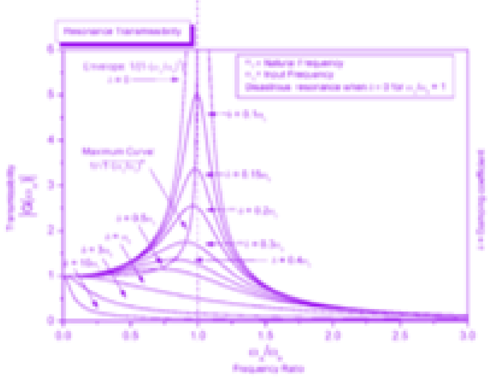
Movimiento Armónico Amortiguado Forzado.



1309 FUNDAMENTOS DE ESPECTROSCOPÍA

PROFESOR: ZURISADAI PADILLA GÓMEZ

M.A.A.F. I: Sistema masa – resorte

En un sistema forzado se aplica una fuerza externa al sistema, la cual es oscilatoria, y se modela como:

$$F_{ap} = F_0 \cos(\omega_F t)$$

En donde:

F_{ap} - Fuerza oscilatoria aplicada.

F_0 - Amplitud de la fuerza.

ω_F - Frecuencia (angular) de la fuerza aplicada

Ecuación de movimiento

Con esta fuerza oscilatoria impuesta al sistema, la ecuación de movimiento quedaría expresada como:

$$ma + bv + kx = F_{ap} = F_0\cos(\omega_F t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\omega_F t)$$

¿Cómo oscila el sistema?

Suponiendo que se parte del reposo, el sistema tiene dos momentos de oscilación a partir que inicia la aplicación de la fuerza.

1) **Estado transitorio** (Se observa durante los primeros instantes del forzamiento). En este punto el sistema oscila bajo la influencia de dos frecuencias (la natural y la de la fuerza). La oscilación es algo *caótica* y compleja de describir.

¿Cómo oscila el sistema?

2) **Estado estacionario** (Se observa después de transcurrido un tiempo). En este caso el sistema oscila a una sola frecuencia, que es la impuesta por la fuerza. De manera que se puede modelar la oscilación como:

$$x = A_F \cos(\omega_F t - \delta)$$

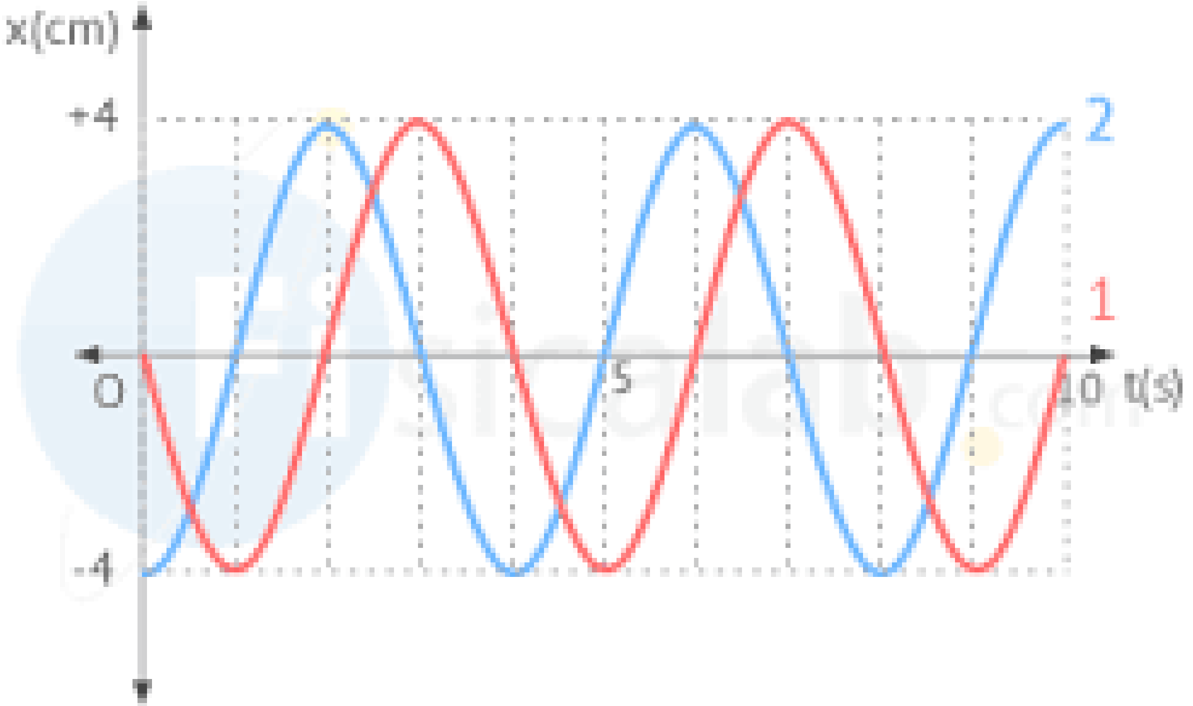
¿Cómo oscila el sistema?

$$x = A_F \cos(\omega_F t - \delta)$$

A_F - Amplitud de la oscilación (depende de F_{ap}).

ω_F - Frecuencia de la fuerza aplicada.

δ – Constante de fase entre la **posición** y la **fuerza**.



Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

Teniendo la función de la posición, se pueden expresar las correspondientes para velocidad y aceleración:

$$x = A_F \cos(\omega_F t - \delta)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_F A_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_F{}^2 A_F \cos(\omega_F t - \delta)$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de movimiento, se tiene:

$$-m{\omega_F}^2 A_F \cos(\omega_F t - \delta) - b\omega_F A_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta) + kA_F \cos(\omega_F t - \delta) = F_{ap}$$

$$-{\omega_F}^2 A_F \cos(\omega_F t - \delta) - \frac{b}{m}\omega_F A_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta) + \frac{k}{m} A_F \cos(\omega_F t - \delta) = \frac{F_{ap}}{m}$$

Sea: $\frac{b}{m} = \gamma$, factorizando la amplitud y sustituyendo la frecuencia natural.

$$A_F[-{\omega_F}^2 \cos(\omega_F t - \delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta) + {\omega_0}^2 \cos(\omega_F t - \delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2) \cos(\omega_F t - \delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\omega_F t - \delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t - \delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

Se sabe que:

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp sen(A)sen(B)$$
$$\mathrm{sen}(A \pm B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) \pm sen(B)cos(A)$$

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\{\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + \mathrm{sen}(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta)\} - \gamma\omega_F\{\mathrm{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) - cos(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta)\}] = \frac{F_{ap}}{m}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\{\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + \operatorname{sen}(\omega_F t)\operatorname{sen}(\delta)\} - \gamma\omega_F\{\operatorname{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) - cos(\omega_F t)\operatorname{sen}(\delta)\}] = \frac{F_{ap}}{m}$$

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + ({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\operatorname{sen}(\omega_F t)\operatorname{sen}(\delta) - \gamma\omega_F\operatorname{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) + \gamma\omega_F cos(\omega_F t)\operatorname{sen}(\delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F[(\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2)\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + (\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2)\mathrm{sen}(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) + \gamma\omega_F cos(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

$$A_F[(\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2)\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + \gamma\omega_F cos(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) + (\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2)\mathrm{sen}(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\omega_F t)\cos(\delta) + \gamma\omega_F cos(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F \mathrm{sen}(\omega_F t)\cos(\delta) + ({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\mathrm{sen}(\omega_F t)\,\mathrm{sen}(\delta)] = \frac{F_{ap}}{m}$$

$$A_F\,[\{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\delta) + \gamma\omega_F\,\mathrm{sen}(\delta)\}\cos(\omega_F t) + \{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F\cos(\delta)\}\mathrm{sen}(\omega_F t) = \frac{F_{ap}}{m}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F\,[\{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\delta) + \gamma\omega_F\,\mathrm{sen}(\delta)\}\cos(\omega_F t)$$
$$+\{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F\cos(\delta)\}\mathrm{sen}(\omega_F t) = \frac{F_0\cos(\omega_F t)}{m}$$

$$A_F\,[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\delta) + \gamma\omega_F\,\mathrm{sen}(\delta)] = \frac{F_0}{m} \quad \ldots \quad (1)$$

$$A_F\,[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F\cos(\delta)] = 0 \ldots \quad (2)$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F\,[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F \cos(\delta)] = 0 \ldots \quad (2)$$

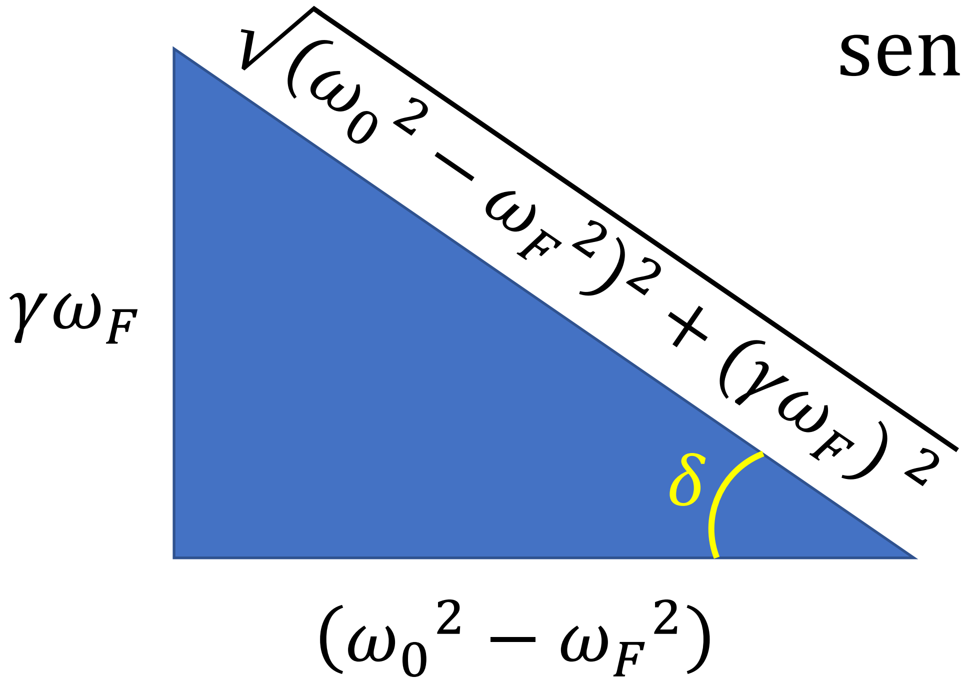
$$({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) - \gamma\omega_F \cos(\delta) = 0$$

$$({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\,\mathrm{sen}(\delta) = \gamma\omega_F \cos(\delta)$$

$$\frac{\mathrm{sen}(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{\gamma\omega_F}{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)} = \tan(\delta)$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$\frac{\operatorname{sen}(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{\gamma\omega_F}{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)} = \tan(\delta)$$



$$\operatorname{sen}(\delta) = \frac{\gamma\omega_F}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la constante de fase respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 1): $\omega_F \to 0$

$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2)^2}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\delta = 0}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la constante de fase respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 2): $\omega_F \to \infty$

$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

$$\cos(\delta) = \frac{(-{\omega_F}^2)}{\sqrt{(-{\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}} = \frac{(-{\omega_F}^2)}{\sqrt{{\omega_F}^4}} = -1 \quad \to \quad \boldsymbol{\delta = \pi}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la constante de fase respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 3): $\omega_F = \omega_0$

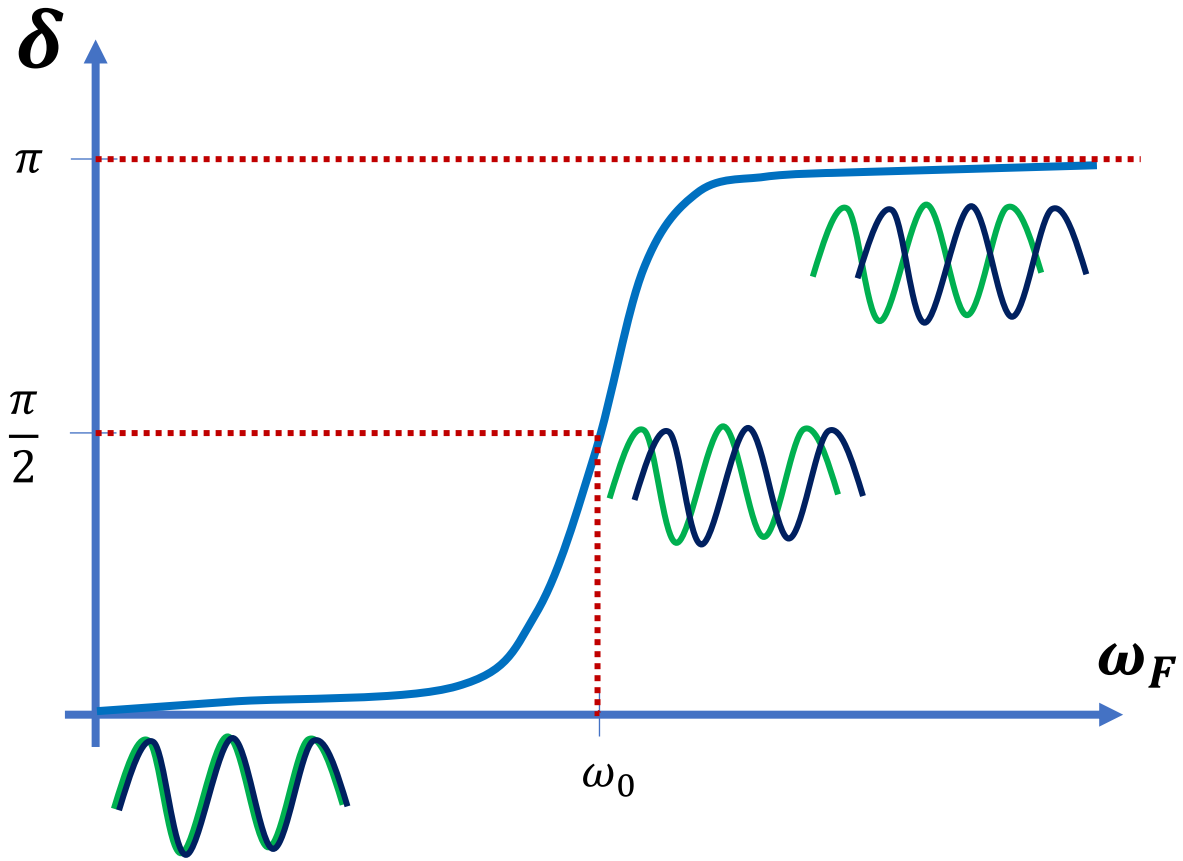
$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

$$\cos(\delta) = \frac{0}{\gamma\omega_F} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la constante de fase respecto a la frecuencia de la fuerza?

Función completa:



Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

Ahora bien, recordando la siguiente ecuación.

$$A_F\left[\left({\omega_0}^2-{\omega_F}^2\right)\cos(\delta)+\gamma\omega_F\,\mathrm{sen}(\delta)\right]=\frac{F_0}{m}\quad\ldots\quad(1)$$

$$A_F=\frac{F_0}{m\left[\left({\omega_0}^2-{\omega_F}^2\right)\cos(\delta)+\gamma\omega_F\,\mathrm{sen}(\delta)\right]}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F = \frac{F_0}{m[({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)\cos(\delta) + \gamma\omega_F \operatorname{sen}(\delta)]}$$

$$\operatorname{sen}(\delta) = \frac{\gamma\omega_F}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{2}}}$$

$$\cos(\delta) = \frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{2}}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F = \frac{F_0}{m\left[(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)\dfrac{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}}+\gamma\omega_F\dfrac{\gamma\omega_F}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}}\right]}$$

$$A_F = \frac{F_0}{m\left[\dfrac{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}}+\dfrac{(\gamma\omega_F)^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}}\right]}$$

$$A_F = \frac{F_0}{m\left[\dfrac{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega_F{}^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}}\right]}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F = \frac{F_0}{m\left[\frac{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}}\right]}$$

$$\boldsymbol{A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la amplitud respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 1): $\omega_F \to 0$

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}}$$

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2)^2}} = \frac{F_0}{m{\omega_0}^2} = \frac{\boldsymbol{F_0}}{\boldsymbol{k}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la amplitud respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 2): $\omega_F \to \infty$

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}}$$

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}} \to \mathbf{0}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la amplitud respecto a la frecuencia de la fuerza?

Caso 3): $\omega_F = \omega_0$

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\ 2}}}$$

$$\boldsymbol{A_F = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\,2}}}$$

$$\frac{dA_F}{d\omega_F} = \frac{F_0}{m}\frac{-4\omega_F\,({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2) + 2\gamma^2\omega_F}{2\left(\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\gamma\omega_F)^{\,2}}\right)^3} = 0$$

$$\rightarrow \quad -4\omega_F\,({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2) + 2\gamma^2\omega_F = 0$$

$$-4\omega_F{\omega_0}^2 + 4{\omega_F}^3 + 2\gamma^2\omega_F = 0$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

$$\omega_F(4{\omega_F}^2 - 4{\omega_0}^2 + 2\gamma^2) = 0$$
$$\rightarrow \qquad 4{\omega_F}^2 - 4{\omega_0}^2 + 2\gamma^2 = 0$$

$$4{\omega_F}^2 - 4{\omega_0}^2 + 2\gamma^2 = 0$$

$$4{\omega_F}^2 = 4{\omega_0}^2 - 2\gamma^2$$

$$\omega_F = \omega_{máx} = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}$$

Dependencia de la amplitud y desfase de la frecuencia de la fuerza aplicada

¿Cómo se comporta la amplitud respecto a la frecuencia de la fuerza?

Función completa:

Curva de resonancia.