Guía de estudio para Examen Extraordinario

Cálculo I (clave: 1111)

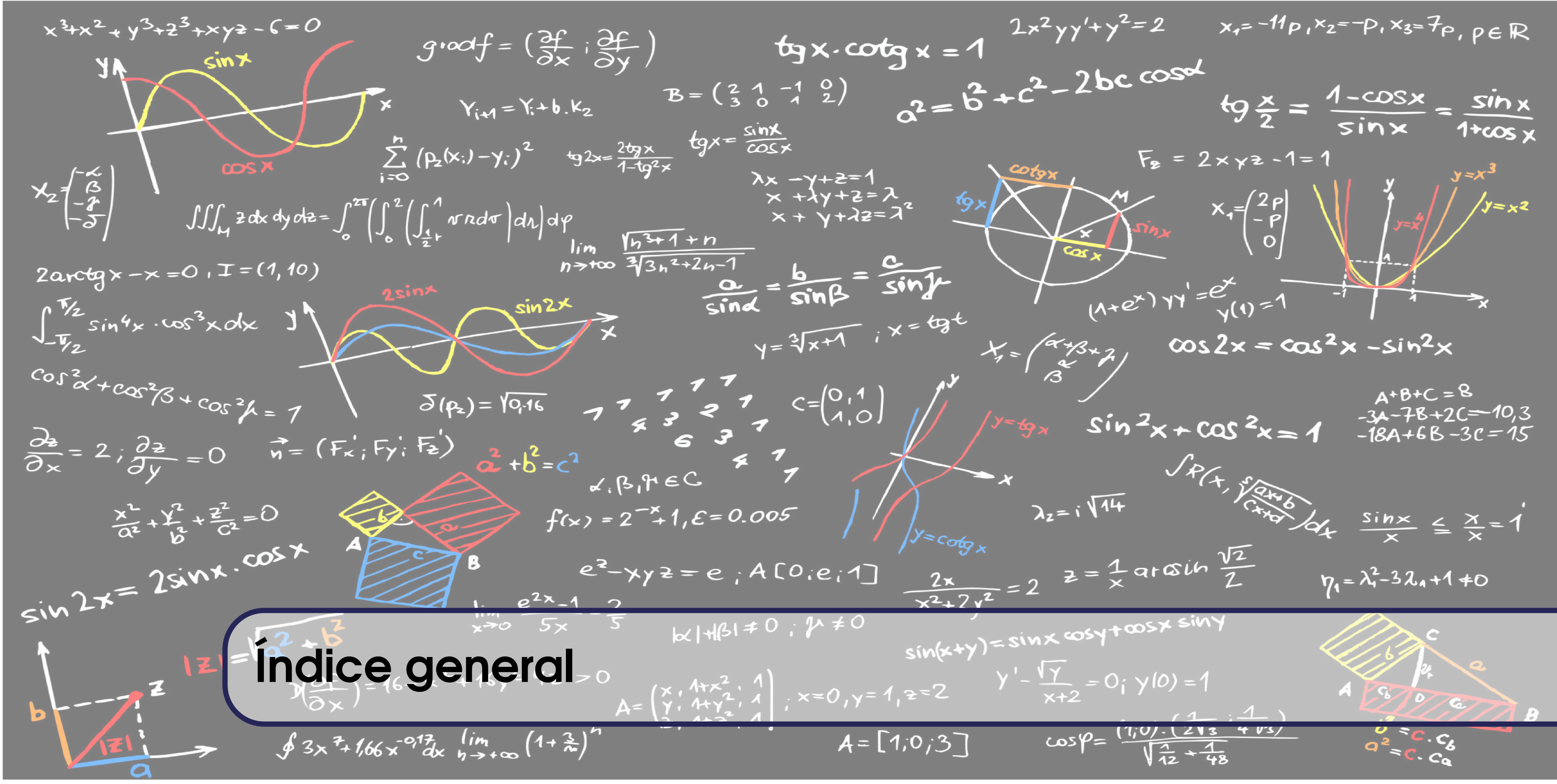
Departamento de Matemáticas, FQ-UNAM.

2024 Facultad de Química, UNAM

HTTP://AMYD.QUIMICA.UNAM.MX

Al estudiante:
En esta guía para el examen extraordinario de la asignatura de Cálculo I (clave: 1111) encontrarás ejercicios resueltos que corresponden a los contenidos temáticos del programa de estudio vigente. Se muestran ejemplos de aplicación de conceptos en la resolución de problemas e ilustra cómo se resuelven ejercicios característicos de la asignatura.
Esta guía no pretende sustituir los cursos a los que puedes asistir ni mucho menos la bibliografía referida en el programa de la asignatura; aquí no se profundiza en los conceptos, modelos o teorías que debes conocer y entender para la resolución de cada problema.

Última versión, Noviembre 2024



Índice general

1. El campo de los números reales.

Ejercicio 1.1 Justifique el siguiente paso indicando la propiedad de los números reales que lo avale. ■

Solución 1.1

1)	$2x + 5 = 11$	
	$2x + 5 + (-5) = 11 + (-5)$	Propiedad del inverso aditivo
2)	$3u \geq 8$	
	$\dfrac{1}{3}(3u) \geq \dfrac{1}{3} \cdot 8$	Propiedad del inverso multiplicativo
3)	$\dfrac{h}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}} \cdot \dfrac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$	Propiedad del neutro multiplicativo
4)	$2\beta(\beta^2 - 1) = 2\beta^3 - 2\beta$	Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

Ejercicio 1.2 Resolver la desigualdad $3x - 5 > 0$ y expresar la solución en la notación de intervalos. ■

Solución 1.2 Empleando las propiedades algebraicas y de orden de los números reales:

$$
\begin{aligned}
& 3x - 5 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x > 5 \\
\Leftrightarrow\ & x > \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

es importante notar que en el último paso se mantiene la desigualdad puesto que estamos dividiendo (o multiplicando por el inverso multiplicativo) por un número positivo, por lo que el conjunto solución es el intervalo:

$$S = \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$$

Ejercicio 1.3 Resolver la desigualdad $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5} \leq 0$ y expresar la solución en la notación de intervalos. ■

Solución 1.3 Empleando las propiedades algebraicas y de orden de los números reales:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}x + \frac{1}{5} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{4}x \leq -\frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow\ & x \leq -\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x \leq -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

es importante notar que en el último paso se mantiene la desigualdad puesto que estamos dividiendo (o multiplicando por el inverso multiplicativo) por un número positivo, por lo que el conjunto solución es el intervalo:

$$S = \left(-\infty, -\frac{4}{15}\right]$$

Ejercicio 1.4 Hallar las $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ ■

Solución 1.4 Determinando las raíces por división sintética, se tiene que las posibles raíces reales son: $\pm 1, \pm 2$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & \\ & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & & \\ & -2 & -2 & & \\ \hline & 0 & & & \end{array}$$

Raíces del polinomio $x^3 - 3x + 2:\ x = -2, x = 1$(raiz repetida)
Factores del polinomio $x^3 - 3x + 2:\ (x-1)^2(x+2)$
La desigualdad original quedaría representada por

$$(x-1)^2(x+2) \geq 0$$

Resolviendo por casos, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} (x-1)^2 \geq 0 & \wedge & x + 2 \geq 0 \\ x \in (-\infty, \infty) & \wedge & x \geq -2 \\ (-\infty, \infty) & \cap & [-2, \infty] \\ & x \in [-2, \infty) & \end{array}$$

Entonces, la solución a $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ es el intervalo $[-2, \infty)$

Ejercicio 1.5 Resolver la desigualdad $\left|\dfrac{1}{x}+3\right|<4$ ■

Solución 1.5 Si x es una expresión algebraica y $a>0$, entonces $|x|<a$ es equivalente a que $-a<x<a$. Entonces

$$\begin{aligned} -4<\frac{1}{x}+3 \quad &\wedge \quad \frac{1}{x}+3<4 \\ \frac{1}{x}+7>0 \quad &\wedge \quad \frac{1}{x}-1<0 \\ \frac{1+7x}{x}>0 \quad &\wedge \quad \frac{1-x}{x}<0 \end{aligned}$$

Resolviendo por casos las desigualdades obtenidas, tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc} & \textbf{Caso 1} & & & & \textbf{Caso 2} & & & & & \textbf{Caso 1} & & & & \textbf{Caso 2} & & \\ 1+7x>0 & \wedge & x>0 & \vee & 1+7x<0 & \wedge & x<0 & & 1-x>0 & \wedge & x<0 & \vee & 1-x<0 & \wedge & x>0 \\ x>-\frac{1}{7} & \wedge & x>0 & \vee & x<-\frac{1}{7} & \wedge & x<0 & & x<1 & \wedge & x<0 & \vee & x>1 & \wedge & x>0 \\ \left(-\frac{1}{7},\infty\right) & \cap & (0,\infty) & \cup & \left(-\infty,-\frac{1}{7}\right) & \cap & (-\infty,0) & & (-\infty,1) & \cap & (-\infty,0) & \cup & (1,\infty) & \cap & (0,\infty) \end{array}$$

$$\left[(0,\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{7}\right)\right] \qquad\qquad [(-\infty,0)\cup(1,\infty)]$$

Entonces, la solución de la desigualdad $|\frac{1}{x}+3|<4$ está dada por

$$\left[(0,\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{7}\right)\right]\cap[(-\infty,0)\cup(1,\infty)]=\left(-\infty,-\frac{1}{7}\right)\cup(1,\infty)$$

Ejercicio 1.6 Resolver la desigualdad $\left|\frac{2}{5}-\frac{4}{3}x\right|\leq 4$ y expresar la solución en la notación de intervalos. ■

Solución 1.6 Empleando las propiedades algebraicas y de orden de los números reales:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2}{5}-\frac{4}{3}x\right|\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & -4\leq\frac{2}{5}-\frac{4}{3}x\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & -4-\frac{2}{5}\leq-\frac{4}{3}x\leq 4-\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{22}{5}\leq-\frac{4}{3}x\leq\frac{18}{5} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{22}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)\geq x\geq\frac{18}{5}\left(-\frac{3}{4}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{66}{20}\geq x\geq\frac{54}{20} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{33}{10}\geq x\geq\frac{27}{10} \end{aligned}$$

es importante notar: se ha hecho uso de las propiedades de valor absoluto y que en un paso se invierten las desigualdades debido a que estamos dividiendo (o multiplicando por el inverso multiplicativo) por un número negativo; por lo que el conjunto solución es el intervalo:

$$S=\left[\frac{27}{10},\frac{33}{10}\right]$$

Ejercicio 1.7 Resolver la desigualdad $\left|5x+1\right| \geq 3$ y expresar la solución en la notación de intervalos. ■

Solución 1.7 Empleando las propiedades algebraicas y de orden de los números reales:

$$\begin{aligned}
& \left|5x+1\right| \geq 3 \\
\Leftrightarrow\ & 5x+1 \geq 3 \text{ ó } 5x+1 \leq -3 \\
\Leftrightarrow\ & 5x \geq 3-1 \text{ ó } 5x \leq -3-1 \\
\Leftrightarrow\ & 5x \geq 2 \text{ ó } 5x \leq -4 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq \frac{2}{5} \text{ ó } x \leq -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

es importante notar: se ha hecho uso de las propiedades de valor absoluto y que no se invierten las desigualdades debido a que estamos dividiendo (o multiplicando por el inverso multiplicativo) por un número positivo; por lo que el conjunto solución es el intervalo:

$$S = \Big(-\infty, -\frac{4}{5}\Big] \cup \Big(\frac{2}{5}, \infty\Big)$$

Ejercicio 1.8 Resolver la desigualdad $(x-2)(x+3)(x-1) \geq 0$ y expresar la solución en la notación de intervalos. ■

Solución 1.8 Empleando las propiedades algebraicas y de orden de los números reales, notamos que podemos tener 4 opciones para que las tres cantidades al multiplicarse nos den como resultado un número mayor o igual a cero:

1. $(x-2) \geq 0$ y $(x+3) \geq 0$ y $(x-1) \geq 0$, o bien
2. $(x-2) \geq 0$ y $(x+3) \leq 0$ y $(x-1) \leq 0$, o bien
3. $(x-2) \leq 0$ y $(x+3) \geq 0$ y $(x-1) \leq 0$, o bien
4. $(x-2) \leq 0$ y $(x+3) \leq 0$ y $(x-1) \geq 0$

Para el inciso 1. tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (x-2) \geq 0 \text{ y } (x+3) \geq 0 \text{ y } (x-1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq 2 \text{ y } x \geq -3 \text{ y } x \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \in [2,\infty) \cap [-3,\infty) \cap [1,\infty) \\
\Leftrightarrow\ & x \in [2,\infty)
\end{aligned}$$

Para el inciso 2. tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (x-2) \geq 0 \text{ y } (x+3) \leq 0 \text{ y } (x-1) \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq 2 \text{ y } x \leq -3 \text{ y } x \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \in [2,\infty) \cap (-\infty,-3] \cap (-\infty,1] \\
\Leftrightarrow\ & x \in \emptyset
\end{aligned}$$

Para el inciso 3. tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (x-2) \leq 0 \text{ y } (x+3) \geq 0 \text{ y } (x-1) \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \leq 2 \text{ y } x \geq -3 \text{ y } x \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \in (-\infty,2] \cap [-3,\infty) \cap (-\infty,1] \\
\Leftrightarrow\ & x \in [-3,1]
\end{aligned}$$

Para el inciso 4. tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (x-2) \leq 0 \text{ y } (x+3) \leq 0 \text{ y } (x-1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \leq 2 \text{ y } x \leq -3 \text{ y } x \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \in (-\infty, 2] \cap (-\infty, -3] \cap [1, \infty) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \emptyset
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución se expresa de la forma:

$$S = [-3, 1] \cup [2, \infty)$$

2. Funciones.

Ejercicio 2.1 Obtén el dominio de las siguientes funciones:

1. $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-3}$
3. $r(t) = \dfrac{t-1}{t^2-1}$
4. $h(\theta) = \sqrt{\theta+3} - \sqrt{2-\theta}$
5. $g(x) = \sqrt{1-x}\ln(9-x^2)$
6. $\theta(t) = \sqrt{t^2-4}\sin(2t+1)$

■

Solución 2.1 En cada caso debemos tomar en cuenta el álgebra de funciones.
Para el inciso 1. consideramos que se trata de un polinomio de grado 2, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$D_P = \{x \in \mathbb{R} | 3x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

Para el inciso 2. consideramos que se trata de un cociente de polinomios, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{x^2+4}{x-3} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x - 3 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{3\} \\ &= (-\infty, 3) \cup (3, \infty) \end{aligned}$$

Para el inciso 3. consideramos que se trata de un cociente de polinomios, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$\begin{aligned} D_r &= \left\{ t \in \mathbb{R} \middle| \frac{t-1}{t^2-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} | t^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{1, \, -1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

Para el inciso 4. consideramos que se trata de una adición (específicamente una resta) de funciones, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{ \theta \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{\theta + 3} - \sqrt{2 - \theta} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} | \sqrt{\theta + 3} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2 - \theta} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} | \theta + 3 \geq 0 \wedge 2 - \theta \geq 0\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} | \theta \geq -3 \wedge \theta \leq 2\} \\ &= [-3, \infty) \cap (-\infty, 2] \\ &= [-3, 2] \end{aligned}$$

Para el inciso 5. consideramos que se trata de un producto de funciones, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{1 - x} \ln(9 - x^2) \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{1 - x} \in \mathbb{R} \wedge \ln(9 - x^2) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \geq 0 \wedge 9 - x^2 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1 \wedge -3 < x < 3\} \\ &= (-\infty, 1) \cap [-3, 3] \\ &= [-3, 1) \end{aligned}$$

en donde hemos considerado que el dominio de las funciones logarítmicas son los números reales positivos y la resolución de la desigualdad $9 - x^2 > 0$. Si aún presentas dificultad para resolver esta desigualdad revisa el ejercicio 5 de la unidad anterior.

Para el inciso 6. consideramos que se trata de un producto de funciones, por lo que su dominio está dado por el conjunto:

$$\begin{aligned} D_\theta &= \left\{ t \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{t^2 - 4} \sin(2t + 1) \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} | \sqrt{t^2 - 4} \in \mathbb{R} \wedge \sin(2t + 1) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | t^2 - 4 \geq 0 \wedge 2t + 1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | (t < -2 \vee t > 2) \wedge t \in \mathbb{R}\} \\ &= \Big((-\infty, -2] \vee [2, \infty) \Big) \cap [-\infty, \infty] \\ &= (-\infty, -2] \vee [2, \infty) \end{aligned}$$

en donde hemos considerado la resolución de la desigualdad $t^2 - 4 > 0$ y que el cominio de la función trionométrica $\sin x$ es $\mathbb{R}$. Si aún presentas dificultad para resolver esta desigualdad revisa el ejercicio 5 de la unidad anterior.

Ejercicio 2.2 Si $f(x) = 16x^2$, $g(x) = 9$ y $h(x) = 4x + 3$

1. Encuentra una fórmula para $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)}$
2. Defina el dominio y rango $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)}$
3. Trace la gráfica de $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)}$

■

Solución 2.2 Procedemos como:

1. $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)} = \dfrac{16x^2 - 9}{4x + 3} = \dfrac{(4x - 3)(4x + 3)}{4x + 3} = 4x - 3$
2. $D_{\frac{f-g}{h}} = x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\}$
3. Rango: $y \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$

Ejercicio 2.3 Dadas las funciones $f(y) = \sqrt{16 - y}$, $g(t) = \ln(2t - 1)$ y $h(u) = \dfrac{1}{u^2 - 2}$, obtener la regla de correspondencia y el dominio de las siguientes funciones:

1. $(g \circ f)(x)$
2. $(h \circ g)(x)$
3. $(f \circ h)(x)$

■

Solución 2.3 En la resolución de los problemas hacemos uso de la operación de composición entre dos funciones.
Para el inciso 1. la regla de correspondecia la calculamos como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{16 - x}) = \ln(2(16 - x) - 1) = \ln(31 - 2x)$$

por lo que el dominio está dado por:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | \ln(31 - 2x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} | 31 - 2x > 0\} = \Big(-\infty, \frac{31}{2} \Big)$$

Para el inciso 2. la regla de correspondecia la calculamos como:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\ln(2x - 1)) = \frac{1}{(\ln(2x - 1))^2 - 2}$$

por lo que el dominio está dado por:

$$\begin{aligned}
D_{h \circ g} &= \Big\{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{(\ln(2x - 1))^2 - 2} \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} | (\ln(2x - 1))^2 - 2 \neq 0 \wedge (2x - 1) > 0\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{R} | \Big(x \neq \frac{e^{\sqrt{2}} + 1}{2} \wedge x \neq \frac{e^{-\sqrt{2}} + 1}{2}\Big) \wedge x > \frac{1}{2}\Big\} \\
&= \Big(\frac{1}{2}, \frac{e^{-\sqrt{2}} + 1}{2}\Big) \cup \Big(\frac{e^{-\sqrt{2}} + 1}{2}, \frac{e^{\sqrt{2}} + 1}{2}\Big) \cup \Big(\frac{e^{\sqrt{2}} + 1}{2}, \infty\Big)
\end{aligned}$$

Para el inciso 3. la regla de correspondecia la calculamos como:

$$
\begin{aligned}
(f\circ h)(x) = f(h(x)) &= f\Big(\frac{1}{x^2-2}\Big)\\
&= \sqrt{16-\frac{1}{x^2-2}}\\
&= \sqrt{\frac{16x^2-33}{x^2-2}}\\
&= 4\sqrt{\frac{\Big(x-\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)\Big(x+\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}}
\end{aligned}
$$

por lo que el dominio está dado por:

$$
\begin{aligned}
D_{f\circ h} &= \Big\{x\in\mathbb{R}|4\sqrt{\frac{\Big(x-\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)\Big(x+\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}}\in\mathbb{R}\Big\}\\
&= \Big\{x\in\mathbb{R}\Big|\frac{\Big(x-\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)\Big(x+\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geq 0\Big\}\\
&= \Big\{x\in\mathbb{R}|x\leq -\frac{\sqrt{33}}{4}\vee -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\vee x\geq\frac{\sqrt{33}}{4}\}\\
&= \Big(-\infty,-\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\cup\Big(\frac{\sqrt{33}}{4},\infty\Big)
\end{aligned}
$$

pon mucha atención a la resolución de la desigualdad $\dfrac{\Big(x-\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)\Big(x+\frac{\sqrt{33}}{4}\Big)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geq 0.$

Ejercicio 2.4 Dadas las funciones $f(y)=\sin(3y-2)$, $g(t)=2t^2+1$ y $h(u)=\dfrac{u}{u^3+1}$, obtener la regla de correspondencia de la función $(h\circ g\circ f)(x)$. ■

Solución 2.4 Para resolver el problema hacemos uso de la operación de composición de funciones:

$$
\begin{aligned}
(h\circ g\circ f)(x) &= h(g(f(x)))\\
&= h(g(\sin(3x-2)))\\
&= h(2(\sin(3x-2))^2+1) = h(2\sin^2(3x-2)+1)\\
&= \frac{2\sin^2(3x-2)+1}{(2\sin^2(3x-2))+1)^3+1}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.5 Calcular el dominio de la composición $(f\circ g)(x)$ a partir de $f(x)=\ln\sqrt{x}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ■

Solución 2.5 Notemos que

$$(f\circ g)(x) = \ln\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Entonces buscamos $\dfrac{x}{x-1} > 0$

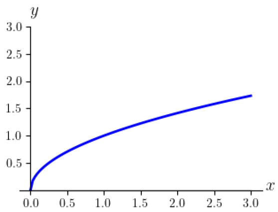
$$
\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{3}{c}{\textbf{Caso 1}} & & \multicolumn{3}{c}{\textbf{Caso 2}} \\
x > 0 & \wedge & x-1>0 & \cup & x<0 & \wedge & x-1<0 \\
(0,\infty) & \wedge & x>1 & \cup & (-\infty,0) & \wedge & x<1 \\
(0,\infty) & \cap & (1,\infty) & \cup & (-\infty,0) & \cap & (-\infty,1) \\
 & (1,\infty) & & \cup & & (-\infty,0) &
\end{array}
$$

El dominio de $(f \circ g)(x)$ está dado por $(1,\infty) \cup (-\infty,0)$

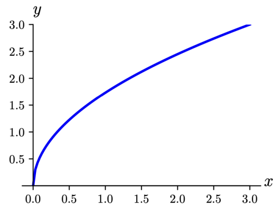
Ejercicio 2.6 Con base en la función $f(x) = \sqrt{x}$, obtén la gráfica de la función $g(x) = 1 - 2\sqrt{3x+1}$ indicando las traslaciones, estiramientos y reflexiones. ■

Solución 2.6 Comenzando con la gráfca de la función f obtenemos la gráfica de g:

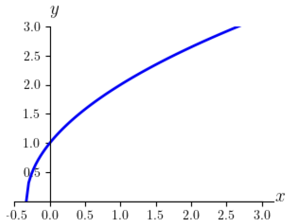
1. A partir de la gráfica de $f_1(x) = \sqrt{x}$



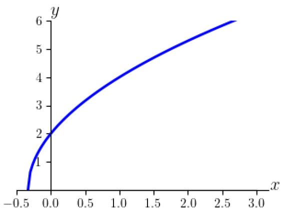
2. Obtenemos $f_2(x) = \sqrt{3x}$ encogimiento en el eje x



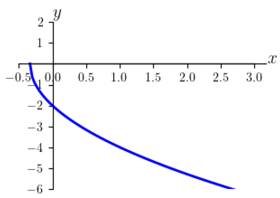
3. Obtenemos $f_3(x) = \sqrt{3x+1}$ traslación en el eje x



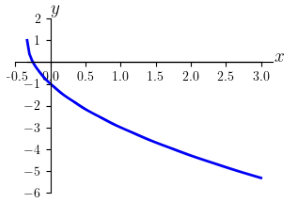
4.Obtenemos $f_4(x) = 2\sqrt{3x+1}$ estiramiento en el eje y



5. Obtenemos $f_5(x) = -2\sqrt{3x+1}$ reflexión en el eje y



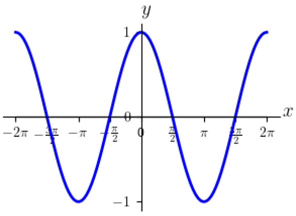
6. Obtenemos $f_6(x) = 1 - 2\sqrt{3x+1}$ traslación en el eje y



Ejercicio 2.7 Con base en la función $f(x) = \cos x$, obtén la gráfica de la función $g(x) = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ indicando las traslaciones, estiramientos y reflexiones. ■

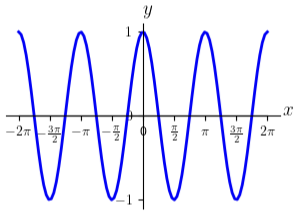
Solución 2.7 Comenzando con la gráfca de la función f obtenemos la gráfica de g:

1. A partir de la gráfica de $f_1(x) = \cos x$



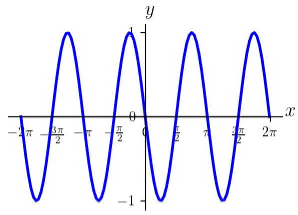
2. Obtenemos $f_2(x) = \cos(2x)$

encogimiento en el eje x



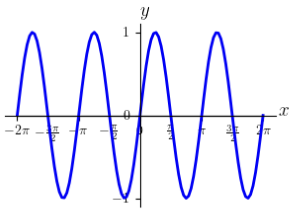
3. Obtenemos $f_3(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

traslación en el eje x



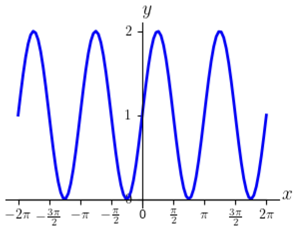
4.Obtenemos $f_4(x) = -\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

reflexión en el eje y



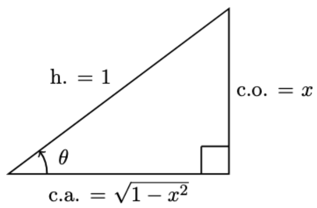
5. Obtenemos $f_5(x) = 1 - \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

traslación en el eje y



Ejercicio 2.8 Simplifica la expresión $\cos(\arcsin x)$. ■

Solución 2.8 Sea θ un arco (ó ángulo) tal que $\sin theta = x$, esto quiere decir que $\theta = \arcsin x$, sin pérdida de generalidad podemos plantear el siguiente triángulo rectángulo para el cual se cumple que $\sin\theta = x$:

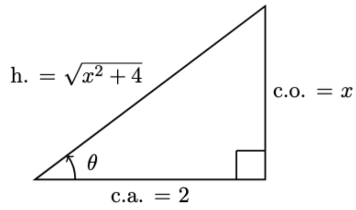


por lo que

$$\cos(\arcsin x) = \cos(\theta) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

Ejercicio 2.9 Simplifica la expresión $\cos\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)$. ■

Solución 2.9 Sea θ un arco (ó ángulo) tal que $\tan\theta = \dfrac{x}{2}$, esto quiere decir que $\theta = \arctan\dfrac{x}{2}$, sin pérdida de generalidad podemos plantear el siguiente triángulo rectángulo para el cual se cumple que $\tan\theta = \frac{x}{2}$:

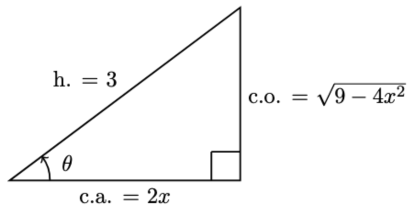


por lo que

$$\cos\left(\arctan\frac{x}{2}\right) = \cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}$$

Ejercicio 2.10 Simplifica la expresión $\tan\left(\arccos\frac{2x}{3}\right)$. ■

Solución 2.10 Sea θ un arco (ó ángulo) tal que $\cos\theta = \frac{2x}{3}$, esto quiere decir que $\theta = \arccos\frac{2x}{3}$, sin pérdida de generalidad podemos plantear el siguiente triángulo rectángulo para el cual se cumple que $\cos\theta = \frac{2x}{3}$:



por lo que

$$\tan\left(\arccos\frac{2x}{3}\right) = \tan(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{x^2}{4}}}{x}$$

Ejercicio 2.11 Una caja de caras laterales rectangulares con base y tapa cuadradas tiene un área total de 1500cm^2. Expresar el volumen de la caja como función de uno de los lados de la base. ■

Solución 2.11 Sea h la altura de las caras rectangulares y l el lado de la base cuadrada. El volúmen de la caja depende tanto de l como de h y está dado por

$$V = hl^2$$

Por otro lado, el área total de las caras de la caja está dada por:

$$A = l^2 + l^2 + 4lh = 2l^2 + 4lh = 1500$$

$$\Leftrightarrow \quad l^2 + 2lh = 750$$

por los que, podemos expresar h como función de l,

$$h = \frac{750 - l^2}{2l}$$

entonces, el volúmen puede expresarse únicamente como función de l:

$$V = h\left(\frac{750 - l^2}{2l}\right)^2$$

Ejercicio 2.12 Si $f(x) = \ln(2x + 7)$, obtén la función inversa.

Solución 2.12 Sea $y = \ln(2x + 7)$, entonces

$$\begin{aligned} e^y &= 2x + 7 \\ e^y - 7 &= 2x \\ \frac{e^y - 7}{2} &= x \end{aligned}$$

por lo que $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 7}{2}$

Ejercicio 2.13 Si $h(x) = \cos(5^{(x^2-3)} + 1)$, obtén la función inversa.

Solución 2.13 Sea $y = \cos(5^{(x^2-3)} + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \arccos y &= 5^{(x^2-3)} + 1 \\ \arccos y - 1 &= 5^{(x^2-3)} \\ \log_5(\arccos y - 1) &= x^2 - 3 \\ \log_5(\arccos y - 1) + 3 &= x^2 \\ \sqrt{\log_5(\arccos y - 1) + 3} &= x \end{aligned}$$

por lo que $h^{-1}(x) = \sqrt{\log_5(\arccos x - 1) + 3}$

Ejercicio 2.14 Determinar $f^{-1}(x)$ para la función $f(x) = e^{2x-5} - 1$

Solución 2.14 Despejamos la variable x

$$\begin{aligned} y &= e^{2x-5} - 1 \\ y + 1 &= e^{2x-5} \\ \ln(y + 1) &= 2x - 5 \\ x &= \frac{\ln(y + 1) + 5}{2} \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)+5}{2}$

Ejercicio 2.15 Determina la paridad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x \sin x$
2. $f(x) = x^2 \tan 3x$
3. $f(x) = x^3 + 2x - 1$
4. $f(x) = \dfrac{\cos x + x^2}{x^3}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x}{\sin 2x}$

Solución 2.15 Revisaremos qué ocurre con las funciones cuando cambiamos el argumento de cada una de las funciones por $-x$:

Para el 1.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\sin(-x) \\ &= (-x)(-\sin x) \\ &= x\sin x \end{aligned}$$

por lo que la función es par.

Para el 2.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2\tan(3(-x)) \\ &= x^2\frac{sin(3(-x))}{\cos(-3(x))} \\ &= x^2\frac{\sin(-3x)}{\cos(-3x)} \\ &= x^2\Big(\frac{-\sin(3x)}{\cos(3x)}\Big) \\ &= -x^2\tan(3x) \end{aligned}$$

por lo que la función es impar.

Para el 3.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + 2(-x) - 1 \\ &= -x^3 - 2x - 1 \end{aligned}$$

por lo que la función es no es par ni impar.

Para el 4.

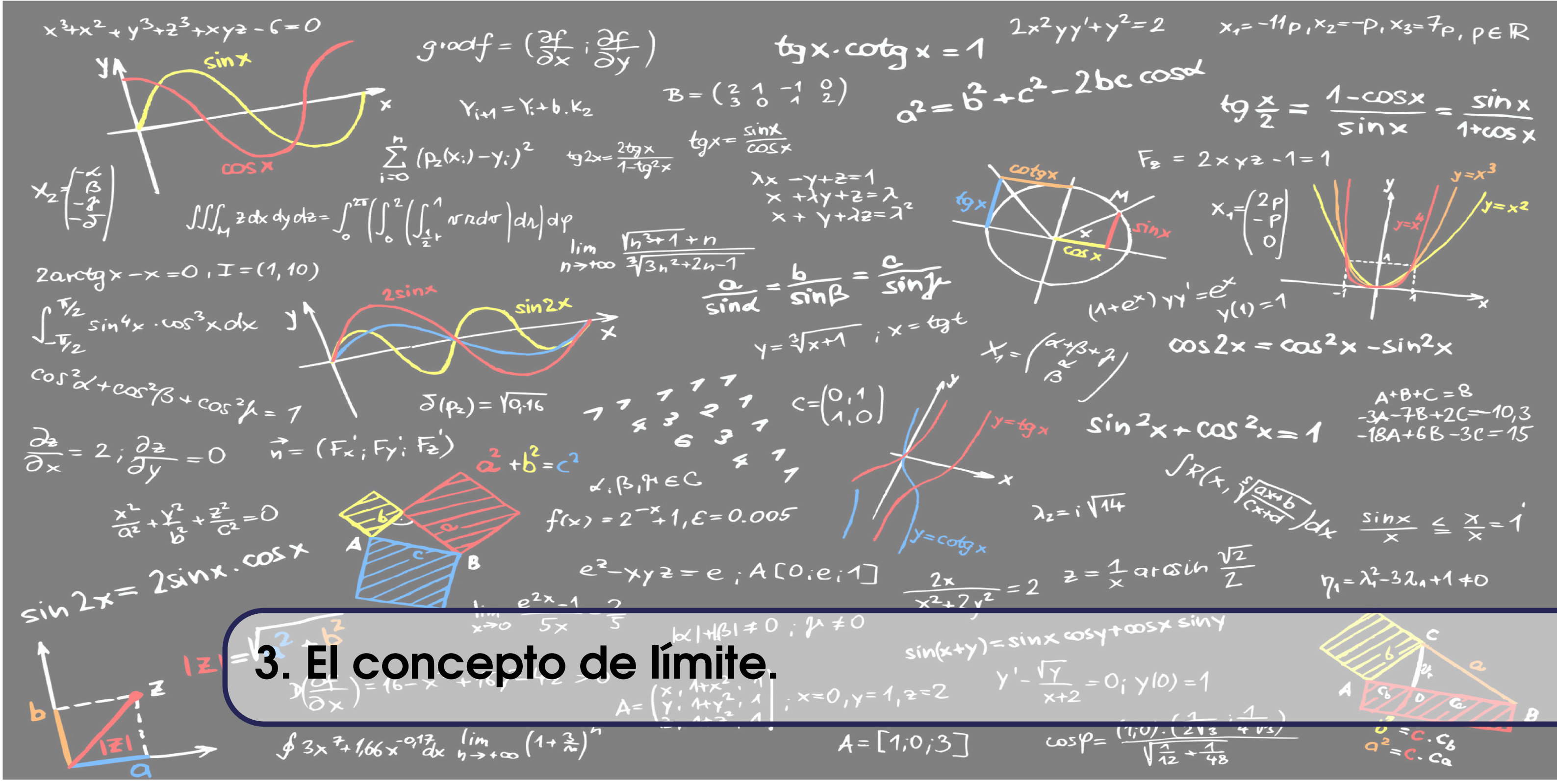
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\cos(-x) + (-x)^2}{(-x)^3} \\ &= \frac{\cos x + x^2}{-x^3} \\ &= -\frac{\cos x + x^2}{x^3} \end{aligned}$$

por lo que la función es impar.

Para el 5.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3 + 4(-x)}{\sin(2(-x))} \\ &= \frac{-x^3 - 4x}{-\sin 2x} \\ &= \frac{-(x^3 + 4x)}{-\sin 2x} \\ &= \frac{x^3 + 4x}{\sin 2x} \end{aligned}$$

por lo que la función es par.



3. El concepto de límite.

Ejercicio 3.1 Sea $f(x)$ una función con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1\,, & -1 \leq x < 0 \\ 3x\,, & 0 < x < 1 \\ 2\,, & x = 1 \\ 2 - x\,, & 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 4\,, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

1. Calcular $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
2. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
4. Calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
5. Calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

■

Solución 3.1 Vamos a calcular los límites laterales para determinar si existen los límites indicados:
Para el 1.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} x^3 - 1 = (-1)^3 - 1 = -2$$

Por lo que el límite existe y es igual a -2.

Para el 2. evaluamos límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} [x^3 - 1] = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 3x = 0$$

Los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Para el 3. evaluamos límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x = 3$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} [2-x] = 1$$

Los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Para el 4. evaluamos límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} [2-x] = 0$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} [x^2-4] = 0$$

Los límites laterales son iguales, el límite existe y es igual a 2.

Para el 5.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 2} [x^2-4] = 5$$

Ejercicio 3.2 Calcule $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{|x+1|}$ ■

Solución 3.2 De la definición de valor absoluto deducimos que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1>0 \\ -(x+1) & \text{si } x+1<0 \end{cases}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} (1-x) = 2$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} (x-1) = -2$$

Como tenemos que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{|x+1|} \neq \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{|x+1|} \implies \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{|x+1|} \text{ no existe}$$

Ejercicio 3.3 Calcula $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ para

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x<0 \\ \cos(x-2) & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

■

Solución 3.3 Calculamos cada límite lateral de la siguiente forma

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = \sqrt{\lim_{x\to 0^-} (-x)} = \sqrt{(-0)} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(x) - 2 = \cos(0) - 2 = 1-2 = -1$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$

Ejercicio 3.4 Sean tres funciones f, g y h tales que:

$$\lim_{t\to -3} f(x) = 3,\ \lim_{t\to -3} g(x) = -1 \text{ y } \lim_{t\to -3} h(x) = 0$$

calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{t\to -3} [f(x) + g(x)]$
2. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
3. $\lim\limits_{t\to -3} g(x)h(x)$
4. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{h(x) + g(x)}{f(x)}$
5. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{h(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$

■

Solución 3.4 Utilizamos los teoremas sobre límites:

Para el 1.:

$$\lim_{t\to -3} [f(x) + g(x)] = \lim_{t\to -3} f(x) + \lim_{t\to -3} g(x) = 3 + (-1) = 2$$

Para el 2.:

$$\lim_{t\to -3} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{t\to -3} f(x)}{\lim_{t\to -3} g(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Para el 3.:

$$\lim_{t\to -3} g(x)h(x) = (\lim_{t\to -3} g(x))(\lim_{t\to -3} h(x)) = (-1)(0) = 0$$

Para el 4.:

$$\lim_{t\to -3} \frac{h(x) + g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{t\to -3} h(x) + \lim_{t\to -3}(g(x)}{\lim_{t\to -3} f(x)} = \frac{0 + (-1)}{3} = -\frac{1}{3}$$

Para el 5.:

$$\lim_{t\to -3} \frac{h(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{\lim_{t\to -3} h(x) - \lim_{t\to -3} g(x)}{\lim_{t\to -3} f(x) + \lim_{t\to -3} g(x)} = \frac{0 - (-1)}{3 + (-1)} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 3.5 Si $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - h(x)}{2\sin x + 1} = 2$, determinar $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} h(x)$. ■

Solución 3.5 Utilizamos los teoremas sobre límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-h(x)}{2\sin x+1} &= 2\\
\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[1-h(x)]}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[2\sin x+1]} &= 2\\
\frac{1-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[2\sin x]+1} &= 2\\
\frac{1-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x)}{\sqrt{2}+1} &= 2\\
1-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) &= 2(\sqrt{2}+1)\\
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) &= 1-2(\sqrt{2}+1)\\
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) &= 1-2\sqrt{2}-2\\
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) &= -1-2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.6 Dada la función $P(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 2$, calcular:

1. $\lim\limits_{t\to -1} P(x)$
2. $\lim\limits_{t\to 2} P(x)$
3. $\lim\limits_{t\to 0} P(x)$
4. $\lim\limits_{t\to -\frac{1}{2}} P(x)$

■

Solución 3.6 Dado que la función P(x) es una función polinomial:

Para el 1.

$$\lim_{t\to -1} P(x) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 9(-1) + 2 = -11$$

Para el 2.

$$\lim_{t\to 2} P(x) = (2)^3 - 3(2)^2 + 9(2) + 2 = 16$$

Para el 3.

$$\lim_{t\to 0} P(x) = (0)^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 2 = 2$$

Para el 4.

$$\lim_{t\to -\frac{1}{2}} P(x) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^3 - 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + 9\Big(-\frac{1}{2}\Big) + 2 = -\frac{27}{8}$$

Ejercicio 3.7 Calcular $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$. ■

Solución 3.7

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} &= \lim_{t\to -1} \frac{(t+1)(t+2)}{(t+1)(t-2)}\\
&= \lim_{t\to -1} \frac{t+2}{t-2}\\
&= \frac{-1+2}{-1-2}\\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.8 Calcular $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$. ■

Solución 3.8

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} &= \lim_{x\to -3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}}\\
&= \lim_{x\to -3} \frac{4-(\sqrt{x^2-5})^2}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})}\\
&= \lim_{x\to -3} \frac{-x^2+9}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})}\\
&= \lim_{x\to -3} \frac{-(x-3)(x+3)}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})}\\
&= \lim_{x\to -3} \frac{-(x-3)}{(2+\sqrt{x^2-5})}\\
&= \frac{-(-3-3)}{(2+\sqrt{(-3)^2-5})}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.9 Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{8}}{3-2x}$ ■

Solución 3.9

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{8}}{3-2x} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{8}}{3-2x}\,\frac{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{4x^2-1-8}{(3-2x)\left(\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{(3-2x)\left(\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}\right)} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{(2x-3)(2x+3)}{(3-2x)\left(\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}\right)} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-(3-2x)(2x+3)}{(3-2x)\left(\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-(2x+3)}{\left(\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{8}\right)} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-\left[2\left(\frac{3}{2}\right)+3\right]}{\sqrt{4\left(\frac{3}{2}\right)^2-1}+\sqrt{8}} = \frac{-6}{2\sqrt{8}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio 3.10 Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{\tan x}$.

Solución 3.10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x(1-\cos x)}{\cos x \operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\frac{1}{x}}{(\operatorname{sen} x)\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicio 3.11 Calcular $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$.

Solución 3.11

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y} &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} \cdot \frac{\cot 5y}{\cot 4y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} \cdot \frac{\frac{\cos 5y}{\sin 5y}}{\frac{\cos 4y}{\sin 4y}} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} \cdot \frac{\cos 5y}{\cos 4y} \cdot \frac{\sin 4y}{\sin 5y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} \cdot \frac{\cos 5y}{\cos 4y} \cdot \frac{\frac{\sin 4y}{y}}{\frac{\sin 5y}{y}} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\cos 5y}{\cos 4y} \cdot \frac{\lim_{y\to 0} \frac{\sin 4y}{y}}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin 5y}{y}} \\
&= 3(1) \cdot (1) \cdot \frac{4(1)}{5(1)} \\
&= \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.12 Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$.

Solución 3.12

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{3x^3} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - 4\frac{x}{x^3} + \frac{8}{x^3}}{3} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 4\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{3} \\
&= \frac{0 - 4(0) + 8(0)}{3} \\
&= \frac{0}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.13 Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3}{13x^3+128}$. ■

Solución 3.13

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3}{13x^3+128} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}}{13\frac{x^3}{x^4}+\frac{128}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{13\frac{1}{x}+\frac{128}{x^4}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

lo que significa que el límite no existe.

Ejercicio 3.14 Calcular $\lim_{x\to 0} \sin\sqrt{\dfrac{\cos^2 x-\cos x}{x}}$. ■

Solución 3.14

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sin\sqrt{\frac{\cos^2 x-\cos x}{x}} &= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-\cos x}{x}} \\
&= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0}(-\cos x)\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)} \\
&= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0}(-\cos x)\left(\frac{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}{x}\right)} \\
&= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)} \\
&= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{1+\cos x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)} \\
&= \sin\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{1+\cos x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)(0)(1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.15 ¿Para qué valor de a, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x<3 \\ 2ax & x\geq 3 \end{cases}$$

es continua para toda x? ■

Solución 3.15 El único punto del dominio donde puede haber una discontinuidad es en $x=3$, por lo que requerimos que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3} x^2 - 1 = 8 \\
\lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3} 2ax = 6a \\
6a &= 8 \\
a &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.16 Determine las asíntotas verticales y horiontales de la función $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}$.
■

Solución 3.16 Para determinar las asistontas horizontales evaluamos los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} = 1 \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} = 1
\end{aligned}$$

Por lo que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

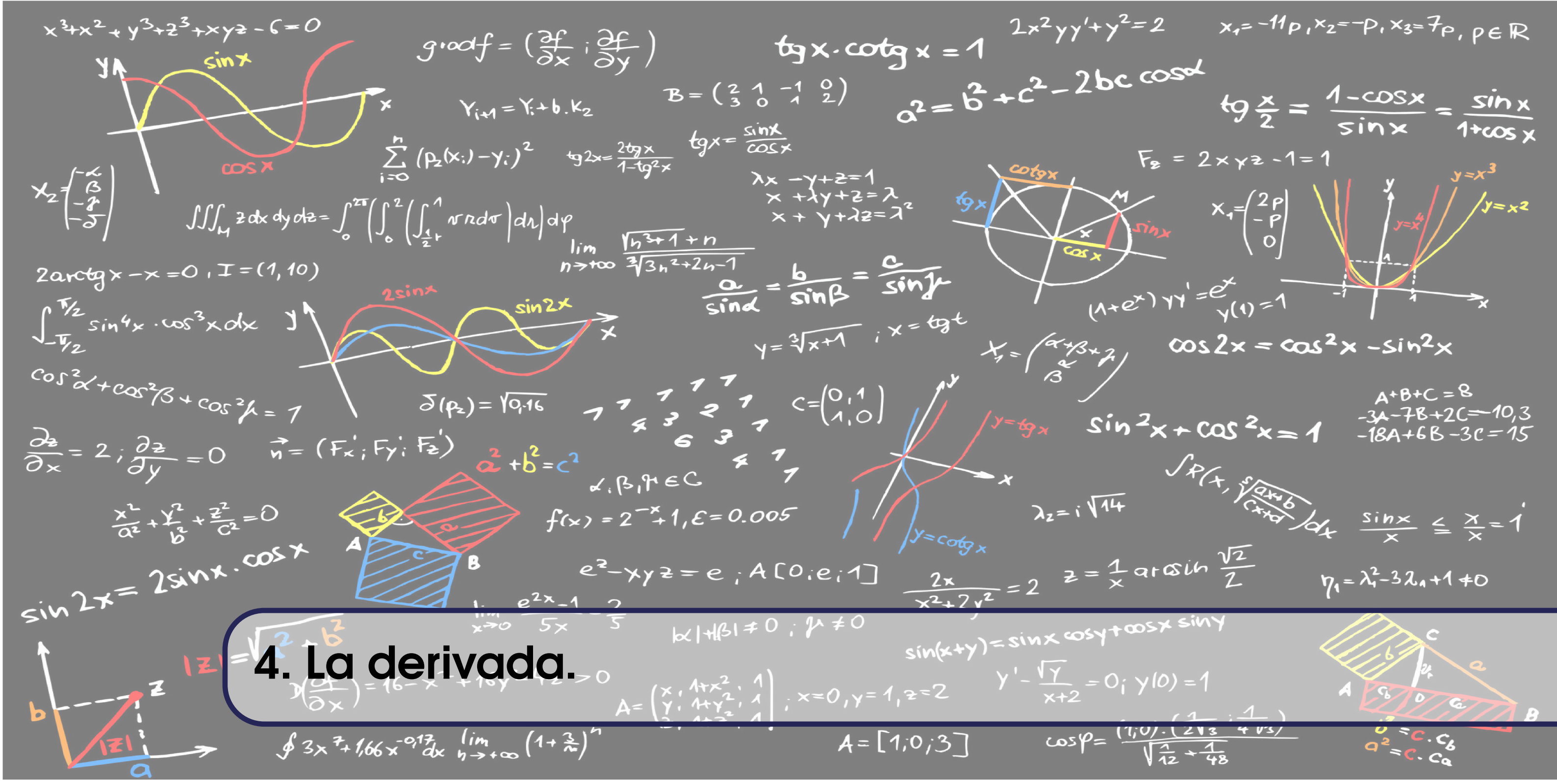
Para determinar las asistontas verticales, primero notamos que

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2}$$

por lo que evaluamos los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} \\
&= -\infty \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Por lo que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.



4. La derivada.

Ejercicio 4.1 Obtén la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $$f(x) = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + e^{x^2}}$$

2. $$g(x) = [x + (x + \cos^2 x)^3]^4$$

3. $$J(v) = (v^3 - 2\sin v)(v^{-4} + \sin^{-2} v)$$

4. $$f(t) = (2ra^{rt} + n)^p$$

5. $$h(x) = x\cos(5x) + 2\tan x$$

6. $$y(t) = \sqrt{1 - \sec t}$$

Solución 4.1 1.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2e^{x^2})'(x^2+e^{x^2})-(x^2e^{x^2})(x^2+e^{x^2})'}{(x^2+e^{x^2})^2}\\
&= \frac{(2xe^{x^2}+x^2 2xe^{x^2})(x^2+e^{x^2})-(x^2e^{x^2})(2x+2xe^{x^2})}{(x^2+e^{x^2})^2}\\
&= \frac{(2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2})(x^2+e^{x^2})-(2x^3e^{x^2}+2x^3e^{2x^2})}{(x^2+e^{x^2})^2}\\
&= \frac{2x^3e^{x^2}+2x^5e^{x^2}+2xe^{2x^2}+2x^3e^{2x^2}-2x^3e^{x^2}-2x^3e^{2x^2}}{(x^2+e^{x^2})^2}\\
&= \frac{2x^5e^{x^2}+2xe^{2x^2}}{(x^2+e^{x^2})^2}\\
&= \frac{2xe^{x^2}(x^4+e^{x^2})}{(x^2+e^{x^2})^2}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 4[x+(x+\cos^2 x)^3]^3\,[x+(x+\cos^2 x)^3]'\\
&= 4[x+(x+\cos^2 x)^3]^3\,[1+3(x+\cos^2 x)^2\,(x+\cos^2 x)']\\
&= 4[x+(x+\cos^2 x)^3]^3\,[1+3(x+\cos^2 x)^2\,(1-2\cos x\sin x)]
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
J'(v) &= (v^3-2\sin v)'\,(v^{-4}+\sin^{-2} v)+(v^3-2\sin v)\,(v^{-4}+\sin^{-2} v)'\\
&= (3v^2-2\cos v)(v^{-4}+\sin^{-2} v)+(v^3-2\sin v)(-4v^{-5}-2\sin^{-3} v\cos v)\\
&= (3v^2-2\cos v)\left(\frac{1}{v^4}+\frac{1}{\sin^2 v}\right)+(v^3-2\sin v)\left(-\frac{4}{v^5}-2\frac{\cos v}{\sin^3 v}\right)\\
&= (3v^2-2\cos v)\left(\frac{1}{v^4}+\csc^2 v\right)+(v^3-2\sin v)\left(-\frac{4}{v^5}-2\cot v\csc^2 v\right)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= p(2ra^{rt}+n)^{p-1}\,(2ra^{rt}+n)'\\
&= p(2ra^{rt}+n)^{p-1}\,2r(a^{rt})'\\
&= p(2ra^{rt}+n)^{p-1}\,2r^2(\ln a)(a^{rt})\\
&= 2pr^2(\ln a)a^{rt}(2ra^{rt}+n)^{p-1}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= (x)'\cos(5x)+x[\cos(5x)]'+2(\tan x)'\\
&= \cos(5x)-5x\sin(5x)+2\sec^2 x
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{2}(1-\sec t)^{-1/2}\,(1-\sec t)'\\
&= \frac{1}{2}(1-\sec t)^{-1/2}\,(-\sec t\tan t)\\
&= -\frac{\sec t\tan t}{2\sqrt{1-\sec t}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.2 Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones

1. $y = x^2 e^{x^3}$
2. $y = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}$
3. $y = \sec^2 x^2$
4. $y = \ln\sqrt{2x^2+1}$

■

Solución 4.2 Procedemos utilizando las reglas de derivación:

1. $y = x^2 e^{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 3x^2 e^{x^3} + 2xe^{x^3} = 3x^4 e^{x^3} + 2xe^{x^3} = xe^{x^3}(3x^3+2)$$

2. $y = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\cos x - (1+\operatorname{sen} x)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x^2\cos x - 2x - 2x\operatorname{sen} x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2 - 2\operatorname{sen} x}{x^3}$$

3. $y = \sec^2 x^2 = (\sec x^2)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sec x^2 \sec x^2 \tan x^2(2x) = 4x\sec^2 x^2 \tan x^2$$

4. $y = \ln\sqrt{2x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\,\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}(4x) = \frac{2x}{2x^2+1}$$

Ejercicio 4.3 Determine la ecuación general de la recta tangente y la recta normal a la curva $\frac{x}{y} + 3 = x^2 + y^2$ en el punto $(2,1)$ ■

Solución 4.3 Derivando ambos miembros de la ecuación respecto a x tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{y - xy'}{y^2} &= 2x + 2yy' \\
y - xy' &= 2xy^2 + 2y^3y' \\
y - 2xy^2 &= 2y^3y' + xy' \\
y - 2xy^2 &= y'(2y^3 + x) \\
y' &= \frac{y-2xy^2}{2y^3+x}
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(2,1)$ para calcular la pendiente tenemos que

$$y'\big|_{(2,1)} = \frac{y-2xy^2}{2y^3+x} = \frac{1-2(2)(1)^2}{2(1)^3+2} = \frac{-3}{4}$$

Determinación de la recta tangente a la curva

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4} &= \frac{y-1}{x-2} \\
-\frac{3}{4}(x-2) &= y-1 \\
-\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - y + 1 &= 0 \\
-\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{2} &= 0
\end{aligned}$$

Ahora, hallaremos la normal. Para esto ya sabemos que la tangente y la normal tienen pendientes inversas y de signos contrarios, entonces dado que la pendiente de la tangente es $m = -\frac{3}{4}$, entonces la pendiente de la normal es $m = +\frac{4}{3}$. Ahora usamos la forma general de la recta

$$y = mx + b$$

Para $m = \frac{4}{3}$ y que pase por $(x, y) = (2, 1)$ tenemos que

$$\frac{4}{3}(2) + b = 1 \implies b = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$$

Entonces la ecuación de la normal es $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

Ejercicio 4.4 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente relación

$$y\sin(2x) = x\cos(2y)$$

en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. ■

Solución 4.4 Primero encontramos $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente la expresión anterior

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\sin(2x) + y2\cos(2x) = \cos(2y) - x2\sin(2y)\frac{dy}{dx} \\
&\Rightarrow \quad \sin(2x)\frac{dy}{dx}2y\cos(2x) = \cos(2y) - 2x\sin(2y)\frac{dy}{dx} \\
&\Rightarrow \quad \sin(2x)\frac{dy}{dx} + 2x\sin(2y)\frac{dy}{dx} = \cos(2y) - 2y\cos(2x) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\Bigg(\sin(2x + 2x\sin(2y))\Bigg) = \cos(2y) - 2y\cos(2x) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2y) - 2y\cos(2x)}{\sin(2x + 2x\sin(2y))}
\end{aligned}$$

Con esto, la pendiente de la recta tangente a la curva $y\sin(2x) = x\cos(2y)$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ está dada por

$$\begin{aligned}
m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\cos(2\frac{\pi}{4}) - 2\frac{\pi}{4}\cos(2\frac{\pi}{2})}{\sin(2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}\sin(2\frac{\pi}{4}))} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\pi}{\sin\pi + \pi\sin\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

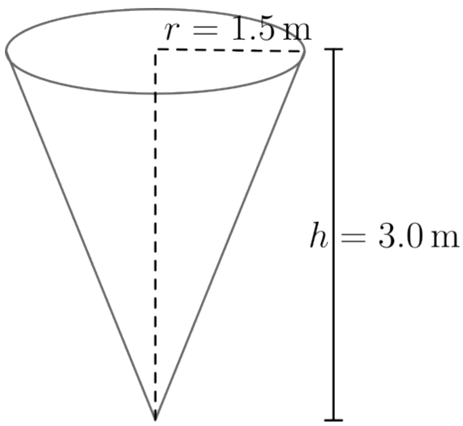
Entonces, la ecuación de la recta es:

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

o bien

$$\begin{aligned} y - \frac{\pi}{4} &= \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \quad 4y - \pi &= 2x - \pi \\ \Rightarrow \quad 4y - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5 En un tanque cónico, el agua entra a una razón de $1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. El tanque permanece con el vértice hacia abajo, tiene una altura de $3.0\,\mathrm{m}$ y el radio de la base del cono mide $1.5\,\mathrm{m}$. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene $1.8\,\mathrm{m}$ de profundidad en el tanque? ■



Solución 4.5

Queremos calcular $\dfrac{dh}{dx}$ cuando $h = 1.8\,\mathrm{m}$ en función de $\frac{dV}{dt} = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$.
Primero debemos establecer la relación entre $h(t)$ y $v(t)$. Sabemos que el volumen del cono está dado por,

$$V = \frac{1}{3}h\pi r^2$$

En donde $V(t)$, $h(t)$ y $r(t)$ Una cosa muy importante de notar es que para el cono, siempre se mantiene la razón $\frac{h}{r}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{h}{r} &= \frac{3.0}{1.5} = 2.0 \\ \Rightarrow \quad r &= \frac{h}{2} \\ \Rightarrow \quad r(t) &= \frac{h(t)}{2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{1}{3}h(t)\pi\left(\frac{h(t)}{2}\right)^2 &= \frac{1}{3}[h(t)]^3\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \quad V(t) &= \frac{pi}{12}[h(t)]^3 \\ \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2(t)}\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Al tiempo t_0 $h(t_0) = 1.8\,\text{m}$ y $\dfrac{dV}{dt} = 1\,\text{m}^3/\text{min}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t_0} = \frac{4}{\pi(1.8\,\text{m})^2}\frac{1\,\text{m}^3}{\text{min}} = \frac{4}{\pi(3.24)}\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

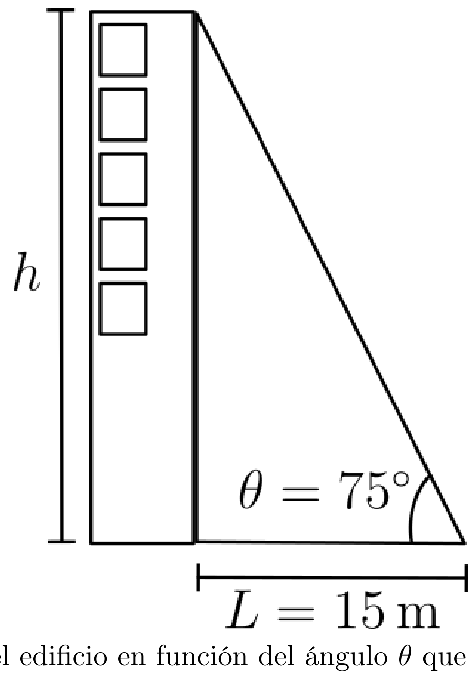
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t_0} = 0.3929\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Ejercicio 4.6 A las $14:00$ horas, el tacómetro de un automóvil marca $50\,\text{km/h}$. A las $14:10$ horas marca $65\,\text{km/h}$. Demuestre que en algún momento entre las $14:00$ horas y las $14:10$ horas, la aceleración del automóvil es exactamente $90\,\text{km/h}^2$. ■

Solución 4.6 A las $14:00$ un auto va a $50\,\text{km/h} \Rightarrow \quad v(t_1) = 50\,\text{km/h}$ donde $t_1 = 14:00$.
A las $14:10$ un auto va a $65\,\text{km/h} \Rightarrow \quad v(t_2) = 65\,\text{km/h}$ donde $t_2 = 14:10$.
Por el teorema del valor medio, existe un punto c tal que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(65-50)\,\text{km/h}}{10\,\text{min}} = \frac{15\,\text{km/h}}{10\,\text{min}\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{min}}\right)} = \frac{15\cdot 60}{10}\frac{km}{h^2} = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

Ejercicio 4.7 Un topógrafo, ubicado a $15\,\text{m}$ de la base de un edificio, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y concluye que es de $75°$. ¿Con qué exactitud debe medirse el ángulo para que el porcentaje de error al estimar la altura del edificio sea menor que un 4 por ciento? ■



Solución 4.7
La altura del edificio en función del ángulo θ que mide el topógrafo está dada por

$$\tan\theta = \frac{h}{L}$$
$$\Rightarrow \quad h = L\tan\theta$$

donde L es la distancia a la cual se encuentra el topógrafo. Entonces, si conocemos una medida θ_0, el valor de h es

$$h(\theta_0) = L\tan\theta_0$$

Si ahora tenemos un cambio en la medición de h

$$\Rightarrow \quad dh = L\sec^2\theta d\theta$$

El error porcentual en la medición de h está dado por $\dfrac{dh}{h}$

$$\frac{dh}{h} = \frac{L\sec^2\theta}{h}d\theta = \frac{L\sec^2\theta}{L\tan\theta}d\theta = \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

Por lo que si el error debe ser menos al 4 %

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 75^\circ}{\tan 75^\circ}d\theta &< 0.04 \\ \Rightarrow \quad 4d\theta &< 0.04 \\ \Rightarrow \quad d\theta &< 0.01 \end{aligned}$$

Por lo tanto el ángulo debe midirse con una exactitud de $0.01\,\mathrm{rad} = 0.57^\circ$.

5. Aplicaciones de la derivada.

Ejercicio 5.1 Identifica los valores extremos y puntos de inflexión, si los hay, de la función $f(x) = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$. Identifica las regiones del dominio en donde la función es crecienteo decreciente y cóncava hacia arriba o hacia abajo. Con esta información obtén la gráfica de la función. ■

Solución 5.1 Los valores máximos o mínimos se pueden presentar en donde $f'(x) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} -9 - 12x - 3x^2 &= 0 \\ x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ (x+3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

entonces los puntos críticos de f son $x = -3$ y $x = -1$. Estos puntos dividen al dominio de f en tres regiones (dadas por intervalos), en las cuales tomaremos un valor representativo en cada una de ellas para evaluar el signo de la derivada, a saber, $f'(x) = -9 - 12x - 3x^2$:

$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$x_0 = -4$ $f'(-4) < 0$ f es decreciente	$x_0 = -2$ $f'(-2) > 0$ f es creciente	$x_0 = 0$ $f'(0) < 0$ f es decreciente

De acuerdo a los cambios de signo de la derivada tenemos que:

1. $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = -3$

2. $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -1$

Los puntos de inflexión se pueden hallar en donde $f''(x) = 0$:

$$12 - 6x = 0$$
$$x = -2$$

por lo que $x = -2$ puede ser un punto de inflexión; este punto divide al dominio de la $f'(x)$ en dos intervalos, en los cuales tomaremos un valor representativo para evaluar el signo de la segunda derivada, a saber $f''(x) = 12 - 6x$ y con ello analizar si hay un cambio en la concavidad:

$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$x_0 = -3$	$x_0 = 0$
$f'(-3) > 0$	$f'(0) < 0$
f es cóncava hacia arriba (cóncava)	f es cóncava hacia abajo (convexa)

como hay un cambio en la concavidad, $x = -2$ es un punto de inflexión.

Ejercicio 5.2 Determinar los valores máximos y mínimos locales de la función:

$$f(x) = 4x^4 - x^2 - 3$$

■

Solución 5.2 Procedemos a derivar f

$$f'(x) = 16x^3 - 2x$$

Igualando esa a 0 obtenemos los valores críticos

$$16x^3 - 2x = 2x(8x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \vee 8x^2 - 1 = 0 \implies x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Entonces, los puntos críticos de f son $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ y $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Para hallar los máximos y mínimos utilizaremos el criterio de la segunda derivada, así que derivamos de nuevo

$$f''(x) = 48x^2 - 2$$

Y ahora evaluamos en los púntos críticos

$$f''(0) = 48(0)^2 - 2 = -2$$

$$f''(0) = 48\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 = 4$$

$$f''(0) = 48\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 = 4$$

Como $f''(0) < 0$ tenemos que $x = 0$ es un punto máximo local, por otro lado $f''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right) > 0$ entonces $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ son puntos mínimos locales.

Con esto también podemos llegar a que $y = -3$ es el valor máximo local o relativo a la gráfica f, que se obtiene cuando $x = 0$ y $y = -\frac{49}{16}$ es un valor mínimo local o relativo a la gráfica de f, que se obtiene cuando $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ejercicio 5.3 En una fundidora se debe diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abirto por arribay con una capacidad de 50 m^3. El tanque se debe fabricar soldando placas delgadas de acero a los largo de sus bordes. Determinar las dimensiones de la base y la altura del tanque que harán que el tanque tenga el menor peso posible. ■

Solución 5.3 Sea x la longitud de los lados de la base del tanque y y la longitud de la altura. Como la capacidad del tanque es de 50 m^3 tenemos que:

$$x^2y = 50$$

Por otro lado, la cantidad de material que se usará para su fabricación está directamente relacionado con el área superficial del tanque, de manera que a menor área, menor material y por tanto menor será el peso. El área superficial está dado por:

$$A = x^2 + 4xy$$

Despejando y de la ecuación para el volúmen: $y = \dfrac{50}{x^2}$, y sustituyendo en la expresión para el área, obtenemos el área como función de x:

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 4xy \\ &= x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) \\ &= x^2 + \frac{200}{x} \end{aligned}$$

Ahora hallamos el valor mínimo de la función A:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2x - \frac{200}{x^2} = 0 \\ \Longrightarrow\ x &= \sqrt[3]{100} \end{aligned}$$

Este valor para x corresponde a un punto mínimo de $A(x)$ (puedes evlauarlo usando el criterio de la segunda derivada). Con esto, el valor de y está dado por:

$$y = \frac{50}{x^2} = \frac{50}{(\sqrt[3]{100})^2}$$

Las dimensiones del tanque son $x = \sqrt[3]{100}$ y $y = \dfrac{50}{(\sqrt[3]{100})^2}$.

Ejercicio 5.4 Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida. ¿Cuánto debe contraerse la tráquea para maximizar para maximizar la velocidad del aire de salida si la velocidad promedio del flujo de aire v se modela mediante la ecuación

$$v(r) = c(r_0 - r)r^2$$

donde r_0 es el radio de la tráquea en reposo y está dado en cm? ■

Solución 5.4 Tenemos que hallar los puntos críticos de la función $v(r)$ y determinar cuándo se trata de un máximo.

$$\begin{aligned} & v(r) = c(r_0 - r)r^2 \\ \implies & v'(r) = -cr^2 + 2cr_0 r - 2cr^2 \\ & \quad = 2cr_0 r - 3cr^2 \\ & \quad = cr(2r_0 - 3r) \\ & \quad = 0 \end{aligned}$$

por lo que la función tiene dos puntos críticos, $r = 0$ y $r = \dfrac{2r_0}{3}$, de los cuáles, si tomamos el criterio de la segunda derivada, vemos que $v''(\dfrac{2r_0}{3}) < 0$ por lo que se trata de un punto máximo. Entonces, la tráquea debe ccontraerse a $\frac{2}{3}$ de su radio original para tener la máxima velocidad de flujo de salida.

Ejercicio 5.5 Un pastor tiene 200 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales de forma que el área sea la máxima. ■

Solución 5.5 Sea x la longitud de los lados no contiguos de los corrales y y la longitud del lado contiguo, de esta forma, el área encerrada por ambos corrales está dada por:

$$A = 2xy$$

y el perimetro que se debe cercar con los metros disponibles de malla está dado por:

$$P = 4x + 3y = 200$$

De esta forma, podemos expresar el valor de y como función de x, es decir:

$$y = \frac{200 - 4x}{3}$$

De esta forma, el área puede expresarse únicamente como función de x:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x\left(\frac{200 - 4x}{3}\right) \\ &= \frac{400x - 8x^2}{3} \end{aligned}$$

Para obtener el valor de área máxima que se puede alcanzar al variar x, debemos hallar el punto máximo de $A(x)$, para lo cual

$$\begin{aligned} & A'(x) = \frac{400 - 16x}{3} = 0 \\ \implies & 400 - 16x = 0 \\ & \implies 16x = 400 \\ & \quad \implies x = 25 \end{aligned}$$

para garantizar que en $x = 25$ la función $A(x)$ alcanza el valor máximo, utilizamos el criterio de la segunda derivada, es decir:

$$A''(x) = \frac{-16}{3} < 0$$

por lo cual se trata de un máximo. De esta forma, las dimensiones de los corrales son $x = 25$ m y $y = \frac{200-4x}{3} = \frac{200-4(25)}{3} = \frac{100}{3}$ m.

6. La integral definida y el teorema fundamental del cálculo

Ejercicio 6.1 Sean h y g funciones integrables que satisfacen:

$$\int_1^9 f(x)dx = -1$$
$$\int_7^9 f(x)dx = 5$$
$$\int_7^9 h(x)dx = 4$$

Calcular:

1. $\displaystyle\int_1^9 -2f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_7^9 [f(x)+h(x)]dx$
3. $\displaystyle\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]dx$
4. $\displaystyle\int_9^1 f(x)dx$
5. $\displaystyle\int_1^7 f(x)dx$
6. $\displaystyle\int_9^7 [h(x)-f(x)]dx$

■

Solución 6.1

Empleando las propiedades de la integral definida tenemos

1.
$$\begin{aligned}\int_1^9 -2f(x)dx &= -2\int_1^9 f(x)dx\\ &= (-2)(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int_7^9 [f(x)+h(x)]dx &= \int_7^9 f(x)dx + \int_7^9 h(x)dx\\ &= (5)+(4)\\ &= 9\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]dx &= 2\int_7^9 f(x)dx - 3\int_7^9 3h(x)dx\\ &= 2(5)-3(4)\\ &= -2\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\int_9^1 f(x)dx &= -\int_1^9 f(x)dx\\ &= -(-1) \qquad\qquad = 1\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}\int_1^7 f(x)dx &= \int_1^9 f(x)dx + \int_9^7 f(x)dx\\ &= \int_1^9 f(x)dx - \int_7^9 f(x)dx\\ &= (-1)-(5)\\ &= -6\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}\int_9^7 [h(x)-f(x)] &= \int_9^7 h(x) - \int_9^7 -f(x)\\ &= -\int_7^9 h(x) + \int_7^9 -f(x)\\ &= -(4)+(5)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ejercicio 6.2 Calcular $D_x \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$. ■

Solución 6.2 Por el Teorema Fundamental del cálculo:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = G(x)$$

talque

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{d}{dx}(G(x))$$

por tanto,

$$D_x \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = D_x G(x) = \sin x \cos x$$

Vamos a comprobar esto, realicemos la integral primero, integrando por cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x, \\ du &= \cos x \, dx, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} D_x \int u \, du &= D_x \left(\frac{u^2}{2} + C \right) \\ &= D_x \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C \right) \\ &= \frac{1}{2}(2 \operatorname{sen} x \cos x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.3 Calcular $\int D_x \left(\frac{1}{x-5} \right)^{\frac{1}{2}} dx$. ■

Solución 6.3

$$\begin{aligned} \int D_x \left(\frac{1}{x-5} \right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+5} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-1}{(x+5)^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(x+5)^{\frac{1}{2}}}{(x+5)^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+5)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= x+5, \\ du &= dx, \end{aligned}$$

nos da

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(-2)u^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+5}} + C. \end{aligned}$$

7. Métodos y técnicas de integración.

Ejercicio 7.1 Obtener $\displaystyle\int 6x^2 - 2x + 10\,dx$ ■

Solución 7.1 Procedemos utilizando las reglas de integración

$$\int 6x^2 - 2x + 10\,dx = 6\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + \int 10\,dx = 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 10x + C = 2x^3 - x^2 + 10x + C$$

Ejercicio 7.2 Obtener $\displaystyle\int \frac{6}{x^2} - x^2\,dx$ ■

Solución 7.2

$$\int \frac{6}{x^2} - x^2\,dx = 6\int \frac{1}{x^2} - \int x^2\,dx = 6\int x^{-2}\,dx - \int x^2\,dx = 6\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^3}{3} + C = -\frac{6}{x} - \frac{x^3}{3} + C$$

Ejercicio 7.3 Obtener $\displaystyle\int \sqrt[5]{x} - \sqrt{7x}\,dx$ ■

Solución 7.3

$$\int \sqrt[5]{x} - \sqrt{7x}\,dx = \int x^{\frac{1}{5}} - \sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{5}}\,dx - \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - \frac{2\sqrt{7}}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejercicio 7.4 Obtener $\displaystyle\int x\left(\sqrt{4x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)\,dx$ ■

Solución 7.4

$$\begin{aligned}\int x\left(\sqrt{4x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx &= \int x\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx = \int x\left(2x+\sqrt{x}-1\right)\,dx\\ &= \int x\left(2x+x^{\frac{1}{2}}-1\right)\,dx = \int 2x^2+x^{\frac{3}{2}}-x\,dx\\ &= \int 2x^2\,dx+\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-\int x\,dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2+C\end{aligned}$$

Ejercicio 7.5 Obtener $\displaystyle\int \frac{(5x-2)(3x-1)}{\sqrt{x}}\,dx$ ■

Solución 7.5

$$\begin{aligned}\int \frac{(5x-2)(3x-1)}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{15x^2-11x+2}{\sqrt{x}}\,dx = 15\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx-11\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx+2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\\ &= 15\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-11\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 15\left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{5}{2}}-11\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}}+2(2)x^{\frac{1}{2}}+C\\ &= 6x^{\frac{5}{2}}-\frac{22}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C = 6\sqrt{x^5}-\frac{22}{3}\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

Ejercicio 7.6 Obtener $\displaystyle\int t\left(\frac{1}{2t^2}+t\right)\,dt$ ■

Solución 7.6

$$\begin{aligned}\int t\left(\frac{1}{2t^2}+t\right)\,dt &= \int t\left(\frac{1+2t^3}{2t^2}\right)\,dt = \int \frac{1+2t^3}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+2t^3}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}+\frac{2t^3}{t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}+2t^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt+\int t^2\,dt = \frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^3}{3}+C\end{aligned}$$

Ejercicio 7.7 Obtener $\displaystyle\int \left(6x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx$ ■

Solución 7.7 Haciendo el cambio de variable $u = 6x-\frac{1}{2} \to du = 6\,dx$

$$\int \left(6x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{1}{8}u^{\frac{4}{3}}+C$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int \left(6x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{8}(6x-\frac{1}{2})^{\frac{4}{3}}+C = \frac{\sqrt[3]{(6x-\frac{1}{2})^4}}{8}+C$$

Ejercicio 7.8 $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx$ ■

Solución 7.8 Haciendo el cambio de variable $u = x^2+2x-8 \to du = 2x+2\,dx = 2(x+1)\,dx$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}(2)u^{\frac{1}{2}}$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx = (x^2+2x-8)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+2x-8} + C$$

Ejercicio 7.9 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$ ■

Solución 7.9 Haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x \to du = \cos x\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

Ejercicio 7.10 $\displaystyle\int z \sec^2 z^2\,dz$ ■

Solución 7.10 Haciendo el cambio de variable $u = z^2 \to du = 2z\,du$

$$\int z \sec^2 z^2\,dz = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\tan u + C$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int z \sec^2 z^2\,dz = \frac{1}{2}\tan z^2 + C$$

Ejercicio 7.11 $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx.$ ■

Solución 7.11 Notemos que

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx \\ &= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x)\,dx = \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan\,dx\end{aligned}$$

Primer integral: hagamos el cambio de variable $u = \tan x \to du = \sec^2 x\,dx$, nos da que

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$$

Segunda integral: hagamos el cambio de variable $u = \cos x \to du = -\operatorname{sen} x\, dx$, nos da que

$$\int \tan\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{du}{u}\, dx = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Por lo tanto

$$\int \tan^3 x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Ejercicio 7.12 $\displaystyle\int \frac{2t-3}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\, dt$ ■

Solución 7.12 Haciendo el cambio de variable $u = 1 - t \to du = -1\, dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{2t-3}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\, dt &= -\int \frac{2(1-u)-3}{u^{\frac{3}{2}}}\, du = -\int \frac{2-2u-3}{u^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{-2u-1}{u^{\frac{3}{2}}}\, du \\ &= -\int \frac{-(2u+1)}{u^{\frac{3}{2}}}\, du = \int \frac{2u+1}{u^{\frac{3}{2}}}\, du = \int (2u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{3}{2}})\, du = 2(2)u^{\frac{1}{2}} - (2)u^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int \frac{2t-3}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\, dt = 4(1-t)^{\frac{1}{2}} - 2(1-t)^{-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{1-t} - 2\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Ejercicio 7.13 $\displaystyle\int \frac{5x^3}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$ ■

Solución 7.13 Procedemos a reacomodar los términos

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{x^2+3}}\, dx = 5\int \frac{x^3}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}\, dx = 5\int \frac{xx^2}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

Realizamos el cambio de variable $u = x^2 + 3 \to du = 2x\, dx$, así

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3}{\sqrt{x^2+3}}\, dx &= \frac{5}{2}\int \frac{u-3}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \frac{5}{2}\int (u-3)u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{5}{2}\int (u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-\frac{1}{2}})\, du \\ &= \frac{5}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du - \frac{15}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{2}(2)u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{5}{3}u^{\frac{3}{2}} - 15u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{5}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} - 15(x^2+3)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} - 15\sqrt{x^2+3} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 7.14 $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4}}\, dx.$ ■

Solución 7.14 Se realiza por sustitución trigonométrica, haciendo el cambio de variable $x = 2\tan\theta \to dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{4\tan\theta - 3}{\sqrt{4\tan^2\theta + 4}} \cdot 2\sec^2\theta\, d\theta \\ &= \int \frac{4\tan\theta - 3}{2\sec\theta} \cdot 2\sec^2\theta\, d\theta \\ &= 4\int \tan\theta\sec\theta\, d\theta - 3\int \sec\theta\, d\theta.\end{aligned}$$

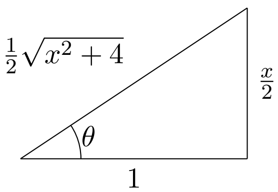
Primera integral: hagamos el cambio de variable $u = \cos\theta \to du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$\begin{aligned}4\int \tan\theta\sec\theta\, d\theta &= 4\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = -4\int \frac{du}{u^2} \\ &= -4\int u^{-2}\, du = -4\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C \\ &= \frac{4}{u} + C = \frac{4}{\cos\theta} + C.\end{aligned}$$

Segunda integral: hagamos el cambio de variable $u = \sec\theta + \tan\theta \to u = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta\, d\theta$

$$\begin{aligned}3\int \sec\theta\, d\theta &= 3\int \sec\theta \cdot \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta = 3\int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta \\ &= 3\int \frac{du}{u} = 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C\end{aligned}$$

Del triángulo se deduce que



$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}, \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \tan\theta = \frac{x}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \frac{4}{\cos\theta} - 3\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= 2\sqrt{x^2+4} - 3\ln\left(\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|\right) + C.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.15 $\displaystyle\int (x^2-3)^{\frac{1}{2}} x^2\, dx$ ■

Solución 7.15 Haciendo el cambio de variable $u = x^2 - 3 \to du = 2x\, dx$

$$\int (x^2-3)^{\frac{1}{2}} x^2\, dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+3)\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 3\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int (x^2-3)^{\frac{1}{2}} x^2\, dx = \frac{1}{5}(x^2-3)^{\frac{5}{2}} + (x^2-3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2-3)^5} + \sqrt{(x^2-3)^3} + C$$

Ejercicio 7.16 $\int x e^{7+2x^2}\,dx$ ■

Solución 7.16 Haciendo el cambio de variable $u = 7 + 2x^2 \to du = 4x\,dx$

$$\int x e^{7+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u$$

Regresando el cambio de variable tendríamos que

$$\int x e^{7+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{7+2x^2}$$

Ejercicio 7.17 Obtener $\int \frac{x \operatorname{sen} x}{2}\,dx$ ■

Solución 7.17 Procedemos proponiendo u, v de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} u = x & \to du = 1 \\ dv = \operatorname{sen} x & \to v = -\cos x \end{array} \implies \int \frac{x \operatorname{sen} x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right)$$

Con esto ya solo basta recordar que $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ y tenemos que

$$\int \frac{x \operatorname{sen} x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x\right) + C$$

Ejercicio 7.18 Obtener $\int x \sec^2 x\,dx$ ■

Solución 7.18 Proponemos u, v de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} u = x & \to du = 1 \\ dv = \sec^2 x x & \to v = \tan x \end{array} \implies \int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

Con esto ya solo basta hallar $\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$, para lo que proponemos el cambio de variable $u = \cos x \to du = -\operatorname{sen} x\,dx$, entonces

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|\cos x|$$

Entonces concluimos

$$\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\cos x| + C$$

Ejercicio 7.19 Obtener $\int x^3 e^{2x^2-1}\,dx$ ■

Solución 7.19 Proponemos u, v de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & \to du = 2x \\ dv = x e^{2x^2-1} & \to v = \frac{1}{4}e^{2x^2-1} \end{array} \implies \int x^3 e^{2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}x^2 e^{2x^2-1} - \frac{1}{2}\int x e^{2x^2-1}\,dx$$

Podemos hallar v integrando dv por cambio de variable. Entonces ya solo hay que hallar $\int x e^{2x^2-1}\,dx$, pero este es exactamente $\int dv$, por lo que podemos soso sustituir

$$\int x^3 e^{2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}x^2 e^{2x^2-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{2x^2-1}\right) + C = \frac{1}{4}x^2 e^{2x^2-1} - \frac{1}{8}e^{2x^2-1} + C$$

Ejercicio 7.20 Obtener $\int x^2 \ln(4x^2)\,dx$ ■

Solución 7.20 Proponemos u, v de la siguiente forma

$$\begin{array}{l} u = \ln 4x^2 \to du = \frac{1}{4x^2}8x \\ dv = x^2 \quad\ \to v = \frac{x^3}{3} \end{array} \implies \int x^2 \ln(4x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln 4x^2 - \frac{2}{3}\int x^2\,dx$$

Como ya sabemos integrar x^2 simplemente sustituimos

$$\int x^2 \ln(4x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln 4x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln 4x^2 - \frac{2}{3}\right) + C$$

Ejercicio 7.21 Obtener $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ ■

Solución 7.21 Proponemos u, v de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u &= \arctan x \quad \to du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \to v = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

donde, podemos hallar v con el cambio de variable $w = 1 + x^2 \to dw = 2x\,dx$ obtenemos

$$v = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^{1/2}} = w^{1/2} = \sqrt{1+x^2}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \arctan x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx \\ &= \arctan x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

La sustitución $x = \tan\theta \to dx = \sec^2\theta\,d\theta$, nos da

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta$$

De la última sustitución

$$\begin{aligned} \Theta &= \sec\theta + \tan\theta \\ d\Theta &= \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta\,d\theta \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \int \sec\theta\,d\theta = \int \sec\theta \cdot \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta &= \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta \\ = \int \frac{d\Theta}{\Theta} &= 3\ln|\Theta| + C \\ &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \arctan x \cdot \sqrt{1+x^2} - \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + C.$$

Ejercicio 7.22 Obtener $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx$ ■

Solución 7.22 Proponemos u, v de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} u = \sec x & \to du = \sec x \tan x \\ dv = \sec^2 x \to v = \tan x & \end{array} \implies \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

De aquí podemos sustituir lo siguiente

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x - \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx \end{aligned}$$

Sumando de ambos lados de la ecuación $\int \sec^3 c\, dx$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx + \int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x\, dx \\ 2\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x\, dx \end{aligned}$$

Integrando $\sec x$ obtenemos

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

Con el cambio de variable $u = \sec x - \tan x \to du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Finalmente

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Ejercicio 7.23 Obtener $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx.$ ■

Solución 7.23 Ya que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, tenemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)\, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x\, dx. \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx \\ &= -\cos x - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x\, dx \end{aligned}$$

nos da

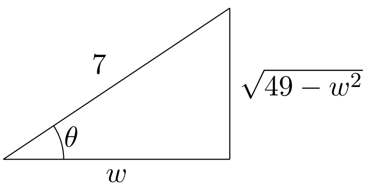
$$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

y por lo tanto

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Ejercicio 7.24 Obtener $\displaystyle\int \frac{w^2}{\sqrt{49 - w^2}}\, dw$ ■

Solución 7.24 Se realiza por sustitución trigonométrica. Del triángulo rectángulo propuesto como sigue podemos notar que existe la siguiente relación



$$\begin{aligned} 7\cos(\theta) &= w \to -7\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = dw \\ 7\operatorname{sen}(\theta) &= \sqrt{49 - w^2} \end{aligned}$$

Realizando la sustitución trigonométrica tenemos que

$$\int \frac{w^2}{\sqrt{49 - w^2}}\, dw = \int \frac{(7)^2 \cos^2\theta (-7)\operatorname{sen}\theta}{7\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = -49 \int \cos^2\theta\, d\theta$$

Sabiendo que $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, entonces

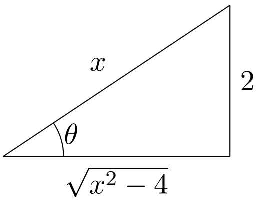
$$-49\int \cos^2\theta\, d\theta = -49\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = -\frac{49}{2}\left(\int 1\, d\theta + \int \cos(2\theta)\, d\theta\right) = -\frac{49}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)) + C\right)$$

Regresando el cambio de variable y utilizando las identidades trigonométricas tendríamos que

$$\begin{aligned} \int \frac{w^2}{\sqrt{49 - w^2}}\, dw &= -\frac{49}{2}\left[\arccos\left(\frac{w}{7}\right) + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right] + C \\ &= -\frac{49}{2}\left[\arccos\left(\frac{w}{7}\right) + \left(\frac{w\sqrt{49 - w^2}}{49}\right)\right] + C \end{aligned}$$

Ejercicio 7.25 Obtener $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 - 4)^{3/2}}\, dx$ ■

Solución 7.25 Se realiza por sustitución trigonométrica. Primero notemos que $(x^2 - 4)^{3/2} = \left[(x^2 - 4)^{1/2}\right]^3$, así, del siguiente triángulo podemos obtenemos lo siguiente



$$2\csc\theta = x \to 2(-\csc\theta\cot\theta)\,d\theta = dx$$
$$2\cot\theta = \sqrt{x^2-4}$$

De este modo sabemos que

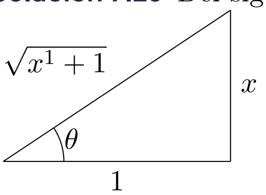
$$\int \frac{1}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx = \int \frac{-2\csc\theta\cot\theta}{(2\cot\theta)^3}\,d\theta = -\frac{2}{8}\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta = -\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

Procedemos por cambio de el cambio de variable $u = \cos\theta \to du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, así

$$-\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{4}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{4}u^{-1} + C = \frac{-1}{4\cos\theta} + C = -\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + C$$

Ejercicio 7.26 Obtener $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ ■

Solución 7.26 Del siguiente triángulo podemos notar que



$$\tan\theta = x \to \sec^2\theta\,d\theta = dx$$
$$\sec\theta = \sqrt{x^2+1}$$

Entonces, realizando la sustitución trigonométrica tenemos que

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sec\theta\sec^2\theta\,d\theta = \int \sec^3\theta\,d\theta$$

Integrando $\sec^3\theta$ por partes obtenemos que

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \int \sec\theta\sec^2\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} u = \sec\theta & \to du = \sec\theta\tan\theta\,d\theta \\ v = \tan\theta = \int dv \to & dv = sec^2\theta\,d\theta \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int \sec^3\theta\,d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

Por identidades trigonométricas sabemos que $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, así

$$\begin{aligned} \int \sec^3\theta\,d\theta &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec^3\theta\,d\theta &= \sec\theta\tan\theta - \textstyle\int \sec\theta\,d\theta \\ 2\int \sec^3\theta\,d\theta &= \sec\theta\tan\theta - \textstyle\int \sec\theta\,d\theta \end{aligned}$$

Ahora hay que integrar $\sec\theta$

$$\begin{aligned} \int \sec\theta\,d\theta &= \int \sec\theta\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u = \sec\theta + \tan\theta \\ du = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta\,d\theta \end{array} \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

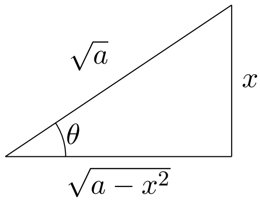
$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Que regresando el cambio de variable, del triángulo rectángulo deducimos que

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| + C$$

Ejercicio 7.27 Obtener $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a-x^2}}{x^2}\, dx$ para $a > 0$ ■

Solución 7.27 Del siguiente triángulo notamos la relación



$$\sqrt{a}\,\mathrm{sen}\,\theta = x \to \sqrt{a}\cos\theta\, d\theta = dx$$
$$\sqrt{a}\cos\theta = \sqrt{a-x^2}$$

Por medio de la sustitución trigonométrica tenemos que

$$\int \frac{\sqrt{a-x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{\sqrt{a}\cos\theta(\sqrt{a}\cos\theta)}{(\sqrt{a})^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\, d\theta = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{a})^2}\int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\, d\theta$$

Por identidades trigonométricas sabemos $\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta} = \cot^2\theta$, entonces

$$\int \frac{\sqrt{a-x^2}}{x^2}\, dx = \int \cot^2\theta\, d\theta$$

Sabiendo que $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$, entonces

$$\int \frac{\sqrt{a-x^2}}{x^2}\, dx = \int \csc^2\theta - 1\, d\theta = \int \csc^2\theta\, d\theta - \int 1\, d\theta = \cot\theta - \theta + C$$

Del triángulo rectángulo despejando θ obtenemos $\theta = \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$, finalmente

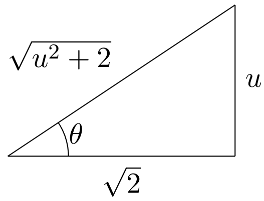
$$\int \frac{\sqrt{a-x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{a-x^2}}{x} - \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$$

Ejercicio 7.28 Obtener $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx$ ■

Solución 7.28 Primero notemos que $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$, con esto proponemos el cambio de variable $u = x+1 \to du = dx$, entonces todo esto quedaría como

$$\int \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx = \int \frac{4}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\, dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{u^2+2}}\, du$$

Con el siguiente triángulo podemos aplicar aquí sustitución trigonométrica



$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\tan\theta = u \to \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta = du\\&\sqrt{2}\sec\theta = \sqrt{u^2+2}\end{aligned}$$

Realizando la sustitución obtenemos que

$$4\int\frac{1}{\sqrt{u^2+2}}\,du = 4\int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{\sqrt{2}\sec\theta}\,d\theta = 4\int\sec\theta\,d\theta = 4\int\sec\theta\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta = 4\int\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$$

Resolvemos por cambio de variable $u = \sec\theta+\tan\theta \to du = \sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta\,d\theta$, entonces

$$4\int\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta = 4\int\frac{1}{u}\,du = 4\ln|u|+C = 4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

Por el cambio de variable sabemos que

$$\sec\theta = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \qquad \& \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{(x+1)^2+2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}$$

Entonces, finalmente concluimos que

$$\int\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = 4\ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}\right|+C$$

Ejercicio 7.29 Obtener $\displaystyle\int\frac{3x-2}{(2x+1)^2}\,dx$. ■

Solución 7.29 Planteamos

$$\begin{aligned}\frac{3x-2}{(2x+1)^2} &= \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}\\&= \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}\end{aligned}$$

Se deduce, pues, que

$$3x-2 = 2Ax+(A+B).$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}2A = 3\\A+B = -2\end{cases}$$

con lo que

$$A = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad B = -\frac{7}{2},$$

de donde

$$\int\frac{3x-2}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{2x+1}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(2x+1)^2}.$$

El cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= 2x+1 \\ du &= 2\,dx \end{aligned}$$

nos da

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{(2x+1)^2}\,dx &= \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{u^2} \\ &= \frac{3}{4}\ln|u| + \frac{7}{4}u^{-1} + C \\ &= \frac{3}{4}\ln|2x+1| + \frac{7}{4(2x+1)} + C. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.30 Obtener $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-4}\,dx.$ ■

Solución 7.30

$$\int \frac{x}{x^4-4}\,dx = \int \frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)}\,dx.$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)} &= \frac{Ax+B}{x^2-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A-2C)x+(2B-2D)}{(x^2-2)(x^2+2)} \end{aligned}$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 2A-2C=1 \\ 2B-2D=0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=D=0 \quad \text{y} \quad C=-\frac{1}{4}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^4-4}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2-2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{8}\int \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|x^2-2\right| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+2\right| + C. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.31 Obtener $\displaystyle\int \frac{x+6}{(x-3)(x+2)(x-2)}\,dx$ ■

Solución 7.31 Planteamos

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{(x-3)(x+2)(x-2)} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\\ &= \frac{A(x+2)(x-2)+B(x-3)(x-2)+C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{A(x^2-4)+B(x^2-5x+6)+C(x^2-x-6)}{(x-3)(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

De aquí que

$$x+6=(A+B+C)x^2+(-5B-C)x+(-4A+6B-6C).$$

Definimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0\\ -5B-C=1\\ -4A+6B-6C=6\end{cases}$$

cuya solución es:

$$A=\frac{9}{5},\quad B=\frac{1}{5},\quad C=-2,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{x+6}{(x-3)(x+2)(x-2)}\,dx &= \frac{9}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}-2\int\frac{dx}{x-2}\\ &= \frac{9}{5}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{5}\int\frac{dv}{v}-2\int\frac{dw}{w}\\ &= \frac{9}{5}\ln|u|+\frac{1}{5}\ln|v|-2\ln|w|+C\\ &= \frac{9}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{5}\ln|x+2|-2\ln|x-2|+C.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.32 Obtener $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ ■

Solución 7.32 Planteamos

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+3x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)}.\end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned}&2x^2+3x-1=\\ &(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+(A+B+D).\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 2 \\ A + C + 2D = 3 \\ A + B + D = -1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = -1, \quad C = D = \frac{3}{2},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx \\ &= -\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v^2} + \frac{3}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx. \end{aligned}$$

La última integral puede calcularse con la sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx &= \frac{3}{2}\int \frac{\tan\theta + 1}{\sec^2\theta}(\sec^2\theta)\, d\theta \\ &= -\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \frac{3}{2}\arctan x + C. \end{aligned}$$

por lo que

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx = -\frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{3}{2}\arctan x + C.$$

8. Algunas aplicaciones de la integral.

Ejercicio 8.1 Calcular el área comprendida entre las curvas:

$$y_1 = 3x - x^2$$
$$y_2 = 2x^3 - x^2 - 5x$$

■

Solución 8.1 De acuerdo a la gráfica de las funciones, observamos que éstas se intersectan en tres puntos, los cuales están dados por la condición de que $y_1 = y_2$,

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= 2x^3 - x^2 - 5x \\ \implies (2x^2 - 8)x &= 0 \\ \implies (x^2 - 4)x &= 0 \end{aligned}$$

entonces, los puntos de intersección son $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ y $x = 0$. Entonces, el área comprendida entre las gráficas de la funciones y_1 y y_2 está dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} [y_2 - y_1]dy + \int_{0}^{2} [y_1 - y_2]dy \\ &= \int_{-2}^{0} [(2x^3 - x^2 - 5x) - (3x - x^2)]dy + \int_{0}^{2} [(3x - x^2) - (2x^3 - x^2 - 5x)]dy \\ &= \int_{-2}^{0} [2x^3 - 8x]dy + \int_{0}^{2} [-2x^3 + 8x]dy \\ &= 16u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.2 Calcular el volúmen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ alrededor del eje x desde $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hasta $x = \sqrt{3}$. ■

Solución 8.2 El volúmen de un sólido de revolución está dado por:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi[f(x)]^2 dx$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \pi\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]^2 dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \pi \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \pi \arctan x \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi^2}{2} u^3
\end{aligned}$$

Ejercicio 8.3 Determine el área de la región acotada por la gráfica de $f(x) = |x| - 1$, $x = 0$, $x = 5$ y el eje x. ■

Solución 8.3

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= -\int_0^1 (|x|-1)\, dx + \int_1^5 (|x|-1)\, dx \\
&= -\int_0^1 (x-1)\, dx + \int_1^5 (x-1)\, dx \\
&= -\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 \\
&= -\frac{1}{2} - 1 + \frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{17}{2} u^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 8.4 Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = e^{x+1}$, $x = -1$ y $x = 0$. ■

Solución 8.4

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \pi \int_{-1}^{0} (e^{x+1})^2\, dx = \pi \int_{-1}^{0} e^{2x+2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^u\, du = \frac{\pi}{2} e^u \Big|_0^2 \\
&= \frac{\pi(e^2-1)}{2} u^3
\end{aligned}$$

Ejercicio 8.5 Un objeto ubicado a una distancia de x metro del origen del sistema de referencia sufre una fuerza F en newtons que depende de la distancia a la que se encuentra, a saber, $F(x) = x^3 + 2x + 1$. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla de una distancia igual a un metro ($x = 1$) hasta una distancia de cinco metros del origen ($x = 5$)? ■

Solución 8.5 El trabajo está dado por:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx &= \int_1^5 x^3 + 2x + 1dx \\ &= \frac{x^4}{4} + x^2 + x\Big|_1^5 \\ &= 184N \end{aligned}$$