Movimiento Armónico Amortiguado Forzado (M.A.A.F.)

1.- Características del M.A.A.F.

En este movimiento se aplica una <u>fuerza externa armónica</u> al sistema oscilante, la cual es descrita por la función:

$$F_{ap} = F_0\, cos(\omega_F t)$$

En donde:

F_0 es la amplitud de la fuerza.

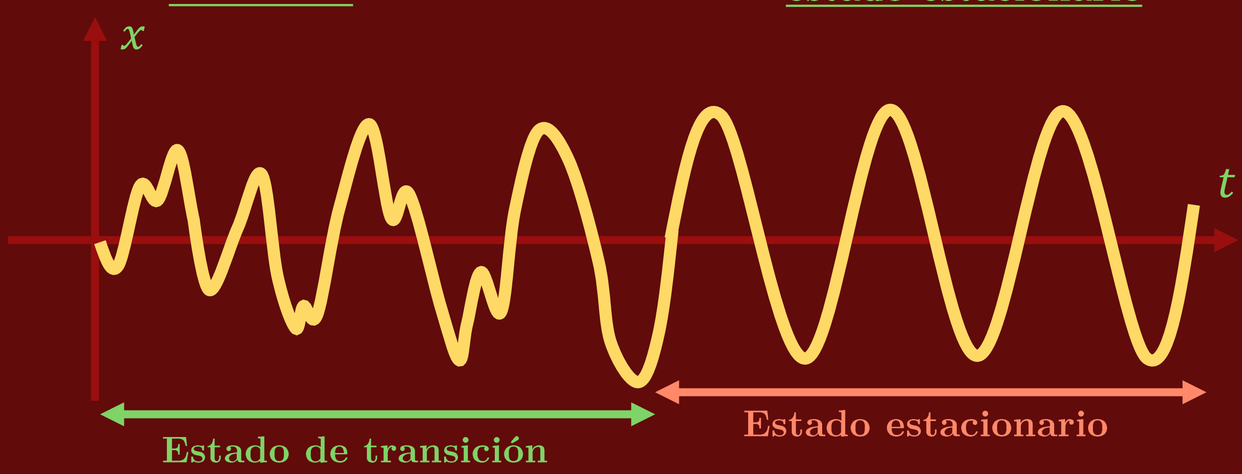
ω_F es la frecuencia angular de la fuerza.

Para este caso, la **<u>ecuación de movimiento</u>** de un **<u>sistema masa – resorte</u>** se expresa de la siguiente manera:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\, cos(\omega_F t)$$

Durante los primeros instantes en los que se aplica la fuerza, el sistema oscila de una forma *caótica*, difícil de describir. Se dice que está en <u>estado de transición</u>.

Sin embargo, a tiempos prolongados el sistema alcanza una oscilación armónica, como si fuera un movimiento armónico simple. Aquí ha llegado al <u>estado estacionario</u>.



En el estado estacionario se puede modelar la oscilación del sistema mediante una función de movimiento armónico simple. Pero en este caso, la frecuencia de oscilación es la impuesta por la fuerza aplicada (ω_F).

$$x = A_F\, \cos(\omega_F t + \delta)$$

En donde:

A_F es la amplitud de oscilación (que depende ω_F).

δ es la constante de fase entre la fuerza aplicada y la oscilación.

Movimiento Armónico Amortiguado Forzado (M.A.A.F.)

2.- Constante de fase.

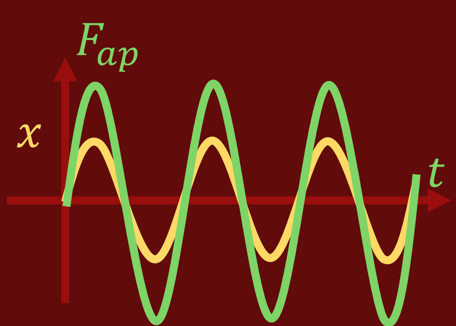
La constante de fase entre las oscilaciones de la fuerza aplicada y la posición (en un sistema masa – resorte) adquiere diferentes valores dependiendo el valor de la frecuencia de oscilación, $\boldsymbol{\omega_F}$.

El tratamiento de la ecuación de movimiento permite llegar a la siguiente relación entre la constante de fase y la frecuencia de la fuerza aplicada

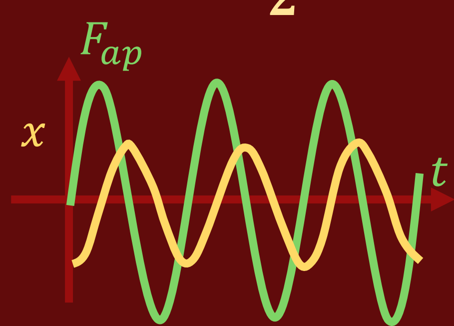
$$\cos(\delta) = \frac{{\omega_0}^2 - {\omega_F}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + \gamma^2 {\omega_F}^2}}$$

El análisis de la función anterior permite obtener los siguientes valores de la constante de fase de acuerdo con los valores que adquiere la frecuencia de la fuerza, $\boldsymbol{\omega_F}$, respecto a la frecuencia natural del sistema, $\boldsymbol{\omega_0}$.

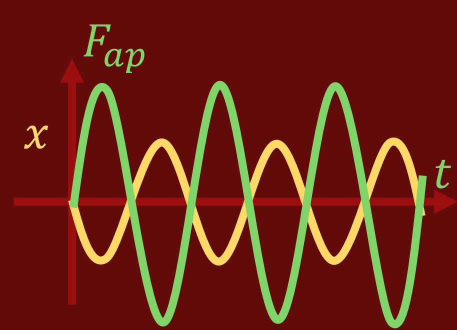
$$\omega_F \to 0 \qquad \delta \to 0$$



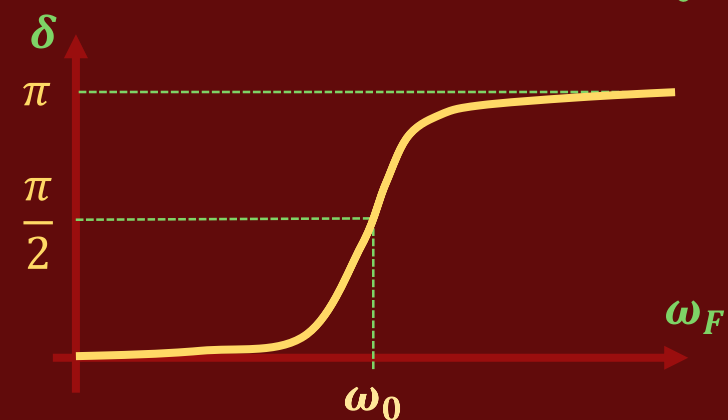
$$\omega_F = \omega_0 \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$$



$$\omega_F \to \infty \qquad \delta \to \pi$$



El análisis permite obtener un gráfico que presenta la variación de la constante de fase como función de la frecuencia de la fuerza aplicada.



Movimiento Armónico Amortiguado Forzado (M.A.A.F.)

3.- Amplitud y resonancia.

A diferencia de un movimiento armónico simple o amortiguado, en el movimiento forzado al amplitud de la oscilación depende de la fuerza aplicada, en específico de su frecuencia angular, ω_F.

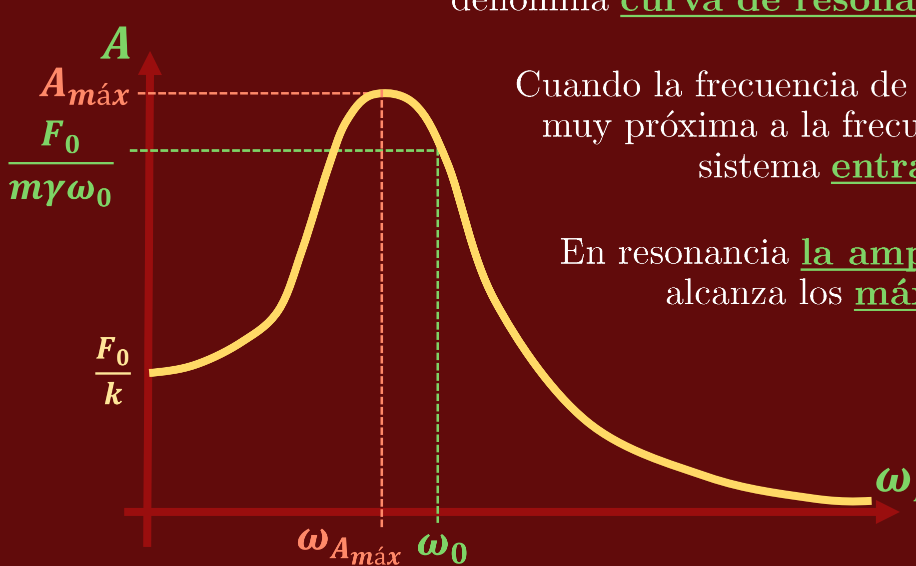
Del tratamiento de la ecuación de movimiento se obtiene una expresión general para la amplitud de oscilación como función de la frecuencia de la fuerza aplicada.

$$A_F = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + \gamma^2 {\omega_F}^2}}$$

La función anterior permite obtener la amplitud para puntos específicos, como son:

$\omega_F \to 0$	$\omega_F = \omega_{A_{máx}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2{\omega_0}^2}}$	$\omega_F = \omega_0$	$\omega_F \to \infty$
$A_F = \frac{F_0}{k}$	$A_{máx} = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4{\omega_0}^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$	$A_F = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$	$A_F \to 0$

El gráfico completo de la amplitud como función de la frecuencia de la fuerza se denomina curva de resonancia.



Cuando la frecuencia de la fuerza aplicada iguala o es muy próxima a la frecuencia natural se dice que el sistema entra en resonancia.

En resonancia la amplitud de la oscilación alcanza los máximos valores.

El sistema oscilante se puede dañar o *romper* si la amplitud en resonancia supera la amplitud límite del propio sistema