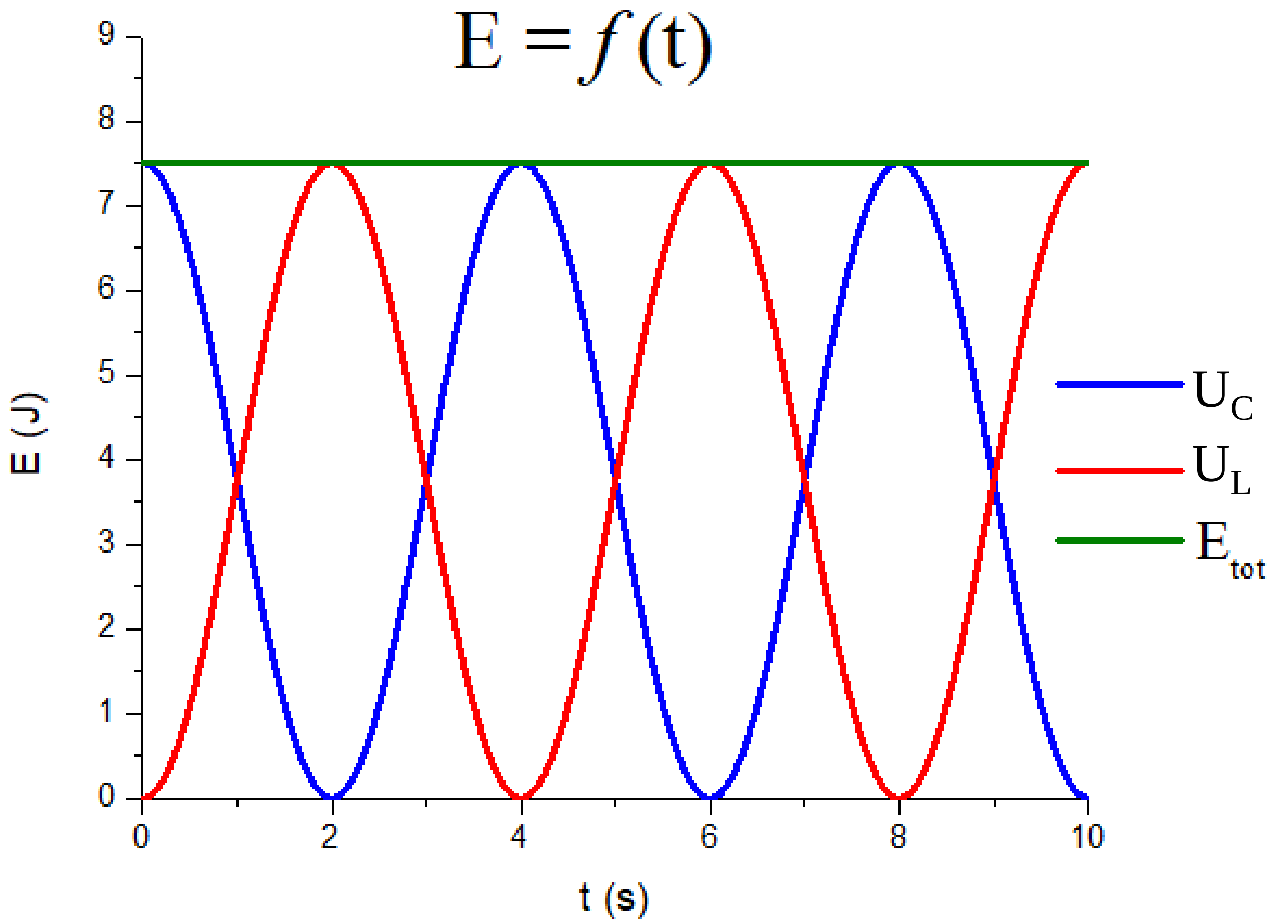
Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

Análisis gráfico de la energía en función del tiempo:

$$U_C = \frac{{Q_0}^2 cos^2(\omega t)}{2C}$$

$$U_L = \frac{{Q_0}^2 sen^2(\omega t)}{2C}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{{Q_0}^2}{2C}}$$



Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

Se obtienen las expresiones de la energía en función de la carga:

$$E_{tot} = U_C + U_L$$

$$U_L = E_{tot} - U_C$$

$$U_L = \frac{{Q_0}^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2C}({Q_0}^2 - q^2)$$

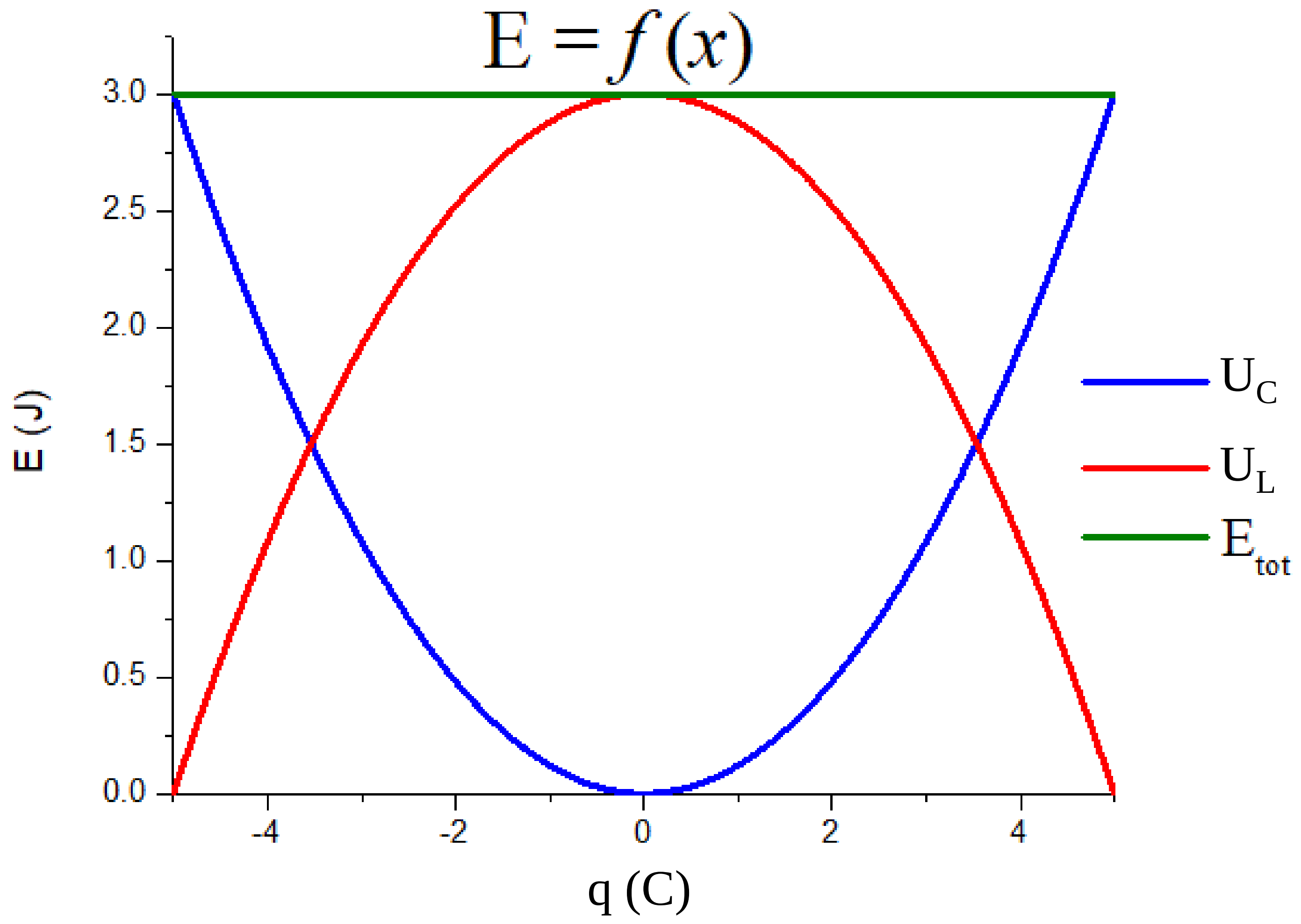
Energía en el M.A.S. III: Circuito LC

Análisis gráfico de la energía en función de la posición:

$$U_C = \frac{q^2}{2C}$$

$$U_L = \frac{1}{2C}\left({Q_0}^2 - q^2\right)$$

$$E_{tot} = \frac{{Q_0}^2}{2C}$$



Variables análogas entre el sistema Masa – resorte y el Circuito LC.

Se puede establecer la siguiente analogía entre variables.

Masa - Resorte	Circuito LC
Posición (x)	Carga eléctrica (q)
Velocidad (υ)	Intensidad de corriente (i)
Aceleración (a)	Variación de corriente (di/dt)
Constante de restitución (k)	Inverso de capacitancia (1/C)
Masa (m)	Inductancia (L)
Energía potencial elástica (U_e)	Energía potencial eléctrica (U_C)
Energía cinética (K)	Energía potencial magnética (U_L)

Ejercicio

Se tiene un circuito LC donde la corriente eléctrica máxima que se alcanza es de 0.2 A usando un capacitor de 3 mF y cuya carga máxima es de 0.5 mC. Calcule:

- La inductancia del inductor empleado.
- La energía total del sistema.
- La máxima diferencia de potencial que se manifiesta en el inductor.