Generación de campo magnético por efecto de la corriente eléctrica

Introducción.

En la física referente al campo magnético, la permeabilidad magnética se puede definir como la capacidad que tiene el medio para permitir la existencia del campo magnético a través de él. En el caso de que el material sea el vacío o el aire, el cual se considera como un medio homogéneo e isotrópico, la permeabilidad magnética, la cual se refiere con el símbolo μ_0, tiene un valor de $4\pi x 10^{-7}$ Tm/A en unidades del sistema internacional.

Uno de los primero modelos que permite determinar el valor de la permeabilidad del aire mediante la medición experimental del campo magnético, en un punto en el espacio, que es generado por una intensidad de corriente eléctrica que fluye por un elemento resistivo, es la ley de Biot-Savart, la cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi|\vec{r}|^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

En donde $d\vec{B}$ representa el diferencial del campo magnético en un punto del espacio, $\vec{r}$, respecto a la posición del diferencial de longitud del elemento, $d\vec{l}$, por el que fluye la intensidad de corriente eléctrica, I.

Para resolver la ecuación proveniente de la ley de Biot-Savart es necesario conocer la geometría del elemento por que el que fluirá la intensidad de corriente eléctrica.

Alambre recto.

Consideremos un segmento de alambre recto de longitud L, situado en el eje coordenado x, por el que fluye una intensidad de corriente eléctrica, I, con un desplazamiento $dx\,\hat{\imath}$, figura 1. En esta configuración podemos cuantificar el vector campo magnético en un punto situado a una distancia D del alambre, sobre el bisector al alambre en el eje coordenado y.

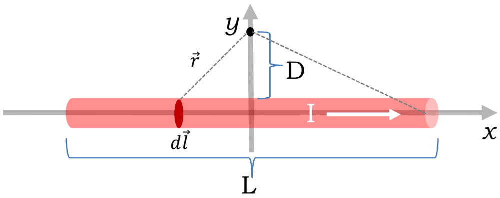


Figura 1. Alambre recto por el que fluye una intensidad de corriente eléctrica, I, generando un campo magnético en un punto distanciado una longitud D sobre el bisector.

Dada la geometría del problema planteado, la ecuación de Biot-Savart se puede escribir de la siguiente manera:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + D^2)^{3/2}} dx\hat{\imath} \times (-x\hat{\imath} + D\hat{\jmath})$$

Resolviendo el producto vectorial se encuentra:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + D^2)^{3/2}} D dx\hat{k}$$

Ahora es necesario plantear la integral definida para el diferencial, dx, desde –L/2 hasta L/2, y resolver mediante el método de sustitución trigonométrica:

$$\vec{B} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + D^2)^{3/2}} D dx \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I D}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx\hat{k}}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \left[\frac{x\,\hat{k}}{(x^2 + D^2)^{1/2}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} \right]$$

Evaluando la integral, se encuentra:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \left[\frac{\frac{L}{2}}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + D^2\right)^{1/2}} - \frac{\frac{-L}{2}}{\left(\left(\frac{-L}{2}\right)^2 + D^2\right)^{1/2}} \right] \hat{k}$$

Al reducir la expresión anterior, podemos establecer que la magnitud del campo magnético a una longitud D del centro del alambre sobre el bisector será:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I L}{2\pi D\sqrt{L^2 + 4D^2}}$$

Para la dirección del vector campo magnético, bastará aplicar la regla de la mano derecha para percatarse que el vector campo magnético apunta hacia afuera del plano en el que está esquematizado el ejercicio, es decir, apuntará en dirección del vector unitario $\hat{k}$.

En el caso particular de que las dimensiones del alambre, L, sean mucho más grandes que la distancia D en la que se está cuantificando el campo magnético, situación conocida como alambre infinito, en el denominador, el término $L^2 + 4D^2$ se puede aproximar a L^2, con lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$$

Espira.

Consideremos ahora que el alambre se configura de forma tal que se describe una espira circular de radio R y que ésta se sitúa en el plano *xy* de un sistema coordenado en donde el centro de la espira coincide con el origen del sistema de referencia, figura 2. En esta situación podemos cuantificar el vector campo magnético en un punto situado a una distancia D sobre el eje que atraviesa el centro de la espira y que se mantiene perpendicular al área de la misma, es decir, sobre el eje coordenado *z*.

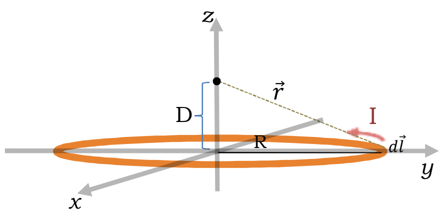


Figura 2. Espira circular por la que fluye una intensidad de corriente eléctrica, *I*, generando un campo magnético en un punto distanciado una longitud D sobre el eje perpendicular que cruza el centro de la espira.

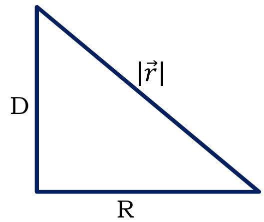
Dada la geometría del problema planteado y aprovechando que la magnitud del vector resultante del producto vectorial se puede expresar como el producto de las magnitudes de los vectores operados por el seno del ángulo que forman dichos vectores, la ecuación de Biot-Savart se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi|\vec{r}|^3}\left|d\vec{l}\right||\vec{r}|sen\alpha$$

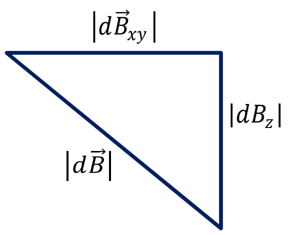
En donde el ángulo α, es el ángulo entre el vector diferencial $d\vec{l}$ y el vector $\vec{r}$, el cual siempre resulta en un ángulo recto, es decir, α = 90.0 grados, con lo cual tenemos:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi|\vec{r}|^2}\left|d\vec{l}\right|$$

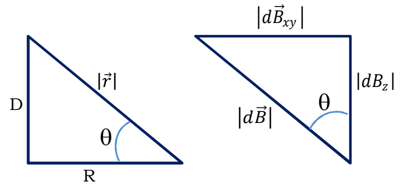
Ahora, para obtener las coordenadas del vector campo magnético a partir de su magnitud, la cual está expresada como una diferencial, recurrimos al procedimiento de similitud o semejanza de triángulos. Entre el radio de la espira, R, y la longitud, medida desde el centro de la espira, al punto D, se puede encontrar los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde con la distancia entre el elemento de corriente eléctrica, expresado como $d\vec{l}$, y el punto de análisis; de forma que se tiene:



De manera análoga, podemos establecer la existencia de un triángulo rectángulo para el vector campo magnético, en donde la hipotenusa será la magnitud del diferencial del campo magnético, $\left|d\vec{B}\right|$, con uno de los catetos en la vertical, componente del vector en el eje coordenado *z*, mientras que el otro cateto será la componente horizontal, situada en el plano coordenado *xy*, siguiendo el sistema de referencia inicial.



Estos dos triángulos rectángulos guardan una relación íntima en sus ángulos internos, de forma que mediante semejanza de triángulos podemos plantear:



$$\cos\theta = \frac{R}{|\vec{r}|} = \frac{|dB_z|}{|d\vec{B}|}$$

El caso particular de la componente horizontal del vector campo magnético, esta no se analiza porque dada la distribución de los vectores diferenciales de campo magnético, los cuales forman un cono en torno al eje coordenado *z*, se cancelarán; es decir, el vector campo magnético se mantendrá perpendicular al plano en el que se encuentre la espira. Siempre y cuando se mida el vector campo magnético en punto situado sobre el eje que atraviesa el centro de la espira y que se mantiene perpendicular al área de la misma.

Empleando la relación de triángulos, entonces podemos establecer que la magnitud del vector magnético en el eje coordenado *z* será:

$$\frac{R}{|\vec{r}|}|d\vec{B}| = |dB_z|$$

Sustituyendo la expresión encontrada en el análisis del diferencial del campo magnético, tenemos:

$$|dB_z| = \frac{R}{|\vec{r}|}|d\vec{B}| = \frac{R}{|\vec{r}|}\frac{\mu_0 I}{4\pi|\vec{r}|^2}|d\vec{l}| = \frac{\mu_0 IR}{4\pi|\vec{r}|^3}|d\vec{l}|$$

La ecuación anterior puede ser integrada de forma directa ya que la intensidad de corriente eléctrica, *I*, el radio de la espira, *R*, y la distancia de separación entre el elemento de corriente eléctrica y el punto de análisis, $|\vec{r}|$, son constantes, con lo que se obtiene:

$$|B_z| = \frac{\mu_0 IR}{4\pi|\vec{r}|^3}|\vec{l}|$$

En donde $|\vec{l}|$ corresponde con la longitud de la circunferencia de la espira por la que fluye la intensidad de corriente eléctrica, la cual corresponde con 2πR, de forma que:

$$|B_z| = \frac{\mu_0 IR}{4\pi|\vec{r}|^3}(2\pi R) = \frac{\mu_0 IR^2}{2|\vec{r}|^3}$$

La distancia de separación entre el elemento de corriente eléctrica y el punto de análisis, $|\vec{r}|$, puede expresarse en términos de la distancia entre el centro de la espira y el punto de análisis, D, y el radio de la espira, R,:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 IR^2}{2[D^2 + R^2]^{3/2}}$$

Para la dirección del vector campo magnético, bastará aplicar la regla de la mano derecha para percatarse que el vector campo magnético apunta en la dirección del vector unitario $\hat{k}$.

En el caso particular de que se cuantifique el campo magnético en el centro de la espira, entonces el valor de la distancia sería cero metros, D = 0 m, con lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Solenoide.

Finalmente consideremos que el alambre se configura de forma tal que se describe un solenoide con radio R y longitud L, figura 3, en donde nos interesa cuantificar el vector campo magnético en un punto, situado sobre el eje principal del solenoide, a una distancia D de su centro.

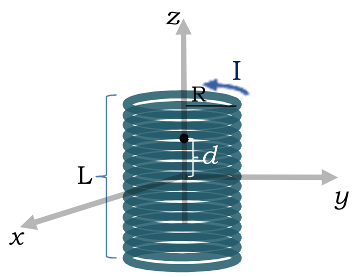


Figura 3. Solenoide por el que fluye una intensidad de corriente eléctrica, *I*, generando un campo magnético en un punto situado, sobre su eje principal, a una distancia D de su centro. El origen del sistema de referencia coincide con el centro del solenoide.

Previo a la resolución mediante la ley de Biot-Savart, es necesario tomar en cuenta el número de vueltas, N, que se tienen por unidad de longitud, L, lo cual se denomina densidad lineal de devanado, n = N/L, ya que esta definirá la intensidad de corriente eléctrica que producirá el campo magnético.

Para facilitar la solución mediante la ecuación de Biot-Savart, partamos de la información encontrada para el caso de la espira, en donde el campo magnético puede obtenerse mediante la expresión:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I R^2}{2[D^2 + R^2]^{3/2}}$$

Considerando que la intensidad de corriente eléctrica neta será el factor diferencial:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 dI_N R^2}{2[D^2 + R^2]^{3/2}}$$

En la ecuación anterior, el valor D ya no es constante pues la distancia de cada devanado (que asumimos como una espira) al punto de análisis es variable, por lo que deberemos realizar un cambio en el diferencial de corriente eléctrica, dI, para expresarlo en términos de la posición del devanado.

Pensemos que la intensidad de corriente eléctrica neta, I_N, que fluye por el solenoide es igual al producto del número de vueltas, N, por la intensidad de corriente que fluye por cada espira, es decir:

$$I_N = N\, I$$

O bien,

$$I_N = n\, L\, I$$

Como L representa la longitud en el eje coordenado *z*, podemos escribir que:

$$I_N = n\, z\, I$$

De donde podemos obtener que el diferencial de corriente eléctrica neta es proporcional al diferencial de longitud del solenoide, o bien, el diferencial de la coordenada *z*, de forma que:

$$dI_N = n\, I\, dz$$

Retomando la expresión del diferencial del campo magnético en función del diferencial de corriente eléctrica neta y sustituyendo la expresión que hemos encontrado, tenemos:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, n\, I\, dz\, R^2}{2[D^2 + R^2]^{3/2}}$$

Haciendo el cambio de que el término D representa la posición en el eje coordenado *z*:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, n\, I\, dz\, R^2}{2[z^2 + R^2]^{3/2}}$$

Ahora es necesario plantear la integral definida para el diferencial, *dz*. Como el punto de análisis puede no estar necesariamente en el centro del solenoide pero si dentro del mismo, consideraremos que los límites de la integral serán desde –L/2 – *d* hasta L/2 – *d*, siendo *d* la posición del punto de análisis respecto al centro del solenoide. Finalmente resta resolver la integral mediante el método de sustitución trigonométrica:

$$\left|\vec{B}\right| = \int_{-\frac{L}{2}-d}^{\frac{L}{2}-d} \frac{\mu_0\, n\, I\, dz\, R^2}{2[z^2 + R^2]^{3/2}}\, dz$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, n\, I\, R^2}{2} \int_{-\frac{L}{2}-d}^{\frac{L}{2}-d} \frac{dz}{[z^2 + R^2]^{3/2}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, n\, I\, R^2}{2} \left[\left. \frac{z}{R^2[z^2 + R^2]^{1/2}} \right|_{-\frac{L}{2}-d}^{\frac{L}{2}-d} \right]$$

Evaluando la integral, se encuentra:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, n\, I}{2} \left[\frac{\frac{L}{2} - d}{\left(\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + R^2\right)^{1/2}} - \frac{-\frac{L}{2} - d}{\left(\left(-\frac{L}{2} - d\right)^2 + R^2\right)^{1/2}} \right]$$

Al reducir la expresión anterior, podemos establecer que la magnitud del campo magnético en un punto situado al interior del solenoide a una longitud d de su centro será:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 n I}{2}\left[\frac{L-2d}{\sqrt{(L-2d)^2+(2R)^2}}+\frac{L+2d}{\sqrt{(L+2d)^2+(2R)^2}}\right]$$

Para la dirección del vector campo magnético, bastará aplicar la regla de la mano derecha para percatarse que el vector campo magnético apunta en la dirección del vector unitario $\hat{k}$.

En el caso de que se cuantifique en el centro del solenoide; es decir, cuando d = 0 m, la ecuación anterior se reduce a:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{L^2+4R^2}}$$

Finalmente, si se considera un solenoide ideal, es decir, que la longitud del solenoide es mucho mayor que el radio del devanado, entonces, $L^2+4R^2 \sim L^2$, la ecuación quedaría:

$$|\vec{B}| = \mu_0 n I$$

Resultados del procedimiento experimental.

Etapa 1. Campo magnético generado por un alambre recto.

Cortar un segmento de alambre magneto y estirarlo para que se encuentre completamente recto. Este segmento será considerado el resistor.

Conectar el alambre (resistor), la fuente de alimentación de corriente directa y un multimedidor, en modo de corriente eléctrica directa, tal y como se muestra en la figura 4.

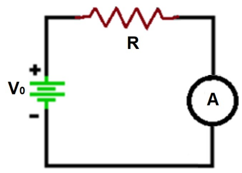


Figura 4. Diagrama de conexión de la fuente de alimentación y el multimedidor para medir la corriente eléctrica a través del segmento de alambre magneto (resistor).

Colocar el sensor de campo magnético en el bisector del alambre magneto, de forma que la distancia de separación sea pequeña en comparación con la longitud del alambre.

Encender el multimedidor, la fuente de alimentación de corriente directa y aplicar una intensidad de corriente eléctrica. Colectar el valor de la intensidad de corriente eléctrica que marca el multimedidor así como el campo magnético que marca el sensor de campo magnético.

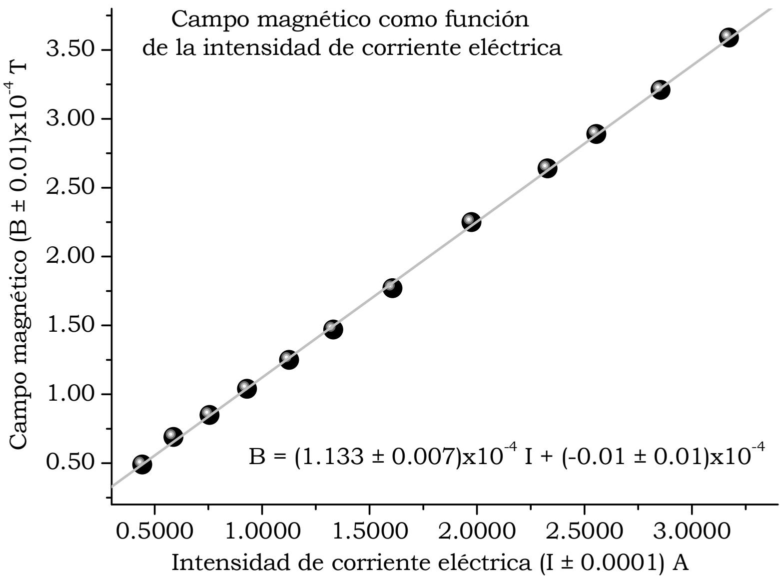
Repetir el paso anterior suministrando diferentes valores de intensidad de corriente eléctrica.

Resultados esperados en la etapa 1.

Al medir el campo magnético a una distancia mucho menor que la longitud del alambre se pueden obtener los siguientes valores experimentales:

Intensidad de corriente eléctrica, $(I \pm 0.0001)$ A	Campo magnético $(\lvert\vec{B}\rvert \pm 0.01)x10^{-4}$ T	Intensidad de corriente eléctrica, $(I \pm 0.0001)$ A	Campo magnético $(\lvert\vec{B}\rvert \pm 0.01)x10^{-4}$ T
3.1727	3.59	1.3315	1.47
2.8541	3.21	1.1259	1.25
2.5556	2.89	0.9303	1.04
2.3285	2.64	0.7558	0.85
1.9743	2.25	0.5878	0.69
1.6067	1.77	0.4426	0.49

Al graficar podemos observar una tendencia lineal entre las medidas experimentales:



Etapa 2. Campo magnético generado por una espira.

Cortar un segmento de alambre magneto y formar una espira de radio constante. Esta espira circular será considerada el resistor. Es importante medir el diámetro de la espira.

Conectar la espira (resistor), la fuente de alimentación de corriente directa y un multimedidor, en modo de corriente eléctrica directa, tal y como se muestra en la figura 5.

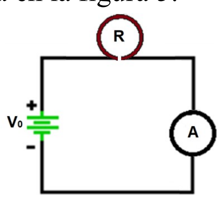


Figura 5. Diagrama de conexión de la fuente de alimentación y el multimedidor para medir la corriente eléctrica a través de la espira (resistor).

Colocar el sensor de campo magnético en el centro de la espira.

Encender el multimedidor, la fuente de alimentación de corriente directa y aplicar una intensidad de corriente eléctrica. Colectar el valor de la intensidad de corriente eléctrica que marca el multimedidor así como el campo magnético que marca el sensor de campo magnético.

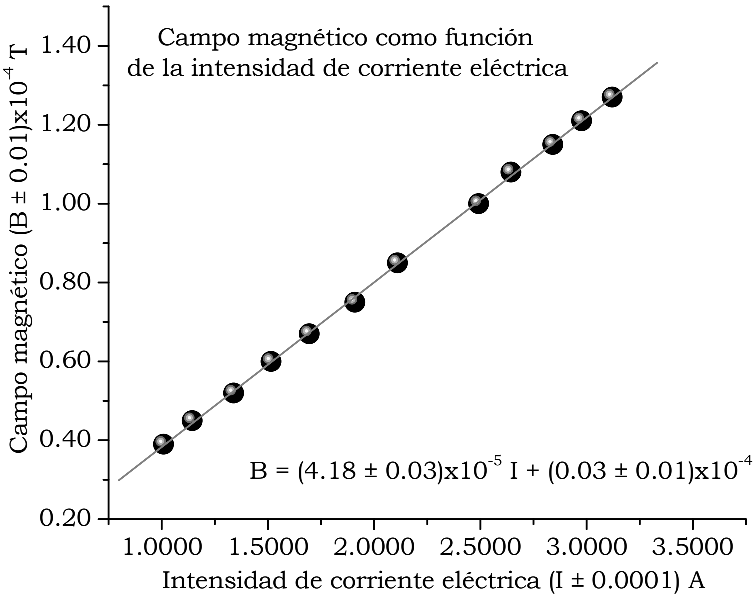
Repetir el paso anterior suministrando diferentes valores de intensidad de corriente eléctrica.

Resultados esperados en la etapa 2.

Al medir el campo magnético en el centro de la espira, diámetro de (24.56 ± 0.01) mm, se pueden obtener los siguientes valores experimentales:

Intensidad de corriente eléctrica, (I ± 0.0001) A	Campo magnético $(\lvert\vec{B}\rvert \pm 0.01)x10^{-4}$ T	Intensidad de corriente eléctrica, (I ± 0.0001) A	Campo magnético $(B \pm 0.01)x10^{-4}$ T
3.1204	1.27	1.9095	0.75
2.9765	1.21	1.6948	0.67
2.8414	1.15	1.5147	0.60
2.6441	1.08	1.3384	0.52
2.4917	1.00	1.1440	0.45
2.1097	0.85	1.0091	0.39

Al graficar podemos observar una tendencia lineal entre las medidas experimentales:



Etapa 3. Campo magnético generado por un solenoide.

Cortar un segmento de alambre magneto y formar un solenoide de radio constante. Este solenoide será considerado el resistor. Es importante contar el número de vueltas que conforman el solenoide así como medir sus dimensiones (diámetro y longitud).

Conectar el solenoide (resistor), la fuente de alimentación de corriente directa y un multimedidor, en modo de corriente eléctrica directa, tal y como se muestra en la figura 6.

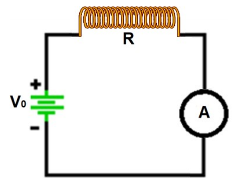


Figura 6. Diagrama de conexión de la fuente de alimentación y el multimedidor para medir la corriente eléctrica a través del solenoide (resistor).

Colocar el sensor de campo magnético en el centro del solenoide.

Encender el multimedidor, la fuente de alimentación de corriente directa y aplicar una intensidad de corriente eléctrica. Colectar el valor de la intensidad de corriente eléctrica que marca el multimedidor así como el campo magnético que marca el sensor de campo magnético.

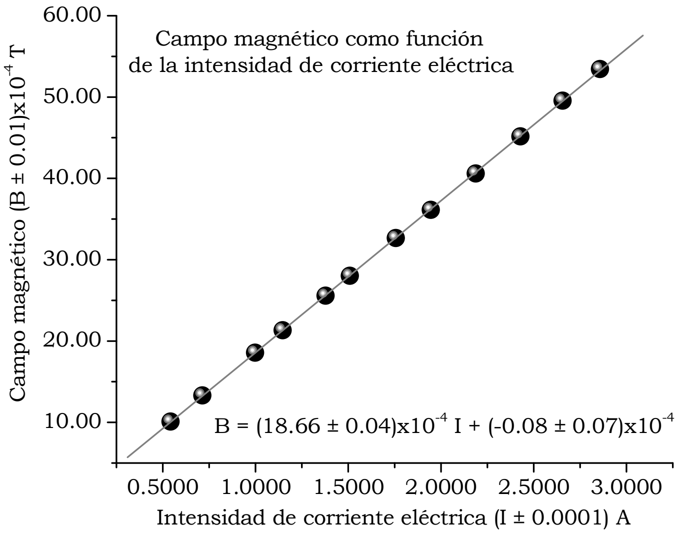
Repetir el paso anterior suministrando diferentes valores de intensidad de corriente eléctrica.

Resultados esperados en la etapa 3.

Al medir el campo magnético en el interior del solenoide: sesenta vueltas, longitud de (40.63 ± 0.01) mm y diámetro interno de (7.55 ± 0.01) mm, se pueden obtener los siguientes valores experimentales:

Intensidad de corriente eléctrica, (I ± 0.0001) A	Campo magnético $(B \pm 0.01)x10^{-4}$ T	Intensidad de corriente eléctrica, (I ± 0.0001) A	Campo magnético $(B \pm 0.01)x10^{-4}$ T
2.8574	53.44	1.5048	28.02
2.6555	49.56	1.3778	25.57
2.4286	45.16	1.1462	21.33
2.1873	40.60	0.9977	18.57
1.9449	36.13	0.7135	13.31
1.7568	32.66	0.5416	10.10

Al graficar podemos observar una tendencia lineal entre las medidas experimentales:



Cuestionario.

- En el caso de un alambre recto, ¿cómo se modificaría el valor experimental de la magnitud de campo magnético si el sensor no se sitúa en el bisector?
- En el caso de la espira, si ésta está en el plano horizontal ¿la dirección del vector campo magnético sería la misma si se mide por arriba o por debajo de la espira? ¿Por qué?
- En el caso de un solenoide ideal, sí el sensor no se encuentra en el eje principal pero si dentro del solenoide, ¿se modificaría el valor experimental del campo magnético?

Bibliografía.

- Resnick, R.; Halliday, D.; Krane, K. S. *Física*. Grupo Editorial Patria, México, 2008.
- Gil, S.; *Experimentos de Física, usando las TIC y elementos de bajo costo*. Alfaomega. México, 2014.