Guía de Estudio para el Examen Extraordinario
Álgebra Superior (Clave 1110)

Dr Julien M. J. Lombard Fis. Rodrigo A. González Vázquez

La presente guía es un material de apoyo para los estudiantes de la Facultad de Química que presentan el Examen Extraordinario de Álgebra Superior (clave 1110). Esta guía en ningún momento sustituye el contenido del curso de Álgebra Superior ni el contenido de ninguno de los textos mencionados en la bibliografía. Los problemas aquí presentados pueden o no estar incluidos en el Examen Extraordinario.

1 LÓGICA Y CONJUNTOS

Problema 1.1: Tablas de verdad

Dar la tabla de verdad de los operadores lógicos conjunción, disyunción, implicación y equivalencia.

Solución:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabla 1: Tabla de verdad de los operadores lógicos conjunción, disyunción, implicación y equivalencia

Problema 1.2: Aplicación de las tablas de verdad

Realice las tablas de verdad de las siguientes proposiciones y mencione si se trata de una tautología, una contradicción (un absurdo) o una contingencia:

- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow [(\neg R \vee Q) \Rightarrow \neg(P \Leftrightarrow R)]$
- $\neg(S \Rightarrow P) \vee [((R \wedge \neg Q) \wedge P) \Rightarrow \neg S]$

Solución:
Para la primera proposición, se obtiene la tabla de verdad:

P	Q	R	$\neg R$	$P \wedge Q$	$P \Leftrightarrow R$	$\neg(P \Leftrightarrow R)$	$\neg R \vee Q$	$(\neg R \vee Q) \Rightarrow \neg(P \Leftrightarrow R)$
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0

La proposición es una contingencia: su valor de verdad depende del valor de verdad de las proposiciones P, Q y R que la conforman.

Para la segunda proposición, notaremos las proposiciones

$$S \Rightarrow P \equiv A$$
$$(R \wedge \neg Q) \wedge P \equiv B$$

Se obtiene la tabla de verdad:

P	Q	R	S	$\neg Q$	$R \wedge \neg Q$	B	A	$\neg A$	$\neg S$	$B \Rightarrow \neg S$	$\neg A \vee [B \Rightarrow \neg S]$
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1

Problema 1.3: Valores de verdad dados

Dado que P es una proposición verdadera, proporcione las combinaciones de los valores de verdad de Q, R, S tal que la proposición completa sea verdadera:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow [\neg P \Rightarrow \neg(S \vee \neg R)]$$

Solución:
Sabiendo que P es verdadera, un primer caso que nos dará la proposición $A \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow [\neg P \Rightarrow \neg(S \vee \neg R)]$ verdadera es si Q es falsa, ya que una implicación $(P \wedge Q) \Rightarrow ...$ siempre es verdadera cuando el $P \wedge Q$ es falso.
Si Q es verdadera al igual que P, la implicación $(P \wedge Q) \Rightarrow ...$ es verdadera únicamente si el término a la derecha es verdadero. Sabiendo que $\neg P$ es falso, la implicación $\neg P \Rightarrow \neg(S \vee \neg R)$ siempre es verdadera.
En conclusión, la proposición $(P \wedge Q) \Rightarrow [\neg P \Rightarrow \neg(S \vee \neg R)]$ siempre es verdadera cuando P es verdadera. Comprobamos con la tabla de verdad de la proposición reducida al caso P verdadera:

P	Q	R	S	$\neg R$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$S \vee \neg R$	$\neg(S \vee \neg R)$	$\neg P \Rightarrow \neg(S \vee \neg R)$	A
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Problema 1.4: La implicación: ejemplo

(a) Dar la tabla de verdad de la Implicación.
(b) Consideramos la propiedad de los reales:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a > b \wedge c > d) \Rightarrow (a + c > b + d)$$

Para cada renglón de la tabla de verdad, encontrar un juego de valores de a, b, c, d que lo ilustra.

Solución:
Corrección: (a) Dar la tabla de verdad de la Implicación.

Renglón	P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	0
4	1	1	1

Tabla 2: Tabla de verdad de la implicación

(b) Consideramos la propiedad de los reales:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a > b \land c > d) \Rightarrow (a + c > b + d)$$

Para cada renglón de la tabla de verdad, encontramos un juego de valores de a, b, c, d que lo ilustra:

- Renglón 1: $(1 > 2 \land 3 > 4)$ es falso y $(1 + 3 > 2 + 4)$ es falso.
- Renglón 2: $(50 > 0 \land 1 > 2)$ es falso y $(50 + 1 > 0 + 2)$ es verdadero.
- Renglón 4: $(4 > 2 \land 1 > 0)$ es verdadero y $(4 + 1 > 2 + 0)$ es verdadero también.

Problema 1.5: La equivalencia: ejemplo

Sean dos reales $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Es válida la equivalencia $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$?. Justifica tu respuesta.

Solución:
No es válida la implicación. Tomamos un contra-ejemplo: $a = -3$ y $b = 3$
Tenemos $a^2 = b^2 \land a \neq b$, lo cual es la negación de la implicación considerada. Si quieres verlo en término de tabla de verdad, tenemos .ªlgo verdadero implicando algo falso", lo cual inválida la implicación.

Problema 1.6: Leyes válidas de equivalencia

Dar la expresión lógica de las leyes:

- Doble negación
- Distribución de la conjunción sobre la disyunción
- Equivalencia de la implicación
- Negación de la Implicación
- Conmutación de la disyunción
- Asociatividad de la conjunción
- Ley distributiva de la disyunción respecto a la conjunción
- Ley de Morgan para la disyunción
- Ley de Morgan para la conjunción
- Ley de la contrapuesta

Solución:

Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$
Distribución de la conjunción sobre la disyunción	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Equivalencia de la implicación	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Negación de la Implicación	$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$
Conmutación de la disyunción	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad de la conjunción	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Ley distributiva de la disyunción respecto a la conjunción	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Ley de Morgan para la disyunción	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Ley de Morgan para la conjunción	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Ley de la contrapuesta	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$

Problema 1.7: Leyes válidas de inferencia

Dar la expresión lógica de las leyes:

- Modus Ponens
- Modus Tollendo Ponens
- Modus Tollendo Tollens
- Silogismo
- Ley de adición
- Simplificación de la conjunción

Solución:

Modus Ponens	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
Modus Tollendo Ponens	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$
Modus Tollendo Tollens	$[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$
Silogismo	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
Ley de adición	$\forall Q, P \Rightarrow (P \vee Q)$
Simplificación de la conjunción	$[P \wedge Q] \Rightarrow P$ (también $[P \wedge Q] \Rightarrow Q$)

Problema 1.8: Tautología y absurdo

Notaremos $\mathcal{T}$ una tautología y $\emptyset$ un absurdo. Simplificar las expresiones:

- $P \wedge \mathcal{T}$
- $P \wedge \emptyset$
- $P \wedge \neg P$
- $P \wedge P$
- $P \vee \mathcal{T}$
- $P \vee \emptyset$
- $P \vee \neg P$

- $P \vee P$
- $P \Rightarrow \mathcal{T}$
- $P \Rightarrow \emptyset$
- $P \Rightarrow \neg P$
- $P \Rightarrow P$

Solución:
A continuación mostramos con una tabla de verdad que: Notaremos $\mathcal{T}$ una tautología y $\emptyset$ un absurdo. Simplificar las expresiones:

- $P \wedge \mathcal{T} \equiv P$
- $P \wedge \emptyset \equiv \emptyset$
- $P \wedge \neg P \equiv \emptyset$
- $P \wedge P \equiv P$
- $P \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$
- $P \vee \emptyset \equiv P$
- $P \vee \neg P \equiv \mathcal{T}$
- $P \vee P \equiv P$
- $P \Rightarrow \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$
- $P \Rightarrow \emptyset \equiv \neg P$
- $P \Rightarrow \neg P \equiv \neg P$
- $P \Rightarrow P \equiv \mathcal{T}$

P	$\neg P$	$\mathcal{T}$	$\emptyset$	$P \wedge \mathcal{T}$	$P \wedge \emptyset$	$P \wedge \neg P$	$P \wedge P$
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0

P	$\neg P$	$\mathcal{T}$	$\emptyset$	$P \vee \mathcal{T}$	$P \vee \emptyset$	$P \vee \neg P$	$P \vee P$
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0

P	$\neg P$	$\mathcal{T}$	$\emptyset$	$P \Rightarrow \mathcal{T}$	$P \Rightarrow \emptyset$	$P \Rightarrow \neg P$	$P \Rightarrow P$
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

Problema 1.9: Función proposicional

Pidiendo a ChatGPT la definición de un año bisiesto, se obtiene: ”Para determinar si un año es bisiesto, sigue estas reglas:

- Si el año es divisible entre 4, es bisiesto.
- Excepto si el año es divisible entre 100, entonces no es bisiesto.

- A menos que el año sea divisible entre 400, en cuyo caso sí es bisiesto."

Consideramos las funciones proposicionales:

- $P(x, y)$ de enunciado x *es múltiplo de* y.
- $Q(n)$ de enunciado *El año* n *es bisiesto*.

Escribir una proposición molecular que traduzca la definición arriba.

Solución:
Sea n el año considerado. Podemos escribir las varias propiedades dados en el enunciado con las funciones proposicionales $P(x, y)$ y $Q(x)$:

- El año n es bisiesto: $Q(n)$
- El año es divisible entre 4: $P(n, 4)$.
- El año es divisible entre 100: $P(n, 100)$.
- El año es divisible entre 400: $P(n, 400)$.

Obtenemos entonces:

$$Q(n) \Leftrightarrow [P(n, 4) \wedge (\neg P(n, 100) \vee P(n, 400))]$$

Problema 1.10: Reglas válidas de inferencia y equivalencia: aplicación 1

Simplificar las expresiones e indicar las reglas empleadas:

- $\neg\neg(P \wedge Q) \equiv$
- $\neg [(P \wedge Q) \vee R] \equiv$
- $\neg [(P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee Q)] \equiv$
- $[(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)] \Rightarrow$
- $[(D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D)] \Rightarrow$
- $[\neg A \wedge (\neg C \rightarrow A)] \Rightarrow$
- $[(A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (B \Rightarrow \neg A)] \equiv$

Solución:

- $\neg\neg(P \wedge Q) \equiv (P \wedge Q)$: Doble-negación
- $\neg [(P \wedge Q) \vee R] \equiv \neg(P \wedge Q) \wedge \neg R \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R$: Ley de Morgan para la disyunción
- $\neg [(P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee Q)] \equiv (P \wedge Q) \wedge \neg(R \vee Q) \equiv P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg R \wedge \emptyset \equiv \emptyset$: Negación de la implicación y ley de Morgan
- $[(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)] \equiv [\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)] \Rightarrow C$
- $[(D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D)] \Rightarrow (D \Rightarrow D)$: Silogismo (nota que lo último es equivalente a $\mathcal{T}$)
- $[\neg A \wedge (\neg C \Rightarrow A)] \Rightarrow C$: Modus Tollendo Tollens
- $[(A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (B \Rightarrow \neg A)] \equiv [(A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A)] \equiv A$: Equivalencia de la Implicación y reglas de distribución

Problema 1.11: Reglas válidas de inferencia y equivalencia: aplicación 2

Encontrar la proposición X para que la proposición sea una tautología. X puede ser atómica o molecular y es diferente en cada inciso.

- a) $[(\neg P \vee Q) \wedge ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow S)] \Rightarrow X$
- b) $[(A \wedge B) \wedge (X \Rightarrow (\neg A \vee \neg B))] \Rightarrow D$
- c) $[(D \Rightarrow X) \wedge (\neg D \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge S))$

Solución:

Primera proposición: Notamos $A \equiv (\neg P \vee Q) \equiv (P \Rightarrow Q)$. Tenemos entonces $[A \wedge (A \Rightarrow S)] \Rightarrow X$. Se reconoce un Modus Ponens, así que $X \equiv S$.

Segunda proposición: Notamos $C \equiv \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$. Tenemos entonces $[\neg C \wedge (X \Rightarrow C)] \Rightarrow D$. Se reconoce un Modus Tollendo Tollens, así que $X \equiv \neg D$.

Tercera proposición: Notamos que $D \rightarrow X \equiv \neg X \rightarrow \neg D$ por contrapuesta. Tenemos entonces $[(\neg X \Rightarrow \neg D) \wedge (\neg D \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge S))$. Reconocemos un silogismo, lo cual nos da $\neg X \Rightarrow \neg B \equiv B \Rightarrow (A \wedge S) \equiv \neg(A \wedge S) \Rightarrow \neg B$ por contrapuesta. En conclusión se obtiene $X \equiv A \wedge S$.

Problema 1.12: Cuantificadores en los reales $\mathbb{R}$

Dar el valor de verdad de la proposición:

- a) $\forall r, t, \in \mathbb{R}, r + t = 3$
- b) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R}, a + b = 3$
- c $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$
- d) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a \leq b$
- e) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R}, a \leq b$

Solución:

a) $\forall r, t \in \mathbb{R}, r + t = 3$
Esta proposición es **falsa**. En general, la suma de dos números reales no siempre es igual a 3. Por ejemplo, si $r = 1$ y $t = 1$, entonces $r + t = 2$, no 3. Esto no satisface la proposición para todos los valores de r y t.

b) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R}, a + b = 3$
Esta proposición es **falsa**. No existe un valor específico de a tal que para todos los valores de b se cumpla que $a + b = 3$. Si existiera tal a, tendríamos que $b = 3 - a$ para cada valor de b, lo cual es contradictorio porque b tomaría múltiples valores según a, y no podría ser igual a todos los números reales a la vez.

c) $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$
Esta proposición es **verdadera**. Siempre existe al menos un par de números reales a y b tal que $a \leq b$. Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$, se cumple $a \leq b$.

d) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a \leq b$
Esta proposición es **verdadera**. Para cualquier número real a, siempre podemos encontrar un número real b tal que $a \leq b$. Por ejemplo, basta tomar $b = a$ o cualquier valor mayor que a.

e) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R}, a \leq b$
Esta proposición es **falsa**. No existe un número real a que sea menor o igual a todos los números reales b. Si a fuera menor o igual que todos los valores de b, tendría que ser menor que o igual a sí mismo,

lo cual no puede ser cierto para todos los b porque no hay un número mínimo absoluto en los números reales.

Problema 1.13: Demostración por inferencia

Realizar las demostraciones por inferencia:

$$C \wedge P, P \Rightarrow (E \vee L), E \Rightarrow \neg C \quad \therefore \quad L$$
$$(P \wedge Q) \Rightarrow R, \neg(Q \Rightarrow R), S \vee P, S \Rightarrow T \quad \therefore \quad T$$
$$X \wedge Z, \neg X \vee Y \quad \therefore \quad Y \vee \neg Z$$

Solución:

Proposiciones base	Ley utilizada	Nueva proposición
$C \wedge P$	Simplificación de la conjunción	C
$C \wedge P$	Simplificación de la conjunción	P
$P \wedge (P \Rightarrow (E \vee L))$	Modus Ponens	$E \vee L$
$C \wedge (E \Rightarrow \neg C)$	Modus Tollendo Tollens	$\neg E$
$\neg E \wedge (E \vee L)$	Modus Tollendo Ponens	L

Proposiciones base	Ley utilizada	Nueva proposición
$\neg(Q \Rightarrow R)$	Negación de la implicación	$Q \wedge \neg R$
$Q \wedge \neg R$	Simplificación de la conjunción	Q
$Q \wedge \neg R$	Simplificación de la conjunción	$\neg R$
$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge \neg R$	Modus Tollens	$\neg(P \wedge Q)$
$\neg(P \wedge Q)$	Ley de De Morgan	$\neg P \vee \neg Q$
$Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	Modus Tollendo Ponens	$\neg P$
$\neg P \wedge (S \vee P)$	Modus Tollendo Ponens	S
$S \wedge (S \Rightarrow T)$	Modus Ponens	T

Proposiciones base	Ley utilizada	Nueva proposición
$X \wedge Z$	Simplificación de la conjunción	X
$X \wedge Z$	Simplificación de la conjunción	Z
$X \wedge (\neg X \vee Y)$	Modus Ponens	Y
$Y \vee Z$	Adición	$Y \vee \neg Z$

Problema 1.14: Demostración por reducción al absurdo

Realizar las demostraciones por reducción al absurdo:

$$M \Rightarrow N, N \Rightarrow O, (M \Rightarrow O) \Rightarrow (N \Rightarrow P), (M \Rightarrow P) \Rightarrow Q. \quad \therefore \quad Q$$
$$C \Rightarrow R, (C \wedge R) \Rightarrow P, (C \Rightarrow P) \Rightarrow \neg S, S \vee E \quad \therefore \quad E$$

Solución:
En ambos casos empezaremos suponiendo que la conclusión por demostrarse es falsa. Para el primer inciso, suponemos que $\neg Q$ es verdadero. Para el segundo inciso suponemos que E es verdadero.

Proposiciones base	Ley utilizada	Nueva proposición
$\neg Q \wedge ((M \Rightarrow P) \Rightarrow Q)$	Modus Tollendo Tollens	$\neg(M \Rightarrow P)$
$\neg(M \Rightarrow P)$	Negación de la implicación	$M \wedge \neg P$
$M \wedge \neg P$	Simplificación de la conjunción	M
$M \wedge \neg P$	Simplificación de la conjunción	$\neg P$
$M \wedge (M \Rightarrow N)$	Modus Ponens	N
$N \wedge (N \Rightarrow O)$	Modus Ponens	O
$(M \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow O)$	Silogismo	$M \Rightarrow O$
$(M \Rightarrow O) \wedge [(M \Rightarrow O) \Rightarrow (N \Rightarrow P)]$	Modus Ponens	$N \Rightarrow P$
$(N \Rightarrow P) \wedge \neg P$	Modus Tollendo Tollens	$\neg N$
$N \wedge \neg N$	Conjunción	$\emptyset$

Mostramos que tomando la conjunción de las premisas con la negación de la conclusión, llegamos a un absurdo.

Proposiciones base	Ley utilizada	Nueva proposición
$\neg E \wedge (S \vee E)$	Modus Tollendo Ponens	S
$S \wedge [(C \Rightarrow P) \Rightarrow \neg S]$	Modus Tollendo Ponens	$\neg(C \Rightarrow P)$
$\neg(C \Rightarrow P)$	Negación de la implicación	$C \wedge \neg P$
$C \wedge \neg P$	Simplificación de la conjunción	C
$C \wedge \neg P$	Simplificación de la conjunción	$\neg P$
$C \wedge (C \Rightarrow R)$	Modus Ponens	R
$(C \wedge R) \wedge [(C \wedge R) \Rightarrow P]$	Modus Ponens	P
$P \wedge \neg P$	Conjunción	$\emptyset$

Mostramos que tomando la conjunción de las premisas con la negación de la conclusión, llegamos a un absurdo.

Problema 1.15: Operadores de conjuntos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos conjuntos. Completar las definiciones con operadores lógicos:

- $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow ....$
- $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow ....$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A} ...]$.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A} ...) \wedge (\exists x \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{A} ...)]$.
- $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow ....$

Solución:

- $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}$.
- $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}]$.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}) \wedge (\exists x \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B})]$.
- $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}]$.

Problema 1.16: Diagrama de Venn

Representar el diagrama de Venn de las operaciones:

1. Unión $A \cup B$
2. Intersección $A \cap B$
3. Complemento A^c
4. Resta $A \backslash B$
5. Subconjunto propio $A \subset B$

Solución:
La solución se encuentra en la figura 1

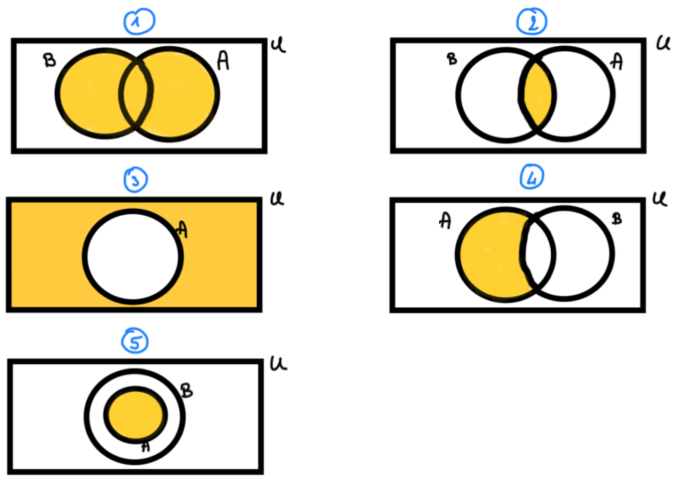

Figura 1: Diagramas de Venn de los operadores de conjuntos

Problema 1.17: Pertenencia y contención

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \{1\}, \{6\}\}$. Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- $2 \in A$
- $\{1\} \in A$
- $\{\{1\}\} \in A$
- $\{1\} \subseteq A$
- $6 \in A$
- $\{\{1\}\} \subseteq A$

Solución:

- $2 \in A$: Verdadero, ya que 2 es un elemento de A.
- $\{1\} \in A$: Verdadero, ya que el conjunto $\{1\}$ es un elemento de A.

- $\{\{1\}\} \in A$: Falso, ya que el conjunto $\{\{1\}\}$ no es un elemento de A.
- $\{1\} \subseteq A$: Verdadero, ya que el conjunto $\{1\}$ tiene como único elemento 1, el cual pertenece a A.
- $6 \in A$: Falso, ya que 6 no es un elemento directo de A, aunque el conjunto $\{6\}$ sí lo es.
- $\{\{1\}\} \subseteq A$: Falso, ya que el conjunto $\{\{1\}\}$ contiene el conjunto $\{1\}$, pero este no está contenido en A como elemento directo, sino que es un conjunto dentro de A.

Problema 1.18: Propiedades de conjuntos

¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas?

(1) Si $A \subseteq B$ y $B \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq C$

(2) Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$

(3) Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$

(4) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$

Solución:

(1) **Si $A \subseteq B$ y $B \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq C$.**

Falsa. La relación $A \subseteq B$ implica que todos los elementos de A están en B. Sin embargo, que $B \nsubseteq C$ no garantiza que $A \nsubseteq C$. Es posible que los elementos de A estén en C aunque B no lo esté. Un contraejemplo es el siguiente:

Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{1, 3\}$. Aquí, $A \subseteq B$ y $B \nsubseteq C$, pero $A \subseteq C$.

(2) **Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$.**

Falsa. El hecho de que las intersecciones de A con B y A con C sean iguales no implica que $B = C$. Podría haber elementos en B y C que no estén en A, y no afectarían la igualdad de las intersecciones. Un contraejemplo es el siguiente:

Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{1, 3\}$. Aquí, $A \cap B = \{1\} = A \cap C = \{1\}$, pero $B \neq C$.

(3) **Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$.**

Falsa. La igualdad de las uniones $A \cup B$ y $A \cup C$ no implica que $B = C$. Es posible que B y C contengan elementos distintos, pero si esos elementos están en A, no afectarán a la unión. Un contraejemplo es el siguiente:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Aquí, $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pero $B \neq C$.

(4) **Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$**

Verdadera. Usaremos las definiciones lógicas de los operadores:

$$A \subseteq B \equiv \forall x \in \mathcal{U}, x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$B \subseteq C \equiv \forall x \in \mathcal{U}, x \in B \Rightarrow x \in C$$

Usando un silogismo:

$$[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)] \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

es decir:

$$[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow A \subseteq C$$

Problema 1.19: Propiedades de conjuntos

Sean los conjuntos $A = (-\infty, 20]$, $B = -5, 10]$, $D = 0, 12$. Encontrar el intervalo $((A\backslash B) \cup D)^c$, donde $\backslash$ denota la resta de conjuntos.

Solución:
Representamos en la figura 2 la solución al problema: $((A\backslash B) \cup D)^c = (-5, 0) \cup (0, 10] \cup (20, +\infty)$.

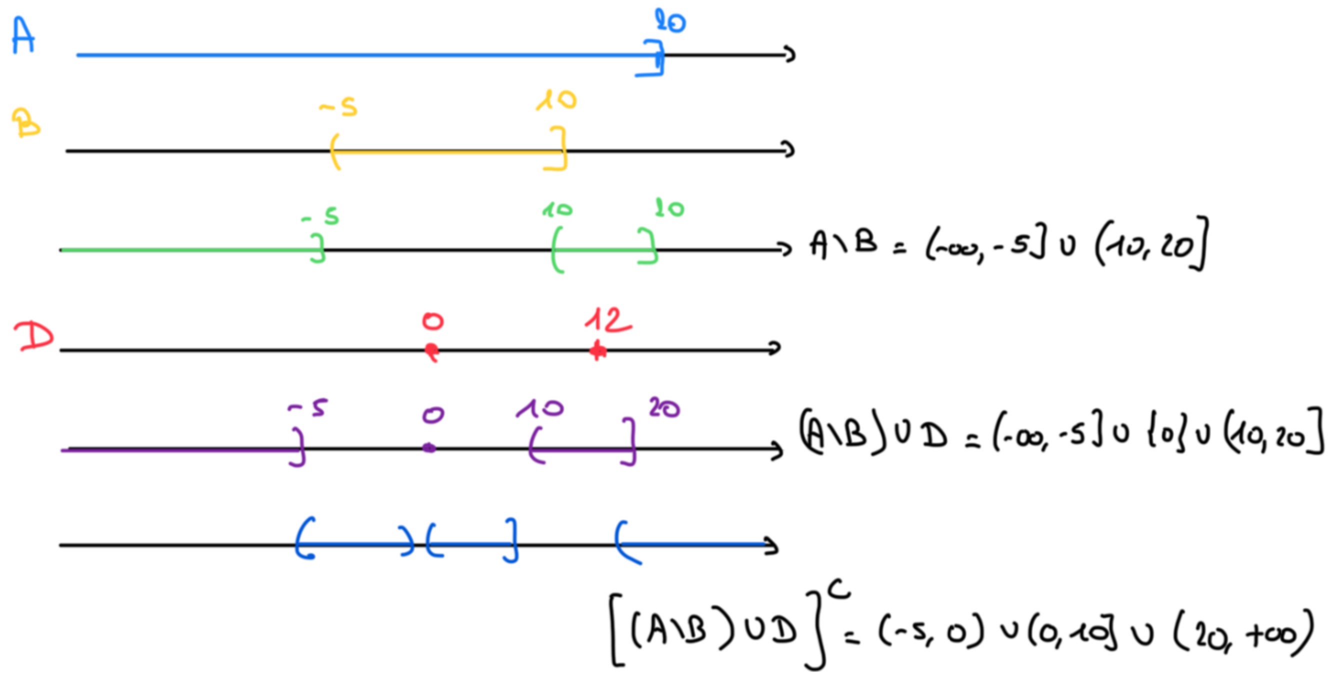

Figura 2: Operaciones de conjuntos

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MATRICES Y DETERMINANTES

Problema 2.1: Promedio

En la asignatura de Cálculo, el profesor calcula el promedio con tres exámenes con sus pesos respectivos 30 %, 50 % y 20 %. Jimena obtuvo un promedio de 7.4. Su segunda calificación es la suma de la primera y la tercera. Su amigo José obtuvo un promedio de 6.2 con la mitad de la calificación de Jimena al primer parcial, dos puntos menos que su amiga al segundo parcial y dos más al tercer parcial.

Solución:

Planteamiento del sistema de ecuaciones:

Sean:

- x_1, x_2, x_3 las calificaciones de Jimena en el primer, segundo y tercer parcial, respectivamente.
- y_1, y_2, y_3 las calificaciones de José en el primer, segundo y tercer parcial, respectivamente.

Para Jimena, el promedio es 7.4, y tenemos que:

$$0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 = 7.4$$

Además, sabemos que la segunda calificación de Jimena es la suma de la primera y la tercera:

$$x_2 = x_1 + x_3$$

Para José, el promedio es 6.2, y las condiciones dadas son:

$$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.2y_3 = 6.2$$

También tenemos que:

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1, \quad y_2 = x_2 - 2, \quad y_3 = x_3 + 2$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 & = & 7.4 \\ x_2 & = & x_1 + x_3 \\ 0.3\frac{x_1}{2} + 0.5(x_2 - 2) + 0.2(x_3 + 2) & = & 6.2 \end{cases}$$

Se escribe la matriz aumentada y se procede a la resolución de Gauss-Jordan:

Matriz aumentada (multiplicando por 10 el renglón 1 y por 100 el renglón 3):

$$A_{\text{aum}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 74 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 15 & 50 & 20 & 680 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & | & 74 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 15 & 50 & 20 & | & 680 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to 3R_2+R_1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & | & 74 \\ 0 & 8 & -1 & | & 74 \\ 0 & 25 & 10 & | & 310 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to 8R_3-25R_2]{R_1\to 8R_1-5R_2} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 21 & | & 222 \\ 0 & 8 & -1 & | & 74 \\ 0 & 0 & 105 & | & 630 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{105}R_3} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 21 & | & 222 \\ 0 & 8 & -1 & | & 74 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-21R_3]{R_2\to R_2+R_3} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & | & 96 \\ 0 & 8 & 0 & | & 80 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to \frac{1}{8}R_2]{R_1\to \frac{1}{24}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones admite solución ($\mathcal{R}g(A_{\text{coef}}) = \mathcal{R}g(A_{\text{aum}}) = 3$ y la solución es única (grado de libertad $g = 3 - 3 = 0$). La solución nos da las calificación de Jimena: $x_1 = 4, x_2 = 10, x_3 = 6$. Las calificaciones de José son $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 8$.

Problema 2.2: Sistema de ecuaciones con dos parámetros reales

Al reducir la matriz aumentada asociada con un sistema de 3 ecuaciones lineales y 3 incógnitas, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son dos parámetros reales Dar la solución del sistema de ecuaciones lineales, dependiendo del valor de a y de b.

Solución:
El rango de la matriz de coeficientes depende del valor de a.

- $a \neq 0$
  Terminamos la reducción dividiendo el último renglón entre a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & a & | & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to \frac{R_3}{a}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

  Análisis de soluciones: $\mathcal{R}g(A_{\text{coef}}) = \mathcal{R}g(A_{\text{aum}}) = 3$, el sistema admite soluciones. El grado de libertad es $g = 3 - 3 = 0$, la solución es única. Solución: $\left(4, -6, \frac{b}{a}\right)$.

- $a = 0$ y $b \neq 0$
  La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Análisis de soluciones: $\mathcal{R}g(A_{\text{coef}}) = 2$ y $\mathcal{R}g(A_{\text{aum}}) = 3$, el sistema no admite soluciones.

- $a = 0$ y $b = 0$
  La matriz aumentada es
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
  Análisis de soluciones: $\mathcal{R}g(A_{\text{coef}}) = \mathcal{R}g(A_{\text{aum}}) = 2$, el sistema admite soluciones. El grado de libertad es $g = 3 - 2 = 0$, el sistema tiene una infinidad de soluciones. Solución: $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 = 4 \wedge x_2 = -6 \right\}$.

Problema 2.3: Coeficientes estequiométricos

Para cada una de las reacciones a continuación, encontrar los coeficientes estequiométricos:
a) Reacción entre las especies Co^{3+}, Co^{2+}, Ni y Ni^{2+}.
b) Reacción entre las especies NO_3^-, NO_2, Cu, Cu^{2+}, H^+ y agua.

Solución:
a) Se asigna una incógnita a cada uno de los coeficientes estequiométricos, respectivamente x_1 para Co^{3+}, x_2 para Co^{2+}, x_3 para Ni y x_4 para Ni^{2+}. Se escribe una ecuación para cada uno de los átomos y para las cargas eléctricas:

$$\begin{array}{ccccc} \text{para } Co & : & x_1 + x_2 & = & 0 \\ \text{para } Ni & : & x_3 + x_4 & = & 0 \\ \text{para las cargas (positivas)} & : & 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan para la resolución. Se escribe la matriz aumentada y se realiza su reducción:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos al análisis de soluciones: $\mathcal{R}g\left(A_{\text{coef}}\right) = \mathcal{R}g\left(A_{\text{aum}}\right) = 3$, entonces el sistema de ecuaciones admite soluciones. Calculamos el grado de libertad del SEL $g = n - \mathcal{R}g\left(A_{\text{coef}}\right) = 4 - 3 = 1$, donde $n = 1$ es el número de incógnitas. Entonces, el sistema tiene una infinidad de soluciones y una incógnita servirá para determinar el valor de las demás. El conjunto solución es $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,| x_1 = -2x_4 \wedge x_2 = 2x_4 \wedge x_3 = -x_4\right\}$.
Para resolver el problema de química, tomamos una de las soluciones, por ejemplo, tomando $x_4 = 1$. Obtenemos:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 2, -1, 1)$$

Tomando los valores positivos para los productos y los negativos para los reactivos. Se obtiene:

$$2\ Co^{3+} + Ni \quad \leftrightarrow \quad 2\ Co^{2+} + Ni^{2+}$$

noindent b) Se asigna una incógnita a cada uno de los coeficientes estequiométricos, respectivamente x_1 para NO_3^-, x_2 para NO_2, x_3 para Cu, x_4 para Cu^{2+}, x_5 para H^+, y x_6 para el agua H_2O. Se escribe una ecuación para cada uno de los átomos y para las cargas eléctricas:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{para } N & : & x_1 + x_2 & = & 0 \\
\text{para } Cu & : & x_3 + x_4 & = & 0 \\
\text{para } O & : & 3x_1 + 2x_2 + x_6 & = & 0 \\
\text{para } H & : & x_5 + 2x_6 & = & 0 \\
\text{para las cargas (positivas)} & : & -x_1 + 2x_4 + x_5 & = & 0
\end{array}
$$

Vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan para la resolución. Se escribe la matriz aumentada y se realiza su reducción:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[R_5 \to R_5 + R_1]{R_3 \to R_3 - 3R_1}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_5 \to R_5 + R_3}}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_5 - 2R_3}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_3 \to 2R_3 + R_4}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_5]{R_3 \to R_3 - R_5}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3/2 \\ R_4 \to -R_4/2}}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

Procedemos al análisis de soluciones: $\mathcal{R}g\left(A_{\text{coef}}\right) = \mathcal{R}g\left(A_{\text{aum}}\right) = 5$, entonces el sistema de ecuaciones admite soluciones. Calculamos el grado de libertad del SEL $g = n - \mathcal{R}g\left(A_{\text{coef}}\right) = 6 - 5 = 1$, donde $n = 6$ es el número de incógnitas. Entonces, el sistema tiene una infinidad de soluciones y dos incógnitas servirán para determinar el valor de las demás. El conjunto solución es

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| x_1 = -x_6 \wedge x_2 = x_6 \wedge x_3 = \frac{1}{2}x_6 \wedge x_4 = -\frac{1}{2}x_6 \wedge x_5 = -2x_6 \right\}$$

Para resolver el problema de química, tomamos una de las soluciones, por ejemplo, tomando $x_6 = 2$. Obtenemos:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-2, 2, 1, -1, -4, 2)$$

Tomando los valores positivos para los productos y los negativos para los reactivos, se obtiene:

$$2\ NO_3^- + Cu^{2+} + 4\ H^+ \quad \leftrightarrow \quad 2\ NO_2 + Cu + 2\ H_2O$$

Problema 2.4: Matriz diagonal y matriz identidad

a) Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero, es decir

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{ij} \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases} \tag{1}$$

Dar un ejemplo de matriz diagonal de tamaño 4×4

b) Dar la definición de la matriz Identidad de dimensión n con sus coeficientes a_{ij}. Escribir la matriz Identidad de dimensión 4.

Solución:
a) Un ejemplo de matriz diagonal de tamaño 4×4 es:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) La matriz Identidad de dimensión n es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Sus coeficientes se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz Identidad de dimensión 4 es:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2.5: Matriz escalonada, matriz reducida

Indicar si las matrices a continuación son escalonadas y/o reducidas o cualesquiera.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Matriz	Tipo	Justificación
A	Escalonada	Los pivotes no son 1
B	Cualquiera	Los pivotes no están ordenados de manera escalonada
C	Escalonada	Arriba del segundo pivote tenemos un coeficiente diferente de 0
D	Escalonada y reducida	Pivotes escalonados, iguales a 1. Puros 0 arriba y debajo de los pivotes
E	Cualquiera	Un elemento diferente de 0 debajo del segundo pivote
F	Reducida	Cumple con todas los requisitos, nota que es la matriz Identidad I_3

Problema 2.6: Existencia/Unicidad de soluciones 1

Al resolver SELs, se encuentran las matrices aumentadas reducidas a continuación. Notamos las incógnitas $x_1, x_2, ...$ Indicar, detallando tu respuesta y para cada SEL considerado:

- El número de incógnitas y de ecuaciones.
- Si el sistema admite solución.
- Si la solución es única.
- la solución del sistema.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & | & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & | & -5 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Notaremos $\mathcal{S}$ el conjunto solución para cada SEL. $\mathcal{R}g(A_{\text{coef}})$ es el rango de la matriz de coeficientes. $\mathcal{R}g(A_{\text{aum}})$ es el rango de la matriz aumentada. La solución está en la tabla a continuación:

Sistema	Tamaño (ec., incógn.)	$\mathcal{R}g(A_{\text{coef}})$	$\mathcal{R}g(A_{\text{aum}})$	Solución
(1)	2, 3	2	2	Infinidad de soluciones: grado de libertad 1 $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = -6 - 3x_3 \wedge x_2 = 3 - 4x_3\right\}$
(2)	3, 3	3	3	Solución única: $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$
(3)	2, 2	2	2	Solución única: $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2}{3}, 4\right)\right\}$
(4)	2, 3	2	2	Infinidad de soluciones: grado de libertad 1 $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = \frac{2}{5} - 7x_3 \wedge x_2 = -5 + \frac{4}{3}x_3\right\}$
(5)	4, 3	3	3	Solución única: $\mathcal{S} = \{(2, -3, 1)\}$
(6)	4, 3	3	4	No hay solución ya que los rangos de las dos matrices son diferentes: $\mathcal{S} = \emptyset$

Problema 2.7: Existencia/Unicidad de soluciones 2

Al resolver SELs, se encuentran las matrices aumentadas a continuación. Los parámetros a, b, c son constantes reales. Notamos las incógnitas $x_1, x_2, ...$ Indicar, detallando tu respuesta y para cada SEL considerado:

- El número de incógnitas y de ecuaciones.
- Si el sistema admite solución, en función de a, b y c.
- Si la solución es única, en función de a, b y c.
- la solución del sistema, en función de a, b y c.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -6 \\ 0 & a & b & | & c \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & a & | & b \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & a & | & b \end{pmatrix}$$

Solución:

Notaremos $\mathcal{S}$ el conjunto solución para cada SEL:

Caso (1)

- Si $a = b = c = 0$
  Infinidad de soluciones con grado de libertad 2. $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = -6 - 3x_3\right\}$.
- Si $a = b = 0$ y $c \neq 0$
  No hay solución.
- Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$
  Infinidad de soluciones con grado de libertad 1. $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = -6 - 3x_3 \wedge ax_2 + bx_3 = c\right\}$.

Caso (2)

- Si $a = b = 0$
  Infinidad de soluciones con grado de liberta 1. $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\right\}$.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$
  No hay solución.
- Si $a \neq 0$
  Solución única $\mathcal{S} = \{(0, 0, b/a)\}$.

Caso (3)

- Si $a = b = 0$
  Infinidad de soluciones con grado de liberta 1. $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = \frac{2}{3}\right\}$.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$
  No hay solución.
- Si $a \neq 0$
  Solución única $\mathcal{S} = \{(2/3, b/a)\}$.

Problema 2.8: Método de Gauss-Jordan y método de Cramer

Resolver los SEL a continuación utilizando ambos métodos (cuando posible):

$$(a)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 - x_3 \\ 4x_3 + x_2 + x_1 = 10 \\ x_2 = x_3 + x_1 - 5 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x1 = 5 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 = 12 + x_3 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} -x_2 - 5x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 &= -5 \\ 4x_1 - x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 4 \end{cases} \quad (e)\ \begin{cases} -x_2 - 5x_3 + x_4 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 &= -5 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 7x_3 + x_4 &= 4 \end{cases} \quad (f)\ \begin{cases} -x_2 - 5x_3 + x_4 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 &= -5 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Solución:

Sistema (a): Se puede resolver con ambos métodos.

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{10}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{10}{7} \right) \right\}$$

Sistema (b): Se puede resolver con ambos métodos.

$$\mathcal{S} = \{(-1, -1, 2)\}$$

Sistema (c): Se puede resolver únicamente con Gauss-Jordan.

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = 6 + \frac{1}{2}x_3 \wedge x_2 = -1 - \frac{3}{2}x_3 \right\}$$

Sistema (d): El sistema no tiene solución.

Sistema (e): Se puede resolver únicamente con ambos métodos.

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{183}{119}, -\frac{92}{119}, -\frac{61}{119}, \frac{198}{119} \right) \right\}$$

Sistema (f): Se puede resolver únicamente con Gauss-Jordan.

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 = -\frac{15}{13} - \frac{3}{13}x_4 \wedge x_2 = -\frac{40}{13} + \frac{18}{13}x_4 \wedge x_3 = -\frac{5}{13} - \frac{1}{13}x_4 \right\}$$

Problema 2.9: Cálculo de determinantes

Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) Matríz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Matríz 3×3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

c) Matríz 3×3:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Matríz 4×4:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Matríz 4×4:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En cada caso, realiza los cálculos correspondientes para obtener el determinante.

Solución:

Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) Matríz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de una matriz 2×2 se calcula con la fórmula:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Aplicando los valores:

$$\det(A) = (3)(4) - (5)(2) = 12 - 10 = 2$$

b) Matríz 3×3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de una matriz 3×3 se calcula con la expansión en cofactores:

$$\det(B) = b_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - b_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + b_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (4)(8) - (5)(7) = 32 - 35 = -3$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 8\end{pmatrix} = (0)(8) - (5)(6) = -30$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 7\end{pmatrix} = (0)(7) - (4)(6) = -24$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\det(B) = (1)(-3) - (2)(-30) + (3)(-24)$$

$$\det(B) = -3 + 60 - 72 = -15$$

c) Matríz 3×3:

$$C = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$$

Usamos expansión en cofactores para calcular el determinante:

$$\det(C) = c_{11} \cdot \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} - c_{12} \cdot \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} + c_{13} \cdot \det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante 2×2:

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = (2)(3) - (1)(4) = 6 - 4 = 2$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = (3)(3) - (1)(1) = 9 - 1 = 8$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix} = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\det(C) = (2)(2) - (1)(8) + (0)(10)$$

$$\det(C) = 4 - 8 + 0 = -4$$

d) Usamos el desarrollo en cofactores:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\\
&= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
&+ -2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\
&= -24
\end{aligned}$$

e) Usamos el desarrollo en cofactores:

$$\begin{aligned}
\det(E) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -8
\end{aligned}$$

Problema 2.10: Determinante 2

Determine la constante $k \in \mathbb{R}$ para que la matriz tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 3k & 1 & -1 \\ -2 & k & 4 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Una matriz cuadrada admite una inversa únicamente si su determinante es diferente de 0. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{aligned}
|A| &= 3k \cdot (1 \cdot k - 0 \cdot 4) - (-2) \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + k \cdot (1 \cdot 4 - k \cdot (-1)) \\
&= 3k^2 + 2 + k \cdot (4 + k) \\
&= 4k^2 + 4k + 2
\end{aligned}$$

Los valores de k que permiten que la matriz A admita una matriz inversa son tales que $4k^2 + 4k + 2 \neq 0$. Esta ecuación no tiene solución real, así que para cualquier valor de k, la matriz tiene inversa.

Problema 2.11: Operaciones con matrices

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \pi$$

Determine lo siguiente:

(I) $(A + C)B$

(II) $\lambda(C - A)$

(III) $\lambda(BD)E - B$

Solución:
Dado que las matrices y vectores se encuentran en las siguientes dimensiones:
- A es una matriz 2×3, - B es un vector columna 3×1, - C es una matriz 2×3, - D es un vector fila 1×3, - E es un vector columna 3×1, - $\lambda = \pi$, un número real.
Ahora resolvemos cada una de las operaciones solicitadas:

- $(A + C)B$

Primero, debemos sumar las matrices A y C. Dado que ambas son matrices 2×3, la suma es válida:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} -2+3 & 3+4 & -1+2 \\ \sqrt{3}+1 & 0+7 & 8+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ \sqrt{3}+1 & 7 & 8+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos esta suma por el vector B:

$$B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de una matriz 2×3 por un vector columna 3×1 da como resultado un vector columna 2×1:

$$(A + C)B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ \sqrt{3}+1 & 7 & 8+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto:

$$\text{Primera fila:} \quad 1(-4) + 7(1) + 1(2) = -4 + 7 + 2 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Segunda fila:} \quad (\sqrt{3}+1)(-4) + 7(1) + (8+\sqrt{5})(2) &= -4(\sqrt{3}+1) + 7 + 2(8+\sqrt{5}) \\ &= -4\sqrt{3} - 4 + 7 + 16 + 2\sqrt{5} \\ &= -4\sqrt{3} + 19 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(A + C)B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4\sqrt{3} + 19 + 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- $\lambda(C - A)$

  Restamos las matrices C y A:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} 3-(-2) & 4-3 & 2-(-1) \\ 1-\sqrt{3} & 7-0 & \sqrt{5}-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1-\sqrt{3} & 7 & \sqrt{5}-8 \end{pmatrix}$$

  Ahora multiplicamos esta matriz por $\lambda = \pi$:

$$\pi(C - A) = \pi \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1-\sqrt{3} & 7 & \sqrt{5}-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi & \pi & 3\pi \\ \pi(1-\sqrt{3}) & 7\pi & \pi(\sqrt{5}-8) \end{pmatrix}$$

- $\lambda(BD)E - B$

  Primero multiplicamos el vector B (que es 3×1) por el vector fila D (que es 1×3):

$$B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  El producto BD es una matriz 3×3:

$$BD = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(1) & -4(0) & -4(-4) \\ 1(1) & 1(0) & 1(-4) \\ 2(1) & 2(0) & 2(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

  Ahora multiplicamos esta matriz por el vector columna E:

$$E = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ -1 \end{pmatrix}$$

  La multiplicación de una matriz 3×3 por un vector columna 3×1 da como resultado un vector columna 3×1:

$$BD \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Realizamos el producto:

$$\text{Primera fila:} \quad (-4)(\pi) + 0(e) + 16(-1) = -4\pi - 16$$

$$\text{Segunda fila:} \quad (1)(\pi) + 0(e) + (-4)(-1) = \pi + 4$$

$$\text{Tercera fila:} \quad (2)(\pi) + 0(e) + (-8)(-1) = 2\pi + 8$$

  Entonces:

$$BD \cdot E = \begin{pmatrix} -4\pi - 16 \\ \pi + 4 \\ 2\pi + 8 \end{pmatrix}$$

  Finalmente, multiplicamos por $\lambda = \pi$:

$$\lambda(BD \cdot E) = \pi \begin{pmatrix} -4\pi - 16 \\ \pi + 4 \\ 2\pi + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\pi^2 - 16\pi \\ \pi^2 + 4\pi \\ 2\pi^2 + 8\pi \end{pmatrix}$$

  Y ahora restamos B:

$$B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Realizamos la resta:

$$\begin{pmatrix} -4\pi^2 - 16\pi \\ \pi^2 + 4\pi \\ 2\pi^2 + 8\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\pi^2 - 16\pi + 4 \\ \pi^2 + 4\pi - 1 \\ 2\pi^2 + 8\pi - 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\lambda(BD \cdot E) - B = \begin{pmatrix} -4\pi^2 - 16\pi + 4 \\ \pi^2 + 4\pi - 1 \\ 2\pi^2 + 8\pi - 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.12: Propiedades de las operaciones de matrices

Indicar cuales de las propiedades a continuación son correctas para las operaciones entre matrices. Cuando lo son, reescribirlas con cuantificadores

1. Asociatividad de la suma de matrices
2. Conmutatividad de la suma de matrices
3. Existencia del neutro aditivo
4. Existencia del inverso aditivo
5. Asociatividad del producto de matrices
6. Conmutatividad del producto de matrices
7. Existencia del neutro multiplicativo
8. Existencia del inverso multiplicativo

Solución:

1. **Asociatividad de la suma de matrices**:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad (A+B)+C = A+(B+C).$$

2. **Conmutatividad de la suma de matrices**:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A+B = B+A.$$

3. **Existencia del neutro aditivo**:

$$\exists! 0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A+0 = A.$$

4. **Existencia del inverso aditivo**:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \exists B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A+B = B+A = 0.$$

5. **Asociatividad del producto de matrices**:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}), \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C).$$

6. **Conmutatividad del producto de matrices**: El producto de matrices **no es conmutativo** en general.

7. **Existencia del neutro multiplicativo**: Se puede definir únicamente en el caso de matrices cuadradas (que tienen el mismo número de renglones y de columnas).

$$\exists! I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

8. **Existencia del inverso multiplicativo**: Se puede definir únicamente para matrices cuadradas que admiten una matriz inversa (que tienen un determinante diferente de 0). En este caso tenemos:

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Problema 2.13: Formula del binomio

Es cierto decir que $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), (A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2$?

Solución:
Usamos la definición del cuadrado: $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2$. Recordamos que el producto de matrices no conmuta, así que en el caso general, $A\cdot B + B\cdot A \neq 2A\cdot B$.

Problema 2.14: Propiedades de determinantes

Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cuadradas y un número real $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. ¿A qué es igual el determinante de la matriz αA?
2. ¿Es correcta la afirmación $|A+B| = |A| + |B|$?
3. ¿Es correcta la afirmación $|A\dot{B}| = |A|\cdot|B|$?
4. Mostrar que el determinante de una matriz con un renglón o una columna de puros 0 es igual a 0.
5. Mostrar que $A \cdot I_n = A$.

Solución:

1. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.
2. $|A+B| = |A| + |B|$ no es correcto en el caso general.
3. $|A\dot{B}| = |A|\cdot|B|$ es correcto.
4. Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que su k-esimo renglón tenga puros 0. Calculamos su determinante desarrollándolo respecto a este mismo renglón:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}|M_{kj}| \\ &= a_{k1}(-1)^{k+1}|M_{k1}| + a_{k2}(-1)^{k+2}|M_{k2}| + ... + a_{kn}(-1)^{k+n}|M_{kn}| \end{aligned} \tag{2}$$

donde $|M_{kj}|$ es el determinante del menor M_{kj} asociado al elemento a_{ij}. Debido que todos los elementos a_{kj} son iguales a 0 por hipótesis, entonces $|A| = 0$.

Problema 2.15:

Sean tres matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{r\times t}(\mathbb{R})$.
a) Qué condiciones tienes que cumplir m, n, p, q, r, t para que se pueda realizar la operación $(A + B) \cdot C$.
b) ¿Qué propiedad de las operaciones entre matrices se enuncia $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$?
c) Demostrar la propiedad del b.

Solución:
a) Condiciones para realizar la operación $(A + B) \cdot C$
Para que se pueda realizar la operación $(A + B) \cdot C$, primero debemos asegurarnos de que la suma de las matrices $A + B$ esté definida. Esto es posible si y solo si A y B tienen las mismas dimensiones, es decir:

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

En este caso, tanto A como B deben tener dimensiones $m \times n$.
Después de asegurarnos de que $A + B$ esté bien definida, debemos verificar si podemos multiplicar $A + B$ por la matriz C. Para que la multiplicación de matrices esté definida, el número de columnas de la matriz $A + B$ (que es n) debe ser igual al número de filas de la matriz C (que es r):

$$n = r$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias son:

$$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad C \in \mathcal{M}_{n\times t}(\mathbb{R})$$

b) Propiedad de las operaciones entre matrices
La propiedad que se enuncia es la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices con respecto a la suma. Es decir, se cumple la siguiente relación:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Esta propiedad establece que la multiplicación de una matriz suma por otra matriz es igual a la suma de las multiplicaciones de las matrices individuales.
c) Demostración de la propiedad
Para demostrar que $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, consideremos las matrices $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$.
El producto $(A + B) \cdot C$ es la multiplicación de la matriz $A + B$ por la matriz C, cuya i-ésima fila y j-ésima columna está dada por la suma de los productos de las filas de $A + B$ y las columnas de C:

$$[(A + B) \cdot C]_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj}\right]$$

Esta expresión se puede separar de la siguiente manera:

$$[(A + B) \cdot C]_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}\right]$$

Lo que se puede reescribir como:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Esta es la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices.

3 SISTEMAS NUMÉRICOS

Problema 3.1: Cerradura de operaciones

a) Indicar si las operaciones son cerradas (C) o abiertas (A) para los conjuntos dados completando la tabla:

Conjunto	$+$	$-$	$\times$	$\div$
$\mathbb{N}$				
$\mathbb{Z}$				
$\mathbb{Q}$				
$\mathbb{R}$				
$\mathbb{C}$				

b) Se admiten por axioma las propiedades de cerradura en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Demostrar a partir de lo anterior las propiedades de cerradura de las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$.
c) ¿Cuales de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ es un campo? No se pide ninguna demostración.

Solución:
a) La tabla completada es la siguiente:

Conjunto	$+$	$-$	$\times$	$\div$
$\mathbb{N}$	C	A	C	A
$\mathbb{Z}$	C	C	C	A
$\mathbb{Q}$	C	C	C	C
$\mathbb{R}$	C	C	C	C
$\mathbb{C}$	C	C	C	C

b) Por definición, los números racionales $\mathbb{Q}$ son aquellos que pueden expresarse como cocientes de enteros, con denominador no nulo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

- Suma ($+$):
  Sean $a = \frac{p_1}{q_1}$ y $b = \frac{p_2}{q_2}$, con $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Su suma es:

$$a + b = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

  El numerador $p_1 q_2 + p_2 q_1$ es un entero, y el denominador $q_1 q_2$ es un entero distinto de cero por la cerradura del producto y de la suma en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $a + b \in \mathbb{Q}$.

- Resta ($-$):
  Similar al caso de la suma, dado que la resta también es cerrada en $\mathbb{Z}$:

$$a - b = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}.$$

- Multiplicación ($\times$):
  Sean $a = \frac{p_1}{q_1}$ y $b = \frac{p_2}{q_2}$. Su producto es:

$$a \cdot b = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}.$$

  Dado que tanto el numerador como el denominador son enteros (con $q_1 q_2 \neq 0$) y por la cerradura del producto en $\mathbb{Z}$, el producto pertenece a $\mathbb{Q}$.

- División ($\div$):
  Para $a = \frac{p_1}{q_1}$ y $b = \frac{p_2}{q_2}$, con $b \neq 0$, la división es:

$$a \div b = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}.$$

  Nuevamente, $p_1 q_2 \in \mathbb{Z}$ por la cerradura del producto en $\mathbb{Z}$ y $p_2 q_1 \neq 0$. Por lo tanto, $a \div b \in \mathbb{Q}$.

Así, todas las operaciones están cerradas en $\mathbb{Q}$.

c) Los conjuntos que son campos son aquellos donde las operaciones $+$, $-$, $\times$, y $\div$ (excepto la división entre 0) están cerradas, y se cumplen las propiedades de asociatividad, conmutatividad, distributividad y existencia de elementos neutros e inversos. De los conjuntos dados, los campos son:

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

Problema 3.2: Propiedades de los enteros

Sea la función proposicional $P(x, z)$ de enunciado "x es múltiplo de z". Analizar el valor de verdad de las frases a continuación y justifica tu respuesta:

a) $\forall x_1, x_2, z \in \mathbb{Z}, [P(x_1, z) \wedge P(x_2, z)] \Rightarrow P(x_1 - x_2, z)$

b) $\forall x, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, [P(x, z_1) \wedge P(x, z_2)] \Rightarrow P(x, z_1 - z_2)$

Solución:

a) La proposición es **verdadera**. Justificación: Si $P(x_1, z)$ y $P(x_2, z)$ son verdaderos, entonces x_1 y x_2 son múltiplos de z. Esto implica que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$x_1 = k_1 z \quad \text{y} \quad x_2 = k_2 z.$$

Al calcular $x_1 - x_2$, obtenemos:

$$x_1 - x_2 = k_1 z - k_2 z = (k_1 - k_2) z.$$

Como $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$, se cumple que $x_1 - x_2$ es múltiplo de z, es decir, $P(x_1 - x_2, z)$ es verdadero. Por lo tanto, la proposición es válida.

b) La proposición es **falsa**. Justificación: Si $P(x, z_1)$ y $P(x, z_2)$ son verdaderos, entonces x es múltiplo de z_1 y de z_2. Esto implica que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$x = k_1 z_1 \quad \text{y} \quad x = k_2 z_2.$$

Sin embargo, esto no garantiza que x sea múltiplo de $z_1 - z_2$. Por ejemplo, consideremos $x = 10$, $z_1 = 5$ y $z_2 = 2$. Aquí, x es múltiplo de z_1 y z_2, es decir:

$$P(10, 5) \text{ y } P(10, 2) \text{ son verdaderos.}$$

Pero $z_1 - z_2 = 3$, y $P(10, 3)$ es falso. Encontramos aquí un contraejemplo.

Problema 3.3: Propiedades de los racionales

Sea la función proposicional $P(x)$ de enunciado "$x \in \mathbb{Q}$". Analizar el valor de verdad de las frases a continuación y justifica tu respuesta:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \forall x_1, x_2, [\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2)] \Rightarrow \neg P(x_1 - x_2) \\ \text{b)} & \forall x, x_2 \in \mathbb{Z}, [P(x_1) \wedge P(x_2)] \Rightarrow P(x_1 \cdot x_2) \end{array}$$

Solución:

Sea la función proposicional $P(x)$ de enunciado "$x \in \mathbb{Q}$". Analizar el valor de verdad de las frases a continuación y justificar la respuesta:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \forall x_1, x_2,\ [\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2)] \Rightarrow \neg P(x_1 - x_2) \\ \text{b)} & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q},\ [P(x_1) \wedge P(x_2)] \Rightarrow P(x_1 \cdot x_2) \end{array}$$

Análisis y justificación:

a) La proposición es **falsa**. Justificación: Si $\neg P(x_1)$ y $\neg P(x_2)$, entonces x_1 y x_2 no son racionales, es decir, son números irracionales. La proposición plantea que si ambos números son irracionales, entonces su diferencia $x_1 - x_2$ también es irracional ($\neg P(x_1 - x_2)$). Sin embargo, esto no es siempre cierto. Por ejemplo:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

Aquí, x_1 y x_2 son irracionales, pero:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0,$$

y $0 \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice la proposición. Por lo tanto, la proposición no es válida en general.

b) La proposición es **verdadera**. Justificación: Si $P(x_1)$ y $P(x_2)$, entonces x_1 y x_2 son números racionales. La proposición plantea que el producto de dos números racionales es también un número racional. Esto es siempre cierto porque la multiplicación de dos números racionales produce otro número racional. Si $x_1 = \frac{a}{b}$ y $x_2 = \frac{c}{d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$, entonces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

y $ac \in \mathbb{Z}, bd \in \mathbb{Z}$ con $bd \neq 0$. Por lo tanto, $x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{Q}$. Así, la proposición es válida.

Problema 3.4: Subconjuntos

a) Encontrar todos los subconjuntos del conjunto de naturales $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$.
b) Indicar cuales de ellos son subconjuntos propios.
c) Escribir el número de subconjuntos de $\mathcal{B}$ utilizando combinatorias.
d) De manera general, ¿cómo se podrá escribir el número de subconjuntos de un conjunto de naturales de n elementos?

Solución:

a) Escribimos todos los subconjuntos del conjunto de naturales $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ en la tabla a continuación.
b) Todos los conjuntos de la tabla son subconjuntos propios de $\mathcal{B}$, con la excepción de $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{array}{cccccc}
\emptyset & & & & & \\
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & & \\
\{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \\
\{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4\} & & \\
\{1,2,3,4\} & & & & &
\end{array}$$

c) Podemos escribir el número de subconjuntos como:

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$$

d) De manera general, se podrá escribir el número de subconjuntos un conjunto de n elementos naturales como:

$$\sum_{p=0}^{n} C_p^n$$

Problema 3.5: Definición por extensión y por comprensión

Para cada conjunto a continuación,

- Indicar cual es el Universo $\mathcal{U}$ considerado
- Indicar si está definido por comprensión o por extensión.
- Dar su otra definición.
- Expresar su complemento con ambas definiciones.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \mathcal{A} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, m^2 \geq 16 \land m > -7\right\} \\
\text{b)} & \mathcal{B} = [-5, 10) \\
\text{c)} & \mathcal{C} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, m^2 \geq 9 \land m > -8\right\} \\
\text{d)} & \mathcal{D} = (-6, 7] \\
\text{e)} & \mathcal{E} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2m < m^2 \land m > -5\right\} \\
\text{f)} & \mathcal{F} = (-13, 22] \\
\text{g)} & \mathcal{G} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 4m < m^2 \land m \geq -6\right\} \\
\text{h)} & \mathcal{H} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 5m \geq m^2 \lor m = 10\right\} \\
\text{i)} & \mathcal{I} = \left\{m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, m^2 > 4 \land m^3 \leq 50\right\}
\end{array}$$

Solución:

- $\mathcal{A} = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \geq 16 \land m > -7\right\}$
  - Universo: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ (enteros).
  - Definición: Por comprensión.
  - Definición alternativa: $\mathcal{A} = \{-6, -5, -4, 4, 5, 6, \dots\}$ (por extensión).
  - Complemento:
    - Por comprensión: $\mathcal{A}^c = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < 16 \lor m \leq -7\right\}$
    - Por extensión: $\mathcal{A}^c = \{\dots, -8, -7, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- $\mathcal{B} = [-5, 10)$

- Universo: $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ (reales).
- Definición: Por extensión.
- Definición alternativa: $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 10\}$ (por comprensión).
- Complemento:
  - Por comprensión: $\mathcal{B}^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x \geq 10\}$
  - Por extensión: $\mathcal{B}^c = (-\infty, -5) \cup [10, \infty)$

- $\mathcal{C} = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \geq 9 \wedge m > -8\right\}$
  - Universo: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ (enteros).
  - Definición: Por comprensión.
  - Definición alternativa: $\mathcal{C} = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ (por extensión).
  - Complemento:
    - Por comprensión: $\mathcal{C}^c = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < 9 \vee m \leq -8\right\}$
    - Por extensión: $\mathcal{C}^c = \{\dots, -9, -8, -2, -1, 0, 1, 2\}$

- $\mathcal{D} = (-6, 7]$
  - Universo: $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ (reales).
  - Definición: Por extensión.
  - Definición alternativa: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leq 7\}$ (por comprensión).
  - Complemento:
    - Por comprensión: $\mathcal{D}^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \vee x > 7\}$
    - Por extensión: $\mathcal{D}^c = (-\infty, -6] \cup (7, \infty)$

- $\mathcal{E} = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid 2m < m^2 \wedge m > -5\right\}$
  - Universo: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ (enteros).
  - Definición: Por comprensión.
  - Definición alternativa: $\mathcal{E} = \{-4, -3, -2, 3, 4, 5, \dots\}$ (por extensión).
  - Complemento:
    - Por comprensión: $\mathcal{E}^c = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid 2m \geq m^2 \vee m \leq -5\right\}$
    - Por extensión: $\mathcal{E}^c = \{\dots, -6, -5, -1, 0, 1, 2\}$

Problema 3.6: Números complejos: parte real y parte imaginaria

Dar la parte real y la parte imaginaria de los números complejos. Indicar cuales son reales puros e imaginarios puros:

1. $3 - 6i$
2. $-4i$
3. 21
4. 0
5. $6i - 9$
6. $3i^2 + 4i - 2$

Solución:

1. $3 - 6i$: Parte real: 3, Parte imaginaria: -6.
2. $-4i$: Parte real: 0, Parte imaginaria: -4 , Imaginario puro.
3. 21: Parte real: 21, Parte imaginaria: 0, Real puro.
4. 0: Parte real: 0, Parte imaginaria: 0, Real puro (es un caso especial).
5. $6i - 9$: Parte real: -9, Parte imaginaria: 6
6. $3i^2 + 4i - 2$: Primero evaluamos $i^2 = -1$, entonces:

$$3i^2 + 4i - 2 = 3(-1) + 4i - 2 = -3 - 2 + 4i = -5 + 4i.$$

   Parte real: -5, Parte imaginaria: 4.

Problema 3.7: Parte real, parte imaginaria, módulo, argumento

Indicar si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifique con detalle sus respuestas.

(I) $\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(w)$

(II) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(III) $\mid z + w \mid = \mid z \mid + \mid w \mid$

(IV) $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z| \wedge |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$

(V) $|\overline{z}| = |z|$

Solución:

(I) Falsa: La parte real del producto de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se calcula como:

$$\Re(zw) = \Re((a + bi)(c + di)) = ac - bd.$$

Por otro lado, $\Re(z)\Re(w) = ac$. En general, $ac - bd \neq ac$. Contraejemplo: $z = 1 + i, w = 1 - i$:

$$\Re(zw) = \Re((1 + i)(1 - i)) = \Re(1 - i^2) = \Re(2) = 2, \quad \Re(z)\Re(w) = 1 \cdot 1 = 1.$$

(II) Verdadera: Para $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, el argumento del producto es:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

salvo que los argumentos se ajusten a un intervalo estándar (por ejemplo, $(-\pi, \pi]$).

(III) Falsa: Según la desigualdad triangular, se cumple:

$$\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid .$$

La igualdad ocurre solo cuando z y w tienen la misma dirección en el plano complejo (es decir, son números proporcionales con un factor positivo). Contraejemplo: $z = 1 + i, w = -1 - i$:

$$\mid z + w \mid = \mid 0 \mid = 0, \quad \mid z \mid + \mid w \mid = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

(iv) Verdadera: Sea $z = a + bi$, entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $|\Re(z)| = |a|$ y $|\Im(z)| = |b|$:

$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

lo cual es cierto porque $|a|^2 = a^2$ y $|b|^2 = b^2$ son términos del cuadrado de $|z|$.

(v) Verdadera: Sea $z = a + bi$, entonces su conjugado es $\overline{z} = a - bi$. El módulo de z es:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por lo tanto, $|\overline{z}| = |z|$.

Problema 3.8: Potencias de i

Reducir los números:

1. i^2
2. i^8
3. i^{238}
4. i^{497}

Solución:

Sabemos que los poderes de i siguen un patrón cíclico de 4 pasos:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Para reducir las potencias mayores, basta con calcular el residuo de la potencia al dividirla entre 4. Sea n el exponente, entonces:

$$i^n = i^q.$$

donde q es el residuo de la división entera de n entre 4.

1. i^2: Residuo de la división de 2 entre 4: 2. Por el ciclo, $i^2 = -1$.
2. i^8: Residuo de la división de 8 entre 4: 0. Por el ciclo, $i^0 = 1$.
3. i^{238}: Residuo de la división de 238 entre 4: 2. Por el ciclo, $i^{238} = i^2 = -1$.
4. i^{497}: Residuo de la división de 497 entre 4: 1. Por el ciclo, $i^{497} = i^1 = i$.

Problema 3.9: Operaciones de complejos

Realice las siguientes operaciones en $\mathbb{C}$. Simplifique y exprese las respuestas en la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $(3 + 4i) + (5 - 2i)$
2. $(7 - 3i) - (2 + 6i)$
3. $(2 + 3i) \cdot (1 - 4i)$
4. $\frac{6+8i}{2-i}$
5. $\frac{3+5i}{4+7i}$
6. $(1 + i)^4$

7. $(5+12i)\cdot(3-4i)+2-3i$

Solución:

1. Suma:

$$(3+4i)+(5-2i)=(3+5)+(4-2)i=8+2i$$

2. Resta:

$$(7-3i)-(2+6i)=(7-2)+(-3-6)i=5-9i$$

3. Producto:

$$(2+3i)\cdot(1-4i)=2\cdot 1+2\cdot(-4i)+3i\cdot 1+3i\cdot(-4i)=2-8i+3i-12i^2=14-5i$$

4. División:

$$\frac{6+8i}{2-i}=\frac{(6+8i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{(6+8i)(2+i)}{5}=\frac{12+6i+16i+8i^2}{5}=\frac{12+22i-8}{5}=\frac{4+22i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{22}{5}i$$

5. División:

$$\frac{3+5i}{4+7i}=\frac{(3+5i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)}=\frac{(3+5i)(4-7i)}{65}=\frac{12-21i+20i-35i^2}{65}=\frac{12-i+35}{65}=\frac{47-i}{65}=\frac{47}{65}-\frac{1}{65}i$$

6. Potencia:

$$(1+i)^4=(1+i)^2\cdot(1+i)^2=(1+2i+i^2)\cdot(1+2i+i^2)=(1+2i-1)\cdot(1+2i-1)=2i\cdot 2i=-4$$

7. Producto y suma:

$$(5+12i)\cdot(3-4i)+2-3i=(15-20i+36i-48i^2)+2-3i=15+16i+48+2-3i=65+13i$$

Problema 3.10: Formula de de Moivre

Utilizando la fórmula de de Moivre, realizar las siguientes operaciones. Expresar las respuestas en la forma $a+bi$, donde $a,b\in\mathbb{R}$.

1. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$
2. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4$
3. $(1+i)^{10}$
4. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12}$
5. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5$

Solución:

1.
$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6&=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\&=0-i=-i\end{aligned}$$

2.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4=\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.
$$1+i=\sqrt{1^2+1^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Aplicando la fórmula de de Moivre:

$$(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=1024\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)$$
$$=1024\,(0+i(-1))$$
$$=-1024i$$

4.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12}=\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$
$$=1+0i=1$$

5.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5=\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$
$$=0+i=i$$

Problema 3.11: Raíces complejas

Resolver las ecuaciones:

1. $z^3=1$
2. $z^4=-9$
3. $z^2=2i$

Solución:

1. $z^3=1$

   Solución: Sabemos que las raíces de la ecuación $z^3=1=1\cdot e^{0i}$ son los valores que dan 1 al elevarlas al cubo. Se pueden expresar como:

$$z_k=e^{\left(i\frac{2k\pi}{3}\right)},\quad k=0,1,2$$

Donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Las tres soluciones son:

$$z_0 = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. $z^4 = -9$

   Solución: Primero, escribimos el número -9 en su forma polar. El número -9 tiene módulo 9 y argumento π:

$$-9 = 9e^{i\pi}$$

   Usamos la fórmula de las raíces de un número complejo en forma polar, es decir, para la ecuación $z^4 = 9\text{cis}(\pi)$, las soluciones son:

$$z_k = \sqrt[4]{9}\ e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

   La raíz cuarta de 9 es $\sqrt{3}$, por lo que las soluciones son:

$$z_0 = \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{3}\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{3}\ \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\ e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{3}\ \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{3}\ e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{3}\ \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

3. $z^2 = 2i$

   Solución: Escribimos $2i$ en su forma polar. El número $2i$ tiene módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{2}$:

$$2i = 2\ e^{i\frac{\pi}{2}}$$

   Usamos la fórmula para las raíces cuadradas:

$$z_k = \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0, 1$$

   Las soluciones son:

$$z_0 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - i$$

Problema 3.12: Representación gráfica de números complejos

En la figura 3, se representan 4 números complejos. En azul está el número z. Indicar a qué color corresponden los números $\overline{z}$, $-z$ y $-\overline{z}$.

Solución:
Sea $z = a + ib$. Entonces:

- $\overline{z} = a - ib$ tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria inversa. Es el punto rojo.
- $-z = -a - ib$, se invierten ambas partes real e imaginaria en comparación con z. Es el punto verde.
- $-\overline{z} = -a + ib$ tiene la misma parte imaginaria pero la parte real inversa. Es el punto amarillo.

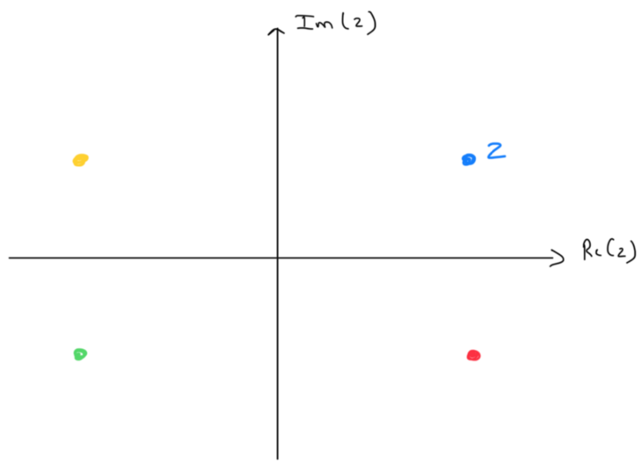

Figura 3: Representación gráfica de un número complejo

Problema 3.13: Operadores Suma y Producto

Calcular

$$\sum_{k=1}^{2} \prod_{p=0}^{4} \frac{(-2)^p}{3-k}$$

Solución:
El producto dentro de la suma se puede escribir como:

$$\prod_{p=0}^{4} \frac{(-2)^p}{3-k} = \frac{1}{3-k} \prod_{p=0}^{4} (-2)^p$$

Calculamos el producto $\prod_{p=0}^{4} (-2)^p$:

$$\prod_{p=0}^{4} (-2)^p = (-2)^0 \cdot (-2)^1 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = 1 \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-8) \cdot 16$$

Entonces, el producto es 1024. Por lo tanto, tenemos:

$$\prod_{p=0}^{4} \frac{(-2)^p}{3-k} = \frac{1024}{3-k}$$

2. Suma sobre k:
Ahora sumamos para $k = 1$ y $k = 2$:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1024}{3-k}$$

Para $k = 1$:

$$\frac{1024}{3-1} = \frac{1024}{2} = 512$$

Para $k = 2$:

$$\frac{1024}{3-2} = \frac{1024}{1} = 1024$$

Por lo tanto, la suma es:

$$512 + 1024 = 1536$$

El resultado es:

$$\sum_{k=1}^{2} \prod_{p=0}^{4} \frac{(-2)^p}{3-k} = 1536$$

4 POLINOMIOS
TEORÍA DE ECUACIONES

Problema 4.1: Suma, resta, producto de polinomios

Realizar las operaciones:

1. Sumar: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ y $Q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 7$.
2. Restar: $P(x) = 3x^2 + 5x - 8$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 4$.
3. Multiplicar: $P(x) = x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = x - 1$.

Solución:

1. **Suma:**
$$P(x) + Q(x) = (2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) + (-x^3 + 4x^2 - 2x + 7)$$
Agrupamos términos semejantes:
$$P(x) + Q(x) = (2x^3 - x^3) + (-5x^2 + 4x^2) + (3x - 2x) + (-1 + 7)$$
$$P(x) + Q(x) = x^3 - x^2 + x + 6$$
2. **Resta:**
$$P(x) - Q(x) = (3x^2 + 5x - 8) - (x^2 - 2x + 4)$$
Cambiamos el signo del segundo polinomio:
$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + 5x - 8 - x^2 + 2x - 4$$
Agrupamos términos semejantes:
$$P(x) - Q(x) = (3x^2 - x^2) + (5x + 2x) + (-8 - 4)$$
$$P(x) - Q(x) = 2x^2 + 7x - 12$$
3. **Multiplicación:**
$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x - 1)$$
Distribuimos cada término de $P(x)$:
$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 \cdot x) + (x^2 \cdot -1) + (2x \cdot x) + (2x \cdot -1) + (-3 \cdot x) + (-3 \cdot -1)$$
$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 3x + 3$$
Agrupamos términos semejantes:
$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

Problema 4.2: División sintética

1. Resolver la siguiente división de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x - 2}$$

2. ¿Qué podemos concluir de este resultado?

Solución:

1. Vamos a realizar la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ usando la división sintética.

   1. Escribimos los coeficientes de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, que son $[1, -4, 5, -2]$. 2. Dividimos entre $Q(x) = x - 2$, por lo que tomamos el valor 2 para la división sintética.

   La división sintética se organiza de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

   El cociente es $x^2 - 2x + 1$, y el residuo es 0.

   Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x - 2} = x^2 - 2x + 1$$

   Resultado final: El cociente de la división es $x^2 - 2x + 1$, sin residuo.

2. El residuo siendo 0, podemos deducir que 2 es raíz del polinomio.

Problema 4.3: División de polinomios

Resolver la siguiente división de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6}{x^2 - 2x + 1}$$

Solución:

Vamos a realizar la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ usando la división larga de polinomios.
1. Dividimos el primer término de $P(x)$ entre el primer término de $Q(x)$: $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$.
2. Multiplicamos $2x^2$ por $Q(x) = x^2 - 2x + 1$:

$$2x^2(x^2 - 2x + 1) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

3. Restamos este resultado de $P(x)$:

$$(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6) - (2x^4 - 4x^3 + 2x^2) = x^3 + 3x^2 - 4x + 6$$

4. Dividimos el primer término del nuevo polinomio x^3 entre el primer término de $Q(x)$: $\frac{x^3}{x^2} = x$.
5. Multiplicamos x por $Q(x)$:

$$x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$$

6. Restamos este resultado del polinomio anterior:

$$(x^3 + 3x^2 - 4x + 6) - (x^3 - 2x^2 + x) = 5x^2 - 5x + 6$$

7. Dividimos el primer término $5x^2$ entre el primer término de $Q(x)$: $\frac{5x^2}{x^2} = 5$.
8. Multiplicamos 5 por $Q(x)$:

$$5(x^2 - 2x + 1) = 5x^2 - 10x + 5$$

9. Restamos este resultado:

$$(5x^2 - 5x + 6) - (5x^2 - 10x + 5) = 5x + 1$$

Ahora tenemos un residuo de $5x + 1$, ya que no se puede dividir más.

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6}{x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + x + 5 + \frac{5x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Resultado final: El cociente de la división es $2x^2 + x + 5$, con residuo $5x + 1$, por lo que podemos escribir la división de la siguiente manera:

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6}{x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + x + 5 + \frac{5x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Problema 4.4: Raíces y puntos críticos

Sean los polinomios

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{6}x^2 - 2x + 6 \\ B(x) &= \frac{x^2}{4} + x + 1 \\ P(x) &= x - 2 \\ Q(x) &= 3 - x \\ S(x) &= x^2 - x - 2 \\ M(x) &= x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ N(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ Z(x) &= -x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

M admite una raíz triple y N admite una raíz doble.

1. Factorizar los polinomios en términos lineales.
2. Encontrar sus límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.
3. Encontrar sus puntos críticos, determinar para cada uno si es un mínimo, un máximo o un punto de inflexión.
4. ¿Qué relación existe entre el orden de una raíz y el comportamiento del polinomio en esta raíz ?
5. Demostrar el punto anterior con un polinomio de grado 4.

Solución:

1.
   - $A(x)$ es un polinomio de grado 2. Aplicando la formula general se obtiene una raíz doble en $x = 6$. Entonces $A(x) = \frac{1}{6}(x - 6)^2$.
   - $B(x)$ es un polinomio de grado 2. Aplicando la formula general se obtiene una raíz doble en $x = -2$.

Entonces $B(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$.

- $P(x)$ ya es factorizado.
- $Q(x)$ ya es factorizado.
- $S(x)$ es un polinomio de grado 2. Aplicando la formula general se obtienen las raíces 2 y -1. Entonces $S(x) = (x-2)(x+1)$.
- $M(x)$ admite una raíz triple, entonces se puede escribir $M(x) = (x-\alpha)^3(x-\beta)$ donde α es la raíz doble y β es la raíz simple. Desarrollando esta expresión y comparando los términos semejantes, se obtiene $M(x) = (x-2)(x+1)^3$.
- $N(x)$ admite una raíz doble, entonces se puede escribir $N(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ donde α es la raíz doble y β es una raíz simple. Desarrollando esta expresión y comparando los términos semejantes, se obtiene $N(x) = (x-2)(x-1)^2$.
- $Z(x)$ es un polinomio de grado 2. Aplicando la formula general se obtienen las raíces 2 y 1. Entonces $Z(x) = (x-2)(x-1)$.

2. - Para el polinomio $A(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + 6$, el término dominante es $\frac{1}{6}x^2$. Como el coeficiente líder es positivo, el límite cuando $x \to \pm\infty$ será:

$$\lim_{x\to\pm\infty} A(x) = +\infty.$$

   - Para el polinomio $B(x) = \frac{x^2}{4} + x + 1$, el término dominante es $\frac{x^2}{4}$, que es de grado 2 y con coeficiente positivo. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty} B(x) = +\infty.$$

   - Para el polinomio $P(x) = x - 2$, que es de grado 1 con coeficiente positivo, tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

   - Para el polinomio $Q(x) = 3 - x$, que también es de grado 1 pero con coeficiente negativo:

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = +\infty.$$

   - Para el polinomio $S(x) = x^2 - x - 2$, el término dominante es x^2, que es de grado 2 y con coeficiente positivo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} S(x) = +\infty.$$

   - Para el polinomio $M(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, el término dominante es x^4, que es de grado 4 y con coeficiente positivo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} M(x) = +\infty.$$

   - Para el polinomio $N(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, el término dominante es x^3, que es de grado 3 y con coeficiente positivo. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} N(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} N(x) = -\infty.$$

   - Para el polinomio $Z(x) = -x^2 + 3x - 2$, el término dominante es $-x^2$, que es de grado 2 y con coeficiente negativo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} Z(x) = -\infty.$$

3. Los puntos críticos se encuentran derivando cada polinomio y luego resolviendo $f'(x) = 0$. Posteriormente, se utiliza la prueba de la segunda derivada para determinar si se trata de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

- **Para $A(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + 6$:**
  Derivada primera:
  $$A'(x) = \frac{1}{3}x - 2$$
  Resolviendo $A'(x) = 0$:
  $$\frac{1}{3}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$
  Derivada segunda:
  $$A''(x) = \frac{1}{3}$$
  Como $A''(x) > 0$, el punto $x = 6$ es un **mínimo**.

- **Para $B(x) = \frac{x^2}{4} + x + 1$:**
  Derivada primera:
  $$B'(x) = \frac{x}{2} + 1$$
  Resolviendo $B'(x) = 0$:
  $$\frac{x}{2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$
  Derivada segunda:
  $$B''(x) = \frac{1}{2}$$
  Como $B''(x) > 0$, el punto $x = -2$ es un **mínimo**.

- **Para $P(x) = x - 2$:**
  Derivada primera:
  $$P'(x) = 1$$
  Como la derivada no se anula, $P(x)$ no tiene puntos críticos.

- **Para $Q(x) = 3 - x$:**
  Derivada primera:
  $$Q'(x) = -1$$
  Como la derivada no se anula, $Q(x)$ no tiene puntos críticos.

- **Para $S(x) = x^2 - x - 2$:**
  Derivada primera:
  $$S'(x) = 2x - 1$$
  Resolviendo $S'(x) = 0$:
  $$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
  Derivada segunda:
  $$S''(x) = 2$$
  Como $S''(x) > 0$, el punto $x = \frac{1}{2}$ es un **mínimo**.

- **Para** $M(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$**:**
  Sabemos que $M(x) = (x-2)(x+1)^3$, entonces $M'(x) = 3(x-2)(x+1)^2 + (x+1)^3 = (x+1)^2(4x-5)$.

  Resolviendo la ecuación $M'(x) = 0$ se obtienen dos puntos críticos en $x = -1$ y en $x = \frac{5}{4}$.

  Calculamos la segunda derivada: $M''(x) = 12x^2 + 6x - 6$. Sustituyendo,
  - $M''(-1) = 0$, se trata de un punto de inflexión.
  - $M''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{81}{4} > 0$, se trata de un mínimo.

- **Para** $N(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$**:**
  Derivada primera:
  $$N'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$
  Resolviendo $N'(x) = 0$:
  $$3x^2 - 8x + 5 = 0$$
  La discriminante es:
  $$\Delta = (-8)^2 - 4(3)(5) = 64 - 60 = 4$$
  Las soluciones son:
  $$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$$
  Entonces:
  $$x = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad x = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$
  Derivada segunda:
  $$N''(x) = 6x - 8$$
  Evaluando en $x = \frac{5}{3}$ y $x = 1$:
  $$N''\left(\frac{5}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{3}\right) - 8 = 10 - 8 = 2 \quad \text{(mínimo)}$$
  $$N''(1) = 6(1) - 8 = -2 \quad \text{(máximo)}$$
  Por lo tanto, $x = \frac{5}{3}$ es un **mínimo** y $x = 1$ es un **máximo**.

- **Para** $Z(x) = -x^2 + 3x - 2$**:**
  Derivada primera:
  $$Z'(x) = -2x + 3$$
  Resolviendo $Z'(x) = 0$:
  $$-2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$
  Derivada segunda:
  $$Z''(x) = -2$$
  Como $Z''(x) < 0$, el punto $x = \frac{3}{2}$ es un **máximo**.

4. Se observa que
   - una raíz simple no corresponde a un punto crítico
   - una raíz doble corresponde a un extremo
   - una raíz triple corresponde a un punto de inflexión

5.
- Sea un polinomio de grado 4 con una raíz doble.
  Se puede escribir como $P(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma$.
  Su derivada es $P'(x) = a(x-\alpha)\left[2(x-\beta)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\gamma)\right]$.Vemos inmediatamente que α sigue siendo raíz de la derivada, así que el polinomio admite un punto crítico en α.
  La segunda derivada da $P''(\alpha) \neq 0$, entonces tenemos un máximo o un mínimo en $x = \alpha$.
- Sea un polinomio de grado 4 con una raíz triple.
  Se puede escribir como $P(x) = a(x-\alpha)^3(x-\beta)$.
  Su derivada es $P'(x) = a(x-\alpha)^2\left[3(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\beta)\right]$.Vemos inmediatamente que α sigue siendo raíz de la derivada, así que el polinomio admite un punto crítico en α.
  La segunda derivada da
  $P''(x) = a(x-\alpha)^2\left[3 + (x-\alpha) + (x-\beta)\right] + 2a(x-\alpha)\left[3(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\beta)\right]$, entonces $P''(\alpha) = 0$ y tenemos un punto de inflexión en $x = \alpha$.

5 ÁLGEBRA LINEAL

Problema 5.1: Espacio vectorial y subespacio vectorial

Sea un campo $\mathbb{F}$ con dos operaciones $+, \cdot$ y un conjunto $\mathbb{V}$ con dos operaciones

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad \text{y} \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

a) Enunciar las propiedades con las cuales tiene que cumplir $\mathbb{V}$ para ser un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
b) Sea un conjunto $W \subseteq \mathbb{V}$. ¿Con qué propiedad tiene que cumplir W para ser un espacio vectorial?
c) ¿Por qué no se tiene que cumplir todas las propiedades enunciadas en el a?

Solución:
a) Para que $\mathbb{V}$ sea un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, debe cumplir las siguientes propiedades:
1. Cerradura bajo la adición: $\forall u, v \in \mathbb{V},\ u + v \in \mathbb{V}$.
2. Cerradura bajo la multiplicación por escalares: $\forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall v \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot v \in \mathbb{V}$.
3. Asociatividad de la adición: $\forall u, v, w \in \mathbb{V},\ (u + v) + w = u + (v + w)$.
4. Conmutatividad de la adición: $\forall u, v \in \mathbb{V},\ u + v = v + u$.
5. Elemento neutro aditivo: $\exists 0 \in \mathbb{V} :\ \forall v \in \mathbb{V},\ v + 0 = v$.
6. Inverso aditivo: $\forall v \in \mathbb{V},\ \exists -v \in \mathbb{V} :\ v + (-v) = 0$.
7. Compatibilidad de la multiplicación por escalares con la multiplicación de $\mathbb{F}$: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall v \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$.
8. Distribución de la multiplicación por escalares respecto a la adición de vectores: $\forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall u, v \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
9. Distribución de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall v \in \mathbb{V},\ (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.
10. Elemento neutro para la multiplicación por escalares: $\exists 1 \in \mathbb{F} :\ \forall v \in \mathbb{V},\ 1 \cdot v = v$.

b) Para que el conjunto W sea un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$, debe cumplir las siguientes propiedades:
1. Cerradura bajo la adición: $\forall u, v \in W,\ u + v \in W$.
2. Cerradura bajo la multiplicación por escalares: $\forall \alpha \in \mathbb{F},\ v \in W,\ \alpha \cdot v \in W$.
3. Contener el elemento neutro aditivo: $0 \in W$.

Estas son las condiciones suficientes para que W sea un espacio vectorial, ya que W hereda las propiedades de cerradura y el elemento neutro de $\mathbb{V}$.

c) No es necesario que W cumpla todas las propiedades enunciadas en el apartado a) porque W es un subconjunto de $\mathbb{V}$ y hereda ciertas propiedades de $\mathbb{V}$. En particular, si W es cerrado bajo la adición y la multiplicación por escalares, y contiene el vector nulo, entonces el inverso aditivo de cualquier elemento de W también pertenecerá a W. Además, como W es un subespacio de $\mathbb{V}$, las demás propiedades de $\mathbb{V}$ ya se cumplen de forma inherente en W, ya que W está contenido dentro de $\mathbb{V}$.

Problema 5.2: Suma y producto inusuales

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen una suma de vectores $\tilde{+}$ diferente de la usual:

$$\begin{aligned} \vec{u} \,\tilde{+}\, \vec{v} &= (u_x, u_y) \,\tilde{+}\, (v_x, v_y) = (u_x + 2v_x, u_y + 3v_y) \\ \lambda\vec{u} &= \lambda(u_x, u_y) = (\lambda u_x, \lambda u_y) \end{aligned}$$

Explique si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ junto con estas operaciones.

Solución:

Tenemos que comprobar que se cumplen las 10 propiedades de los espacios vectoriales. Una en particular no se cumple: la conmutatividad de la suma.
Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Aplicando la suma definida arriba, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \,\tilde{+}\, \vec{v} = (u_x, u_y) \,\tilde{+}\, (v_x, v_y) &= (u_x + 2v_x, u_y + 3v_y) \\ \vec{v} \,\tilde{+}\, \vec{u} = (v_x, v_y) \,\tilde{+}\, (u_x, u_y) &= (v_x + 2u_x, v_y + 3u_y) \end{aligned}$$

Vemos que $\vec{u} \,\tilde{+}\, \vec{v} \neq \vec{v} \,\tilde{+}\, \vec{u}$ en el caso general. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (10,1) \,\tilde{+}\, (4,2) &= (10 + 2\cdot 4, 1 + 3\cdot 2) = (18,7) \\ (4,2) \,\tilde{+}\, (10,1) &= (4 + 2\cdot 10, 2 + 3\cdot 1) = (24,5) \end{aligned}$$

Problema 5.3: Combinación lineal en el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

Mostrar que $A(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ es una combinación lineal de $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ y $S(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, pero que $B(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$ no lo es.

Solución:

- Polinomio $A(x)$

  Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha Q(x) + \beta S(x) = A(x)$. Queremos mostrar que la ecuación tiene al menos una solución. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 2 \\ -2\alpha - 5\beta = -2 \\ -5\alpha - 4\beta = 12 \\ -3\alpha - 9\beta = -6 \end{cases}$$

  Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss-Jordan (no damos aquí el detalle de la reducción):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ -2 & -5 & | & -2 \\ -5 & -4 & | & 12 \\ -3 & -9 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

  El sistema de ecuaciones admite una solución.
  Conclusión: $A(x)$ es combinación lineal de $Q(x)$ y de $S(x)$.

- Polinomio $B(x)$

  Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha Q(x) + \beta S(x) = B(x)$. Queremos mostrar que la ecuación tiene al menos una solución. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 3 \\ -2\alpha - 5\beta = -2 \\ -5\alpha - 4\beta = 7 \\ -3\alpha - 9\beta = 8 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss-Jordan (no damos aquí el detalle de la reducción):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 3 \\ -2 & -5 & | & -2 \\ -5 & -4 & | & 7 \\ -3 & -9 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -9 \\ 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 17 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones no admite solución ($\mathcal{R}g\,(A_{\text{coef}}) \neq \mathcal{R}g\,(A_{\text{aum}})$).
Conclusión: $B(x)$ no es combinación lineal de $Q(x)$ y de $S(x)$.

Problema 5.4: Dependencia e independencia lineal

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

(a) $\{(\sqrt{8}, 6), (\sqrt{2}, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(b) $\{(3, 4, -1), (4, -2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(c) $\{(5, 1, -4, 1), (7, -1, 0, 2), (-2, 5, 1, 9)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, espacio vectorial de las matrices de tamaño 2×2 a coeficientes reales.

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(f) $\{x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 6, -x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x - 3, x^4 + 3x^2 - 3x + 5, 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 1, x^3 - x + 2\}$ en $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, espacio vectorial de los polinomios de grado 4 a coeficientes reales.

Solución:
a) Notamos que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, lo cual nos lleva a escribir $(\sqrt{8}, 6) = (2\sqrt{2}, 2 \cdot 3) = (\sqrt{2}, \cdot 3)$. El primer vector es dos veces el segundo, así que el conjunto no es linealmente independiente.

b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(3, 4, -1) + \beta(4, -2, 0) = (0, 0, 0)$. Queremos saber si los valores α, β que cumplen con esta ecuación son únicos e iguales a 0, lo cual nos indicará que el conjunto es linealmente independiente. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta & = & 0 \\ 43\alpha - 2\beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 0 \end{cases}$$

La última ecuación nos indica que el único valor de α que cumple con el sistema de ecuaciones es $\alpha = 0$. Las dos demás ecuaciones dan ambas $\beta = 0$.
Conclusión: el conjunto es linealmente independiente.

c) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(5, 1, -4, 1) + \beta(7, -1, 0, 2) + \gamma(-2, 5, 1, 9) = (0, 0, 0, 0)$. Queremos saber si los valores α, β, γ que cumplen con esta ecuación son únicos e iguales a 0, lo cual nos indicará que el conjunto es linealmente independiente. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 5\alpha & + & 7\beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & 5\gamma & = & 0 \\ -4\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & + & 9\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se obtiene una solución única $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Conclusión: el conjunto es linealmente independiente.

c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Queremos saber si los valores α, β que cumplen con esta ecuación son únicos e iguales a 0, lo cual nos indicará que el conjunto es linealmente independiente. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha & - & 2\beta & = & 0 \\ -3\alpha & + & 6\beta & = & 0 \\ -2\alpha & + & 4\beta & = & 0 \\ 4\alpha & - & 8\beta & = & 0 \end{cases}$$

Escribiendo la matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones y aplicando el método de Gauss-Jordan, se obtiene la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se obtiene una infinidad de soluciones: $\alpha = 2\beta$.
Conclusión: el conjunto no es linealmente independiente. Nota: podíamos notar que $-2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, lo cual nos indica directamente que el conjunto es linealmente dependiente.

e) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha & & & - & \gamma & + & 2\delta & = & 0 \\ & + & \beta & + & 2\gamma & + & \delta & = & 0 \\ -2\alpha & + & \beta & + & \gamma & - & 4\delta & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & + & 4\delta & = & 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se obtiene una solución única $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
Conclusión: el conjunto es linealmente independiente.

f) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\left(x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 6\right) + \beta\left(-x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x - 3\right) + \gamma\left(x^4 + 3x^2 - 3x + 5\right) + \delta\left(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 1\right) + \epsilon\left(x^3 - x + 2\right) = 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha & - & \beta & + & \gamma & + & 2\delta & & & = 0 \\ -\alpha & + & \beta & & & + & 3\delta & + & \epsilon & = 0 \\ 5\alpha & - & 5\beta & + & 3\gamma & + & 4\delta & & & = 0 \\ -8\alpha & + & 5\beta & - & 3\gamma & - & \delta & - & \epsilon & = 0 \\ 6\alpha & - & 3\beta & + & 5\gamma & + & \delta & + & 2\epsilon & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se obtiene una solución única $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 0$.
Conclusión: el conjunto es linealmente independiente.

Problema 5.5: Conjunto generador

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Suponga que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera a $\mathbb{V}$. Pruebe que el conjunto $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4\}$ también genera a $\mathbb{V}$.

Solución:
Sabemos que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera a $\mathbb{V}$, así que para cualquier vector $u \in \mathbb{V}$, existen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{4} a_k v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

Queremos comprobar que para cualquier vector $u \in \mathbb{V}$, existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} u &= \alpha(v_1 - v_2) + \beta(v_2 - v_3) + \gamma(v_3 - v_4) + \delta v_4 \\ &= \alpha v_1 + (-\alpha + \beta) v_2 + (-\beta + \gamma) v_3 + (-\gamma + \delta) v_4 \end{aligned}$$

Por identificación, podemos tomar

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \\ a_2 &= -\alpha + \beta \\ a_2 &= -\beta + \gamma \\ a_4 &= -\gamma + \delta \end{aligned}$$

lo cual nos da:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \\ \beta &= a_1 + a_2 \\ \gamma &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \delta &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

Hemos mostrado que existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4\}$ genera a $\mathbb{V}$.

Problema 5.6: Una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Mostar que el conjunto $\mathcal{B}$ a continuación es una base de $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución:
Tenemos que mostrar que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y genera a $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- $\text{gen}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
  Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. La escribiremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
  Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
  Queremos comprobar que la ecuación tiene solución para cualquier valor de $a, b, c, \delta \in \mathbb{R}$, es decir para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & + & \gamma & & & = & a \\ \alpha & + & \beta & + & & & \delta & = & b \\ \alpha & & & + & \gamma & + & \delta & = & c \\ & & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & d \end{cases}$$

Usando el método de Gauss-Jordan se obtiene (no damos aquí el detalle de la reducción):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{a+b+c-2*d}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{a+b-2*c+d}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{a-2*b+c+d}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2*a+b+c+d}{3} \end{pmatrix}$$

Observamos que para cualquier valor de $a, b, c, \delta \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones admite una solución. Notamos, aunque aquí no sea necesario, que la solución es única.
Conclusión: $\text{gen}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

- El conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.
  Tenemos que mostrar que la única combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ que da el vector 0 corresponde a coeficientes todos iguales a 0. Como ya mostramos en el inciso anterior que cualquier vector de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se descompone de manera única en una combinación lineal en vectores de $\mathcal{B}$, así que será el caso también del vector 0.
  Conclusión: El conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Demostramos que ambas propiedades se cumplen: $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.