UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GUÍA DE CÁLCULO II (1205)

PARA PREPARAR EXÁMENES EXTRAORDINARIOS

Elaboró: M. en I. Carlos Alvarez Maciel 2024

AVISO INTRODUCTORIO:

Los problemas incluidos en esta guía sólo sirven para el estudio y la preparación de los exámenes extraordinarios de la asignatura de Cálculo II, por lo que no necesariamente serán incluidos en futuras emisiones de dichos exámenes. Sin embargo, el nivel de dificultad es muy similar al de los reactivos de estos exámenes, al igual que su desarrollo y resolución. Se recomienda complementar esta guía con la consulta de la siguiente bibliografía:

Colley, S.J. (2013). *Cálculo Vectorial* (4ª ed.). México: Pearson.

Larson, R., Edwards, B.H. (2023). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Cengage.

Rogawski, J. (2012). *Cálculo. Varias Variables* (2ª ed.). España: Reverté.

Salas, S., Hille, E., Etgen, G. (2003). *Calculus. Una y Varias Variables. Vol. II* (4ª ed.). España: Reverté.

Stewart, J., Clegg, D., Watson, S. (2021). *Cálculo de Varias Variables. Trascendentes Tempranas*. México: Cengage.

Además, se recomienda al estudiante acompañarse de papel y lápiz para ir resolviendo los problemas a la par de la lectura de esta guía.

PARTE 1. ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$ Y TRANSFORMACIONES LINEALES

1) Dados los vectores A = (2,–6,–3), B = (4,3,–1) y C = (3,5,–2), realizar la operación $B \cdot [(A + B) \times (B - C)]$.

Resolución:

En la operación solicitada, los corchetes marcan que la operación principal es el producto punto que está fuera, pero primero se deben realizar las operaciones encerradas en el corchete, el cual a su vez tiene unos paréntesis:

$$A + B = (2, -6, -3) + (4,3, -1) = (6, -3, -4)$$

$$B - C = (4,3, -1) - (3,5, -2) = (1, -2,1)$$

Luego se realiza el producto cruz:

$$(A + B) \times (B - C) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Efectuando la expansión en cofactores del primer renglón:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = +\hat{\imath}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = +\hat{\imath}(-3 - 8) - \hat{\jmath}(6 + 4) + \hat{k}(-12 + 3)$$

Entonces:

$$(A + B) \times (B - C) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -11\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 9\hat{k} = (-11, -10, -9)$$

Finalmente, ya se puede realizar el producto punto:

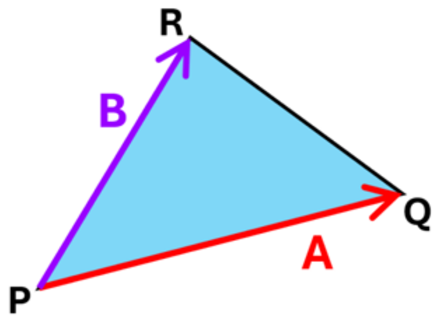
$$B \cdot [(A + B) \times (B - C)] = (4,3, -1) \cdot (-11, -10, -9) = -44 - 30 + 9$$

$$B \cdot [(A + B) \times (B - C)] = -65$$

2) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P(0,2,2), Q(2,0,1) y R($^5/_2$,2,–$^1/_2$).

Resolución:

Para calcular el área del triángulo, se van a definir dos vectores que conecten los puntos; arbitrariamente se toma como punto base el punto P:

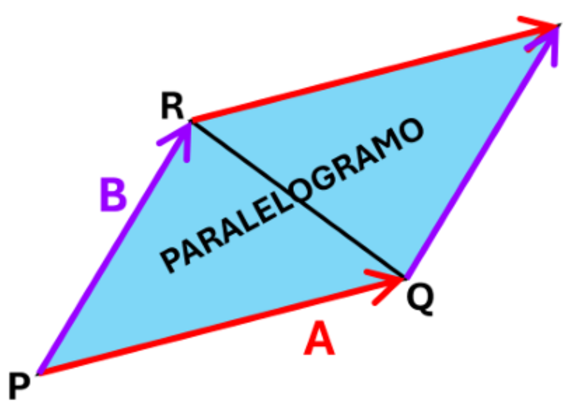


Cada uno de estos vectores se obtiene de la resta del punto final menos el punto inicial, pues a cada punto le corresponde un vector asociado que parte del origen, y entonces el vector que los conecta es la resta o diferencia de vectores:

$$A = Q - P = (2,0,1) - (0,2,2) = (2,-2,-1)$$

$$B = R - P = \left(\frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) - (0,2,2) = \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right)$$

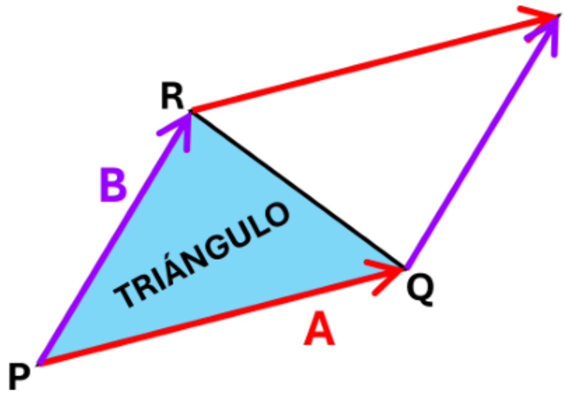
Estos vectores generan un paralelogramo al trasladarlos en forma paralela:



y su área se calcula mediante la magnitud del producto cruz de los vectores:

$$\acute{A}rea_{Paralelogramo} = |A \times B|$$

El triángulo deseado abarca la mitad del paralelogramo:



por lo que su área es la mitad de la calculada mediante la magnitud del producto cruz:

$$\acute{A}rea_{Triángulo} = \frac{|A \times B|}{2}$$

Entonces, calculando el producto cruz de los vectores A y B:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

Para simplificar este cálculo, se aplica la propiedad de los determinantes correspondiente a un factor común en una columna o renglón, este factor sale del determinante:

$$A \times B = \frac{5}{2}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando la expansión en cofactores con el primer renglón:

$$A \times B = \frac{5}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{5}{2}\left[+\hat{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{5}{2}\left[\hat{\imath}(2+0) - \hat{\jmath}(-2+1) + \hat{k}(0+2)\right] = \frac{5}{2}\left[2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}\right]$$

$$= 5\hat{\imath} + \frac{5}{2}\hat{\jmath} + 5\hat{k} = \left(5, \frac{5}{2}, 5\right)$$

Finalmente, el área del triángulo es:

$$Área_{Triángulo} = \frac{|A \times B|}{2} = \frac{\sqrt{(5)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25 + \frac{25}{4} + 25}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{100}{4} + \frac{25}{4} + \frac{100}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{225}{4}}}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}$$

3) Dados los vectores A=(–1,2,–2) y B=(3,6,2), calcular la componente de A sobre B y la proyección de B en la dirección del vector A–B.

Resolución:

La **componente** del vector A en la dirección del vector B se calcula como:

$$Comp_B A = \frac{A \cdot B}{|B|}$$

$$= \frac{(-1,2,-2) \cdot (3,6,2)}{\sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (2)^2}} = \frac{-3 + 12 - 4}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

El **vector resta** resulta ser:

$$A - B = (-1,2,-2) - (3,6,2) = (-4,-4,-4)$$

Entonces, la **proyección** del vector B sobre el vector resta es:

$$Proy_{A-B}\, B = \frac{B \cdot (A - B)}{|A - B|^2}(A - B)$$

$$= \frac{(3,6,2) \cdot (-4,-4,-4)}{(-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2}(-4,-4,-4) = \frac{-12 - 24 - 8}{16 + 16 + 16}(-4,-4,-4)$$

$$= \frac{-44}{48}(-4,-4,-4) = -\frac{11}{12}(-4,-4,-4) = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

4) Construir la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,5,–1) y (2,–3,1).

Resolución:

La ecuación vectorial de la recta se construye a partir de dos elementos: el punto pivote y el vector director. Para el punto pivote se toma cualquiera de los dos puntos que se dan como dato; en este caso se escogió al azar:

$$P_0 = (1{,}5, -1)$$

Para obtener el vector director, se le calcula a partir de la resta de los vectores asociados a los puntos, recordando que el vector resta es el punto final menos el punto inicial:

$$A = (2, -3{,}1) - (1{,}5, -1) = (1, -8{,}2)$$

Finalmente, se desarrolla la ecuación vectorial de la recta:

$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (1{,}5, -1) + t(1, -8{,}2)$$

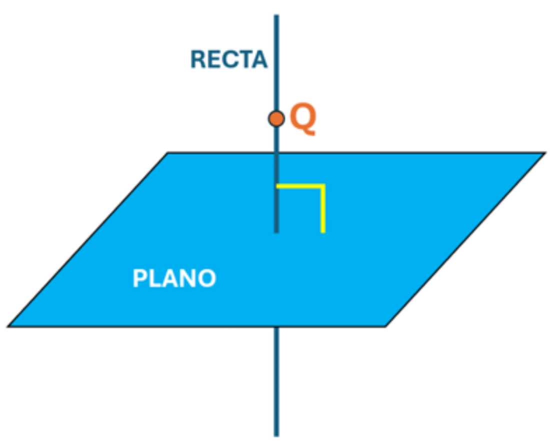
Y se puede compactar más si se suman los vectores del lado derecho de la ecuación:

$$(x, y, z) = (1 + t, 5 - 8t, -1 + 2t)$$

5) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,–1,5) y es perpendicular al plano 4x+2y+9z+14=0.

Resolución:

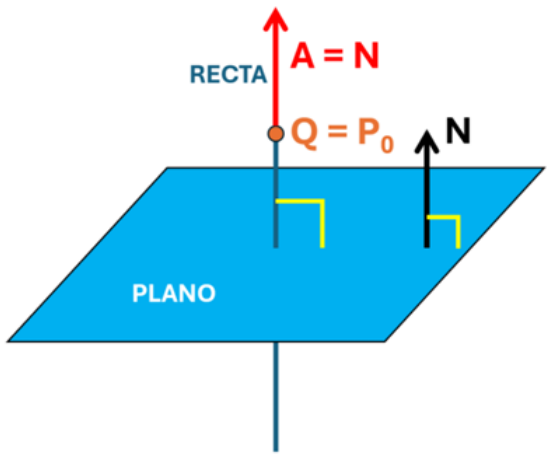
Se recomienda realizar un bosquejo o dibujo de las partes del problema para facilitar el planteamiento de su resolución; no se recomienda graficar con exactitud porque es más tardado o podría quedar en un ángulo de visión no adecuado. También se recomienda nombrar las partes, como por ejemplo el punto (1,–1,5) puede llamarse Q:



La recta necesita dos elementos para ser construida: punto pivote y vector director. Como el vector normal del plano es ortogonal al plano, va en paralelo a la recta, entonces se le toma prestado como el vector director de la recta, pues sólo interesa su dirección, no su magnitud; recuérdese que los coeficientes de la ecuación del plano son los componentes del vector normal:

$$4x + 2y + 9x = -14$$

$$A = N = (4,2,9)$$



En cuanto al punto pivote, como sólo se conoce al punto Q(1,–1,5) de la recta, entonces se le toma como punto pivote:

$$P_0 = Q = (1, -1,5)$$

Estos elementos se sustituyen en la ecuación vectorial de la recta:

$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (1, -1,5) + t(4,2,9)$$

Opcionalmente se puede efectuar la suma de vectores del lado derecho de la ecuación, para compactarla más:

$$(x, y, z) = (1 + 4t, -1 + 2t, 5 + 9t)$$

6) Determinar la ecuación cartesiana (o normal) del plano que contenga al punto (1,7,–1), y que sea perpendicular a la línea de intersección de los planos –x+y–8z=4 y 3x–y+2z=0.

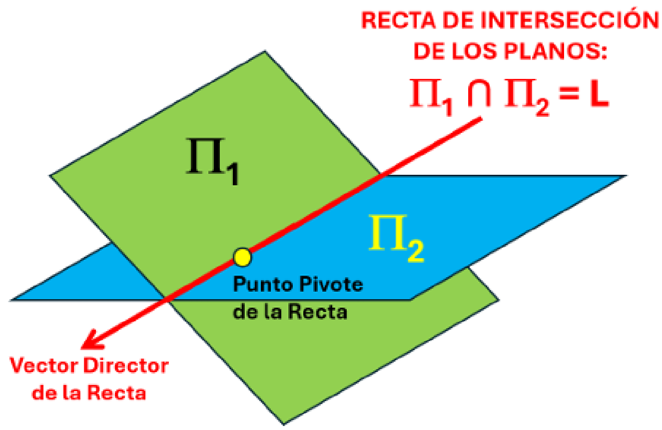
Resolución:

Para construir la ecuación del plano se necesitan dos elementos: el punto pivote y el vector normal. En este caso, el punto conocido (1,7,–1) se toma como el punto pivote:

$$P_0 = (1,7,-1)$$

Para el vector normal, debe primero determinarse la intersección de los dos planos que el problema da como dato:

$$\Pi_1: -x + y - 8z = 4$$
$$\Pi_2: \quad 3x - y + 2z = 0$$



Estos planos constituyen un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, el cual puede resolverse por algún método algebraico; el más común y que tiene más ventajas es el **método de Gauss-Jordan**:

$$\left.\begin{aligned}-x + y - 8z &= 4\\ 3x - y + 2z &= 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1(-3) + R_2 = R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -22 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & -11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1 = R_1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{cases} x - 3z = 2 \\ y - 11z = 6 \end{cases}$$

El sistema posee un grado de libertad, el cual corresponde a la variable z pues es la que está presente en ambas ecuaciones. Si se le asigna un parámetro z = t, entonces al despejar las otras variables:

$$\begin{cases} x = 2 + 3z \\ y = 6 + 11z \\ z = t \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 6 + 11t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Nótese que se le añadió un cero a la zeta para obtener una expresión similar a la de equis y de ye. Este resultado se puede representar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 6 + 11t \\ 0 + t \end{pmatrix}$$

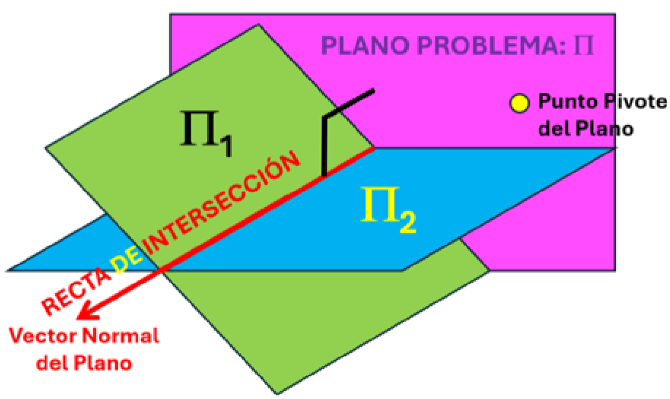
O bien, si se descompone la segunda matriz en dos matrices:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En la última matriz se factorizó la t. Se obtienen tres matrices columna, las cuales corresponden a vectores:

$$(x, y, z) = (2,6,0) + t(3,11,1)$$

Esta ecuación es la de una recta, donde el punto pivote es (2,6,0) y el vector director es (3,11,1). De acuerdo con el enunciado del problema, esta recta es ortogonal al plano deseado:



Entonces se puede tomar al vector director de la recta como vector normal del plano, pues lo importante es que tiene una dirección a 90° del plano:

$$N = (3,11,1)$$

Y se desecha el punto pivote de la recta (2,6,0) al no estar incluido en el plano, además que el plano ya posee punto pivote.

Finalmente, se desarrolla la ecuación cartesiana del plano:

$$N \cdot P = N \cdot P_0$$

$$(3,11,1) \cdot (x, y, z) = (3,11,1) \cdot (1,7,-1)$$

$$3x + 11y + z = 3 + 77 - 1$$

$$3x + 11y + z = 79$$

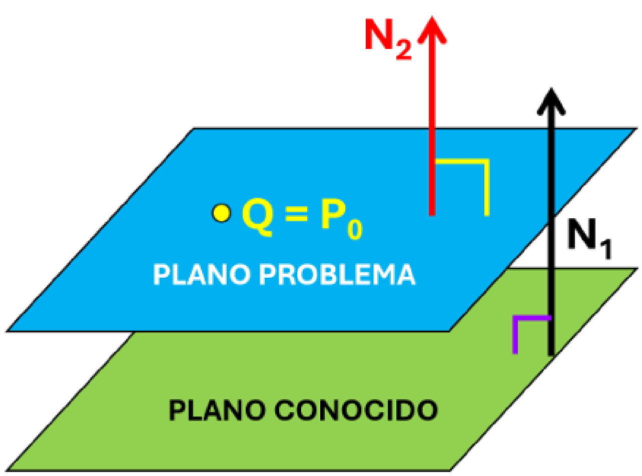
7) Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto Q(–2,3,–4), y que es paralelo al plano x–3y+7z=11.

Resolución:

Para construir el plano se necesitan dos elementos: punto pivote y vector normal. El punto Q es el único conocido hasta el momento que está incluido en el plano, por esto se le toma como el punto pivote:

$$P_0 = Q = (-2,3,-4)$$

Como además el plano que pasa por Q debe ser paralelo al plano x–3y+7z=11, y por este paralelismo los vectores normales de ambos planos también son paralelos:



Entonces se puede tomar prestado el vector normal del plano x–3y+7z=11 para que funja como el vector normal del plano que se está calculando. Recuérdese que los coeficientes de las variables x,y,z de la ecuación del plano corresponden a los componentes del vector normal:

$$1x - 3y + 7z = 11$$

$$N = (\underset{x}{1}, \underset{y}{-3}, \underset{z}{7})$$

Por lo tanto, el vector normal del plano que pasa por Q es:

$$N = (1, -3,7)$$

Finalmente, se desarrolla la ecuación cartesiana del plano:

$$N \cdot P = N \cdot P_0$$

$$(1, -3,7) \cdot (x, y, z) = (1, -3,7) \cdot (-2,3, -4)$$

$$x - 3y + 7z = -2 - 9 - 28$$

$$x - 3y + 7z = -39$$

8) Verificar la independencia lineal del conjunto de vectores { (1,0,5), (2,1,0), (1,1,1) }.

Resolución:

La independencia lineal de un conjunto de vectores se determina a partir de la **combinación lineal** de los mismos para generar al vector nulo:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \bar{O}$$

donde los parámetros escalares λ_1, λ_2, λ_3 deben tener como **única solución**:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

A este resultado se le llama ***solución trivial***.

Primero se sustituyen los vectores en la combinación lineal:

$$\lambda_1(1,0,5) + \lambda_2(2,1,0) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$$

Esta ecuación vectorial se desglosa en sus componentes:

Componente x:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Componente y:

$$0\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Componente z:

$$5\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Estas ecuaciones son escalares y constituyen un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, el cual se puede resolver mediante algún método matricial; el más común y el que más información aporta es el ***método de Gauss-Jordan***, pero como sólo interesa determinar si hay una única solución, se puede seguir una versión abreviada conocida como **Eliminación Gaussiana**:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{R_1(-5)+R_3=R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Antes de continuar, se puede observar que la columna aumentada (la última después de la raya) siempre va a dar cero con cualquier operación elemental entre renglones; se puede omitir esta columna y al final se le vuelve a escribir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2(10)+R_3=R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\left(\frac{1}{6}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regresando la columna aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se puede observar que los grados de libertad son cero, entonces hay una única solución y es la trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Otra forma de determinar la independencia lineal es mediante la **Regla de Cramer**, siempre y cuando el sistema de ecuaciones sea cuadrado. En este método, si el determinante del sistema es diferente de cero, entonces el sistema posee una única solución, que en el caso de un sistema homogéneo como el de este problema (todas las ecuaciones están igualadas a cero), sería la solución trivial:

$$\Delta s = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Por ser un determinante de 3×3, se puede emplear la ***Regla de Sarrus***:

$$\Delta s = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right| = 1 + 10 + 0 - 5 - 0 - 0 = 6$$

Como el resultado del determinante es diferente de cero, entonces el sistema sí tiene como solución única a la trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y entonces se puede concluir que los vectores sí son **linealmente independientes**.

9) Determinar si la transformación T(x,y) = (x+y,3y) es lineal.

Resolución:

Una transformación es lineal si cumple con las dos **propiedades de la linealidad**:

$$1)\ \ T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$2)\ \ T(\alpha u) = \alpha T(u)\ ;\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Para verificar la linealidad de la transformación, conviene reescribirla en forma matricial:

$$T(x,y) = (x+y, 3y)$$
$$\mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3y \end{pmatrix}$$

Luego se deben inventar dos vectores u y v pertenecientes al dominio de la transformación:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3y \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Estos vectores se sustituyen en cada una de las propiedades de la linealidad:

Propiedad 1:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Y se desarrollan las transformaciones de acuerdo con la transformación original:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3y \end{pmatrix}$$

Lado derecho de la Propiedad 1:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$$

Lado izquierdo de la Propiedad 1:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \boxed{x_1+x_2} \\ \boxed{y_1+y_2} \end{pmatrix}\begin{array}{l} {\scriptstyle = x} \\ {\scriptstyle = y} \end{array} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ 3(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$$

Comparando ambos lados de la Propiedad 1:

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$$

se observa que son iguales, entonces sí se cumple la Propiedad 1.

Propiedad 2:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)\,; \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Lado derecho de la Propiedad 2:

$$\alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \alpha(3y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ 3\alpha y_1 \end{pmatrix}$$

Lado izquierdo de la Propiedad 2:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ 3\alpha y_1 \end{pmatrix}$$

Comparando ambos lados de la Propiedad 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ 3\alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ 3\alpha y_1 \end{pmatrix}$$

se observa que son iguales, entonces también se cumple la Propiedad 2.

En conclusión, como se verifica el cumplimiento de las dos propiedades de linealidad, entonces la transformación sí es **lineal**.

10) Obtener la transformación lineal asociada a la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Resolución:

El tamaño de la matriz indica la estructura dominio-contradominio de la transformación lineal:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

El dominio está dado por las columnas mientras que el contradominio por los renglones:

$$\mathbb{R}^{3}\longrightarrow\mathbb{R}^{2}$$

Entonces para obtener la transformación lineal, se debe multiplicar la matriz por un vector del dominio:

$$A\bar{x}=T(\bar{x})$$

Como el dominio está en $\mathbb{R}^3$, entonces un vector representativo del dominio es:

$$\bar{x}=(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Finalmente, se multiplica la matriz A por el vector (x,y,z) pero éste en su forma matricial:

$$A\bar{x}=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}}\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}=\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}2x+y-z\\ x+0y-2z\end{pmatrix}}$$

Por lo tanto, la transformación lineal asociada a la matriz A es:

$$T(\bar{x})=T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\ x-2z\end{pmatrix}$$

PARTE 2. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

11) Hallar el dominio de la función escalar:

$$f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{x-y}}}{x^2 + y^2}$$

Resolución:

Primero se deben determinar las restricciones de las operaciones involucradas:

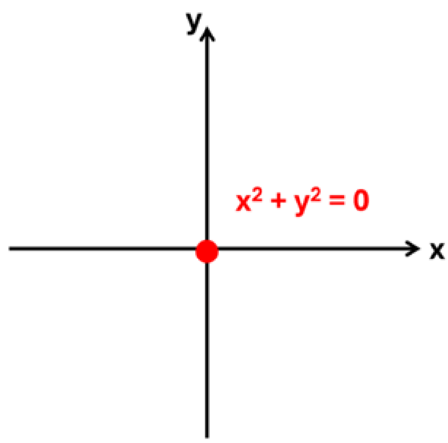
Restricción 1: como la operación principal es la **división**, el denominador no puede ser igual a cero:

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

¿Cuándo sería igual a cero? La ecuación corresponde a una circunferencia:

$$x^2 + y^2 = \overset{r^2}{0}$$

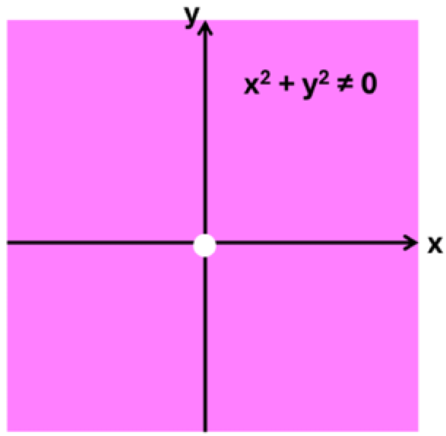
pero de radio cero, lo cual sólo se cumple cuando equis y ye son cero, entonces:



$$x \neq 0\,, y \neq 0$$

o también esto se puede escribir como:

$$(x,y) \neq (0,0)$$

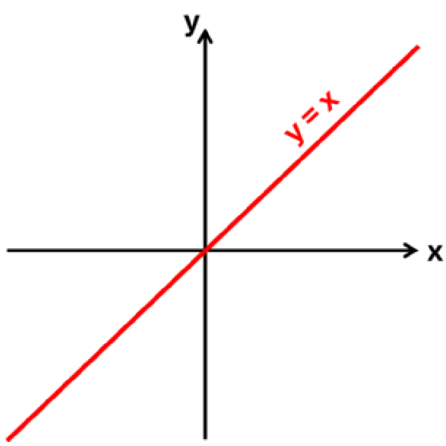


Restricción 2: la **exponencial** no genera ninguna restricción, excepto por el tipo de argumento (exponente) que tenga; en este caso hay una **división**, por lo que su denominador debe ser diferente a cero:

$$x - y \neq 0$$

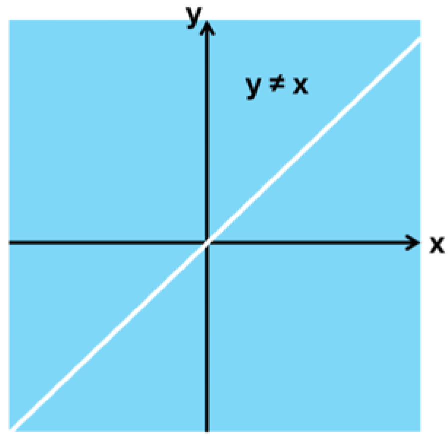
Como ecuación, es una recta:

$$x - y = 0 \longrightarrow y = x$$



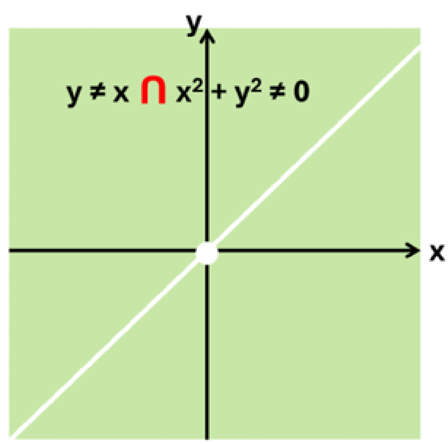
Entonces, la restricción resulta ser:

$$y \neq x$$



Finalmente, para que se cumplan las dos restricciones al mismo tiempo, se debe efectuar su **intersección**, lo cual corresponde sólo a la parte repetida de ambas regiones:

$$(x, y) \neq (0,0) \;\cap\; y \neq x$$



Se puede observar que el punto (0,0) ya está contenido en la recta y=x, entonces el dominio de la función resulta ser:

$$Domf(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x\}$$

O simplemente:

$$y \neq x$$

12) Determinar el dominio de la función vectorial:

$$r(t) = ln(t^2 - 1)\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\hat{\jmath}$$

Resolución:

Conviene primero expresar a la función vectorial como un arreglo ordenado:

$$r(t) = \left(ln(t^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right)$$

Luego se determinan las restricciones de cada uno de los componentes de la función:

Restricción 1: en el primer componente la operación principal es el **logaritmo**, cuyo argumento no puede ser cero ni tomar valores negativos, sólo valores positivos:

$$t^2 - 1 > 0$$

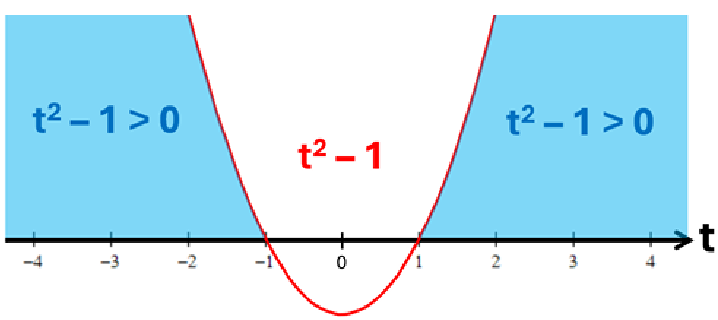
Resulta en una desigualdad cuadrática, la cual puede resolverse gráficamente y corresponde a una parábola que abre para arriba y cruza al eje donde se hace cero:

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

La desigualdad marca que de la parábola sólo se toma la parte positiva, es decir, la que queda sobre el eje sin incluir a los cruces:



Entonces el intervalo solución es:

$$t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Restricción 2: en el segundo componente la operación principal es una **división**, por lo que su denominador debe ser diferente de cero:

$$\sqrt{1 - t^2} \neq 0$$

Y como tiene una **raíz cuadrada**, su radicando (lo que está dentro de la raíz) debe ser positivo, pero no cero porque está en el denominador:

$$1 - t^2 > 0$$

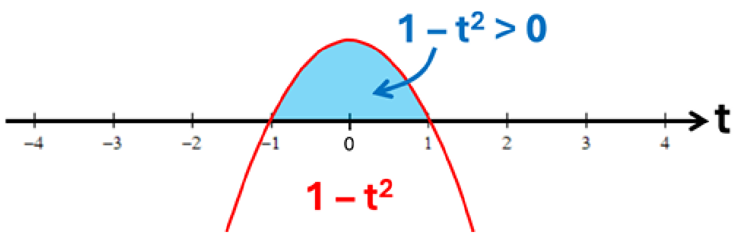
Entonces la restricción se reduce a esta desigualdad cuadrática, cuya resolución también se puede hacer de forma gráfica, pero primero se determinan los cruces con el eje:

$$1 - t^2 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

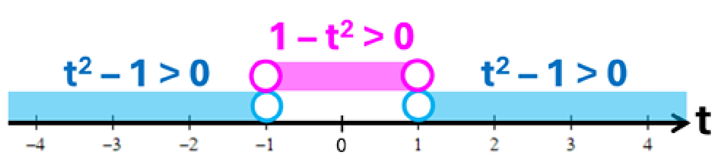
Y corresponde a una parábola que abre para abajo porque el coeficiente de t^2 es negativo. La desigualdad señala que de toda la parábola sólo se toma la porción positiva, es decir, la parte ubicada por arriba del eje:



Entonces el intervalo solución resulta ser:

$$t \in (-1,1)$$

Finalmente, se realiza la intersección de todas las restricciones:



Se puede observar que como ningún punto del eje se repite, entonces no hay intersección, lo cual se expresa mediante el conjunto vacío:

$$t = \emptyset$$

En conclusión, la función vectorial r(t) no posee dominio:

$$Dom\, r(t) = \emptyset$$

y en consecuencia, esta función no se puede graficar ni derivar, ni efectuar ningún tipo de operaciones con ella.

13) Verificar la continuidad de la función f en el punto (0,0,0):

$$f(x,y,z) = \frac{z^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} - z}$$

Resolución:

Para determinar la continuidad de la función en el punto (x,y,z) = (0,0,0), se deben cumplir los siguientes requisitos:

a) La función debe existir en el punto.

b) El límite de la función debe existir.

c) El límite debe ser igual a la función.

Verificando cada uno de estos requisitos:

a) **Existencia de la función**:

$$f(0,0,0) = \frac{(0)^2 - ((0)^2 + (0)^2)}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2} - 0} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es una forma indeterminada, esto significa que el punto (0,0,0) no forma parte del dominio de la función, por lo tanto, la función **no existe** en dicho punto, siendo éste una **discontinuidad**. Hasta aquí termina la resolución del problema, pero si se desea determinar el tipo de discontinuidad, entonces se calcula el límite:

b) **Existencia del límite**:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} - z}$$

Este límite está indeterminado, y su cálculo puede efectuarse mediante varios caminos, los más convenientes son:

Coordenadas Polares: en $\mathbb{R}^3$ hay dos coordenadas polares, en este caso conviene usar las **coordenadas cilíndricas**:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} - z} = \lim_{(r,z)\to(0,0)} \frac{z^2 - r^2}{r - z}$$

Se observa que se puede efectuar una factorización, pues en el numerador hay una resta de cuadrados:

$$= \lim_{(r,z)\to(0,0)} \frac{(z-r)(z+r)}{r-z}$$

y en el denominador conviene factorizar el signo menos:

$$= \lim_{(r,z)\to(0,0)} \cancelto{1}{\frac{(z-r)(z+r)}{-(z-r)}} = \lim_{(r,z)\to(0,0)} \frac{z+r}{-1} = \frac{0+0}{-1} = 0$$

Operaciones Algebraicas: para quitar la raíz cuadrada del denominador se multiplica por su conjugado, pues se trata de una resta de raíces:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^2-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}-z}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{\sqrt{x^2+y^2}+z}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{[z^2-(x^2+y^2)]\left(\sqrt{x^2+y^2}+z\right)}{(x^2+y^2)-z^2}$$

Conviene factorizar un signo menos en el denominador para obtener un factor idéntico al del numerador:

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \cancelto{1}{\frac{[z^2-(x^2+y^2)]}{-[z^2-(x^2+y^2)]}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+z\right) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}+z\right)}{-1}$$

Y se evalúa el límite:

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{-1} = \frac{\sqrt{(0)^2+(0)^2}+0}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

En ambos caminos, el denominador ya es diferente de cero, por esta razón el resultado es cero. Como el **límite sí existe**, entonces el punto (0,0,0) es una **discontinuidad removible**, lo cual corresponde a un hueco en la función f(x,y,z).

14) Calcular el $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$.

Resolución:

Primero se debe evaluar el límite en el punto de tendencia, aplicando la **propiedad de sustitución**:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} = \frac{0+1-1}{\sqrt{0}-\sqrt{1-1}} = \frac{0}{0}$$

Está indeterminado, por lo que se debe ahora aplicar el **teorema de la función equivalente**, es decir, como la función es algebraica (sólo tiene operaciones algebraicas: suma, resta, multiplicación, raíz cuadrada, etc.), se aplican operaciones algebraicas (factorizaciones, productos notables, racionalización) para transformarla en una función equivalente más simplificada. En este caso, en el denominador hay una resta de raíces cuadradas, entonces conviene multiplicar por su conjugado:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}\right)$$

El conjugado se multiplica tanto arriba (numerador) como abajo (denominador) conformando un factor que vale uno, y la función original multiplicada por uno no se altera. Nótese además que el radicando (lo de adentro de la raíz) nunca cambia de signo, sólo se cambia el signo afuera de la raíz. Esta multiplicación por el conjugado del denominador produce una resta de cuadrados:

$$\overset{a\ -\ b}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-y}\right)}\overset{a\ +\ b}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)} \overset{=}{=} \overset{a^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \overset{-}{-} \overset{b^2}{\left(\sqrt{1-y}\right)^2}$$

Y el cuadrado aplicado a cada raíz la simplifica:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right) = x-(1-y) = x-1+y$$

Entonces, el desarrollo del límite queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\cancelto{1}{(x+y-1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)}{\cancel{x-1+y}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)$$

Nótese que mientras no se efectúe la evaluación, se debe seguir escribiendo el operador límite, pues es la operación matemática por aplicarle a la función.

Finalmente, ya se puede evaluar el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right) = \sqrt{0}+\sqrt{1-1} = 0+0 = 0$$

Como el resultado sí pertenece a los reales y queda dentro del contradominio de la función escalar de la cual se calculó el límite, entonces el límite existe y vale cero:

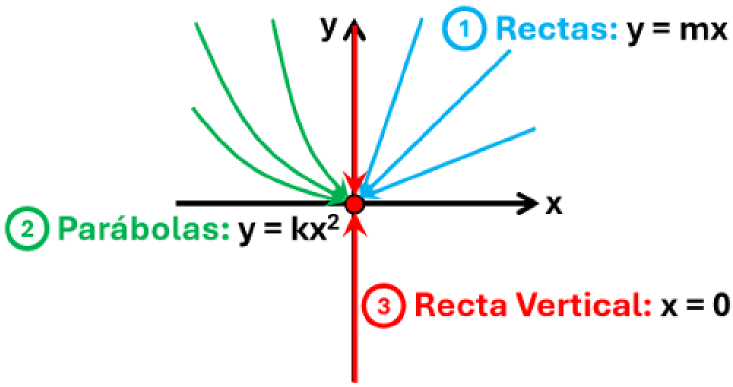
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} = 0$$

15) Considerando dos trayectorias diferentes que pasen por el origen, mostrar que el límite no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$$

Resolución:

Se pueden proponer varios tipos de trayectoria hacia el origen de $\mathbb{R}^2$:



Considerando el primer tipo de trayectoria, se sustituye en el límite la ecuación de las rectas, donde la pendiente m es una constante que puede tomar varios valores:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2-(mx)^2}{x^2+2(mx)^2} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2-m^2x^2}{x^2+2m^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2(2-m^2)}{x^2(1+2m^2)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2-m^2}{1+2m^2}$$

Como la pendiente m es una constante:

$$\lim_{x\to0} \frac{2-m^2}{1+2m^2} = \frac{2-m^2}{1+2m^2}$$

La pendiente m posee una infinidad de valores, pero el problema pide al menos dos trayectorias diferentes, es decir, dos rectas con pendiente diferente:

m = 1: corresponde a una recta inclinada 45°:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{2 - (1)^2}{1 + 2(1)^2} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

m = 0: corresponde a una recta horizontal que va sobre el eje x:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{2 - (0)^2}{1 + 2(0)^2} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Como se obtienen resultados distintos para dos trayectorias diferentes, entonces de acuerdo con el **Criterio de las Dos Trayectorias** el límite no existe; con este resultado ya no es necesario probar más trayectorias. Una observación importante: si el resultado del límite depende de algún parámetro constante como la pendiente m, y si este parámetro puede tener más de un valor diferente, entonces el límite no existe porque el resultado genera varios valores diferentes para el límite.

16) Calcula el límite del campo F(x,y) cuando en su dominio tiende al origen:

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{sen(x^2 - y^2)}{x - y}\right)$$

Resolución:

El enunciado pide calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{sen(x^2 - y^2)}{x - y}\right)$$

Igual que con cualquier otro límite, primero se aplica la **propiedad de sustitución**, es decir, se sustituye el punto de tendencia en la función:

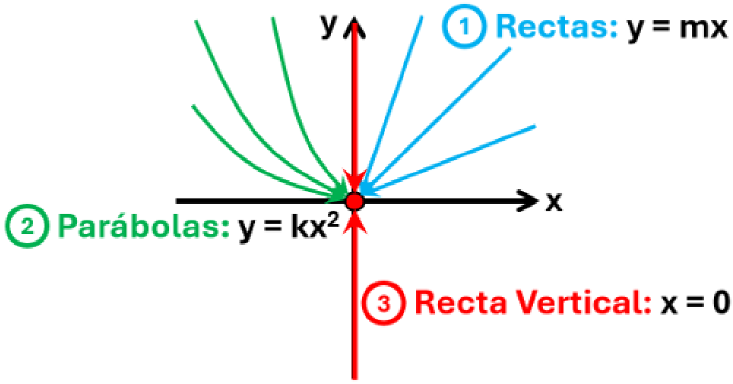
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{sen(x^2 - y^2)}{x - y}\right) = \left(\frac{(0)^2}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2}}, \frac{sen((0)^2 - (0)^2)}{0 - 0}\right)$$

$$= \left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$$

Los componentes del vector resultante están indeterminados. Entonces se aplica el **Teorema de la Función Equivalente** para poder calcular el límite; esta función equivalente se le obtiene mediante operaciones algebraicas (factorización, multiplicación por el conjugado, racionalización, etc.) o mediante el uso de alguna identidad. Este teorema se aplica en cada componente de forma independiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\overset{\mathbf{F_1}}{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \overset{\mathbf{F_2}}{\frac{sen(x^2 - y^2)}{x - y}}\right) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2 - y^2)}{x - y}\right)$$

El límite del primer componente **F₁** del campo vectorial no se puede efectuar mediante racionalización porque no se puede factorizar la suma de cuadrados x^2+y^2, entonces se efectúa mediante el **Criterio de las Dos Trayectorias**:



Trayectoria 1 – **Rectas**: se sustituye la ecuación en el límite: $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como ya se obtuvo la función equivalente tras simplificar las equis del numerador y del denominador, entonces ya se puede evaluar el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Da cero porque el denominador nunca se hace cero, pues para cualquier valor de m siempre $1+m^2$ genera un valor positivo diferente de cero.

Trayectoria 2 – **Parábolas**: se sustituye la ecuación en el límite: $y = kx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(kx^2)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k^2x^4}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2(1+k^2x^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\sqrt{1+k^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+k^2x^2}}$$

Se evalúa el límite una vez que se ha obtenido la función equivalente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+k^2x^2}}=\frac{0}{\sqrt{1+k^2(0)^2}}=\frac{0}{\sqrt{1+0}}=\frac{0}{\sqrt{1}}=0$$

Da también cero porque el denominador 1 nunca va a ser igual a cero.

Trayectoria 3 – **Recta Vertical**: se sustituye la ecuación en el límite: $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{(0)^2}{\sqrt{(0)^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{0+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}$$

Aquí es importante resaltar que la función debe ser simplificada lo más posible; por concepto, el límite se calcula en el entorno reducido del punto de tendencia, es decir, ye se acerca a cero pero no toca al cero, entonces el numerador cero sí se puede dividir entre el denominador ye pues éste es diferente de cero en el entorno reducido del punto de tendencia:

$$\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to 0}0$$

El límite de una constante es la misma constante:

$$\lim_{y\to 0}0=0$$

Como por todas las trayectorias planteadas el límite dio como resultado el cero, entonces éste es el valor del límite.

Ahora se plantea el límite del segundo componente **F_2** del campo vectorial:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sen(x^2-y^2)}{x-y}$$

La función es una mezcla de una expresión algebraica (x – y) con una operación de tipo trascendente (el seno del numerador), entonces no se puede efectuar una operación algebraica como la factorización ni la racionalización, entre otras; para poder realizar el cálculo del límite se aplicará la **identidad**:

$$\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}=1$$

Aquí se observa que el denominador debe ser igual al argumento del seno, y ambos deben transformarse en cero en el punto de tendencia; si estas condiciones no se cumplen, no se puede aplicar la identidad. Para que el denominador (x – y) se vuelva igual al argumento del seno, se debe multiplicar la función por el conjugado del denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2-y^2)}{x-y}\left(\frac{x+y}{x+y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)sen(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$$

Recuérdese que debe realizarse esta multiplicación tanto arriba (numerador) como abajo (denominador), porque de esta forma se está multiplicando por un factor unitario (el neutro multiplicativo), el cual no afecta a la función original. Ahora ya se puede aplicar la identidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\left[\frac{sen(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\right] = (0+0)[1] = 0[1] = 0$$

Como ya se calcularon los límites de cada componente del campo vectorial, entonces su límite en el origen resulta ser:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{sen(x^2-y^2)}{x-y}\right) = (0,0)$$

PARTE 3. DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

17) Dada $z = x^2y - y^2$, donde $x = sen(t)$, $y = e^t$, calcular la derivada de zeta respecto a te cuando $t = 0$.

Resolución:

Existen tres formas de determinar la derivada de zeta respecto a te:

a) *Por* ***sustitución directa*** *(composición de funciones)*:

Se sustituye $x = sen(t)$, $y = e^t$, en la función $z = f(x,y)$:

$$z = \left(sen(t)\right)^2(e^t) - (e^t)^2$$

$$z = e^t sen^2(t) - e^{2t}$$

La función resultante sólo depende de t, por lo que se puede derivar directamente:

$$\frac{dz}{dt} = e^t[2sen(t)cos(t)] + e^t sen^2(t) - 2e^{2t}$$

b) *Mediante la* ***Regla de la Cadena***:

La Regla de la Cadena del Cálculo Vectorial es el producto de las matrices jacobianas de las funciones que conforman la composición:

$$D\left(z \circ \left(x(t), y(t)\right)\right) = Dz|_{x(t),y(t)}\, D\left(x(t), y(t)\right)$$

Nótese que la multiplicación de las jacobianas es en el orden en que se escribe la composición.

La función principal z(x,y) es una función escalar cuya estructura es: $z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; el tamaño de su matriz jacobiana resulta ser de 1×2, pues se le predice como:

$$\mathbb{R}^{2} \longrightarrow \mathbb{R}^{1}$$

Entonces:

$$Dz = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 2y \end{pmatrix}$$

Y se le evalúa en (x,y) dependientes de la variable t:

$$Dz|_{x(t),y(t)} = \left(2\left(sen(t)\right)(e^t) \quad \left(sen(t)\right)^2 - 2(e^t)\right) = \begin{pmatrix} 2e^t sen(t) & sen^2(t) - 2e^t \end{pmatrix}$$

En el caso de (x,y), constituyen una función vectorial de variable escalar cuya estructura es: $(x, y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. De igual manera que la función anterior, el tamaño de su matriz jacobiana resulta ser de 2×1, ya que:

$$\mathbb{R}^{1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2}$$

Entonces:

$$D\big(x(t), y(t)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

Finalmente, se efectúa la multiplicación de las matrices jacobianas:

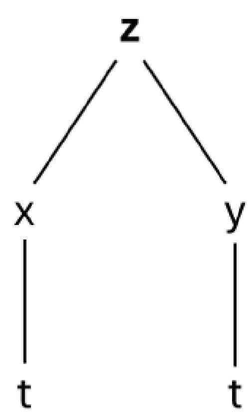
$$D\left(z \circ \big(x(t), y(t)\big)\right) = \begin{pmatrix} 2e^t sen(t) & sen^2(t) - 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$= 2e^t sen(t) cos(t) + (sen^2(t) - 2e^t)e^t = \frac{dz}{dt}$$

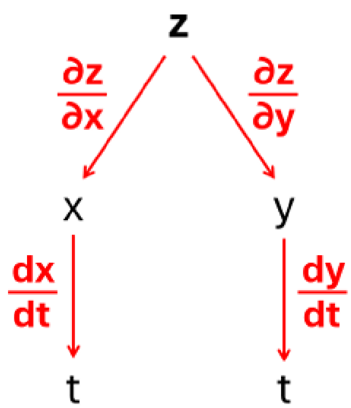
Este resultado es el mismo que el obtenido por el método anterior.

c) *Mediante* ***Trayectorias*** *(en la estructura de la composición)*:

Se construye un diagrama donde se represente la dependencia de z con las demás variables:



Como la derivada de z es respecto a t, las trayectorias a seguir para el cálculo de la derivada son:



Lo cual se expresa algebraicamente como:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Nótese que las derivadas de x y de y son **ordinarias** porque sólo dependen de una única variable: t. Lo mismo pasa con la derivada compuesta de zeta, pues al final se está derivando con respecto a la variable independiente única t.

Desarrollando cada una de las derivadas:

$$\frac{dz}{dt} = (2xy)\big(cos(t)\big) + (x^2 - 2y)(e^t)$$

Se obtiene un resultado con variables mezcladas, y como en realidad se está derivando una composición y la variable independiente final de esta composición debe ser t, deben sustituirse x = sen(t), y = e^t:

$$\frac{dz}{dt} = (2sen(t)e^t)\big(cos(t)\big) + (sen^2(t) - 2e^t)(e^t)$$

Este resultado es el mismo que el generado por los métodos anteriores:

$$\frac{dz}{dt} = 2e^t sen(t)cos(t) + e^t sen^2(t) - 2e^{2t}$$

Finalmente, el problema solicita la evaluación de la derivada cuando t = 0:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 2e^0 sen(0)cos(0) + e^0 sen^2(0) - 2e^{2(0)}$$

$$= 2(1)(0)(1) + (1)(0)^2 - 2(1) = 0 + 0 - 2$$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = -2$$

18) Dadas las funciones z = f(x,y) y G(u,v) = (u+v , u–v), para la composición z◦G probar que:

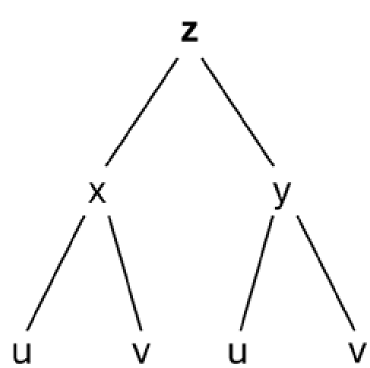
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Resolución:

Para la composición, la función G debe darle a la función z = f(x,y) un vector (x,y):

$$G(u,v) = (\overset{x}{u+v}, \overset{y}{u-v})$$

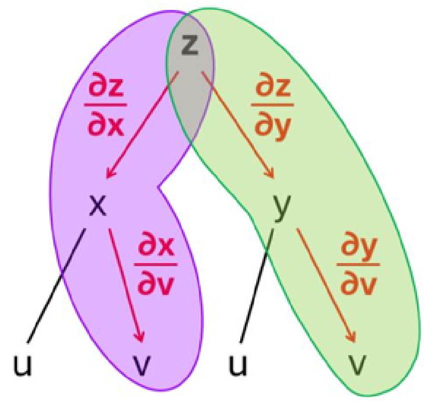
Pero como en la función z = f(x,y) se desconoce la operación matemática que transforma al vector (x,y) en z, no se puede entonces realizar la composición, es decir, la sustitución de G en f. Por lo tanto, de los tres métodos para calcular la derivada de la composición, sólo se puede emplear el **método de las trayectorias**:



Recuérdese que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Entonces, para obtener la segunda derivada de zeta respecto de v primero y luego respecto a u, se debe calcular por trayectorias la **primera derivada** respecto a v:

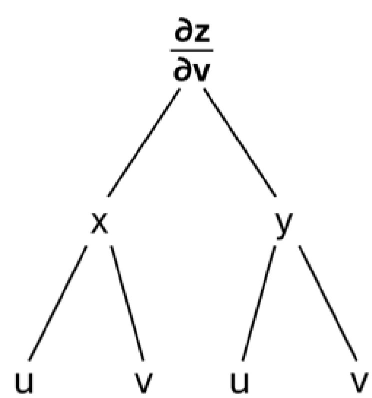


$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

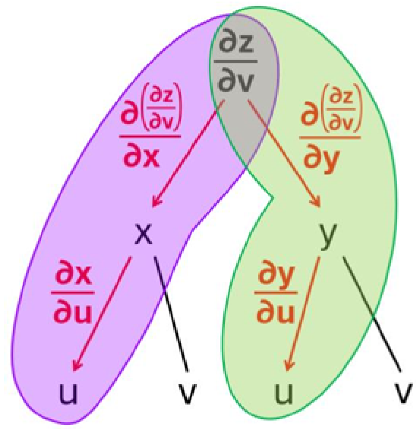
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(-1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

Nótese que quedan indicadas las derivadas de zeta respecto a equis y a ye porque se desconoce la forma de la función. Sin embargo, si se conocieran estas derivadas, seguro dependen de equis y de ye, por lo que la estructura para plantear el cálculo de la segunda derivada es:



La **segunda derivada** respecto a u se calcula como:



$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

En este desarrollo se sustituye directamente la derivada de z respecto a v, y se calculan las otras derivadas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}(1) + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}(1)$$

donde:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

De acuerdo con el **Teorema de Clairaut**, si la función z = f(x,y) es continua:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Y con esto se demuestra el enunciado del problema.

19) Desarrollar la diferencial total de f(x,y) = 2xsen(y) – $3x^2y^2$.

Resolución:

La función es escalar de variable vectorial: $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y como su dominio está en $\mathbb{R}^2$, se pueden calcular dos derivadas parciales, por lo que la diferencial total posee dos términos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Calculando las derivadas parciales:

$$df = (2sen(y) - 6xy^2)dx + (2xcos(y) - 6x^2y)dy$$

Nótese que las diferenciales dx y dy sólo quedan expresadas, no se les calcula.

20) Dada la función $F(x,y,z) = \left(x^3e^{y^3}, z^{-1}sen(x^2y^3)\right)$, desarrollar la matriz jacobiana.

Resolución:

Como la función $F(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, el tamaño de la matriz jacobiana se predice como:

$$\mathbb{R}^{3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2}$$

Entonces la jacobiana queda de tamaño 2×3. Además, conviene simbolizar cada componente de la función como:

$$F(x,y,z) = \left(\overset{\mathbf{F_1}}{x^3e^{y^3}}, \overset{\mathbf{F_2}}{z^{-1}sen(x^2y^3)}\right)$$

La construcción de la matriz jacobiana se efectúa derivando cada componente de la función vectorial respecto a cada variable independiente:

$$DF = \begin{array}{cc} \begin{matrix} F_1 \\[3ex] F_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \boxed{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} \quad x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array}$$

Como se muestra, se construye por coordenadas para quedar de la siguiente forma:

$$DF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Calculando cada una de las derivadas parciales:

$$DF = \begin{pmatrix} 3x^2e^{y^3} & 3x^3y^2e^{y^3} & 0 \\ 2xy^3z^{-1}cos(x^2y^3) & 3x^2y^2z^{-1}cos(x^2y^3) & -z^{-2}sen(x^2y^3) \end{pmatrix}$$

21) Obtener el gradiente de f(x,y,z) = $3x^2yz + 5xz + 6$, en el punto (1,–2,–1).

Resolución:

Como la función $f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tiene dominio $\mathbb{R}^3$, entonces el gradiente tiene tres componentes:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces:

$$\nabla f = (6xyz + 5z, 3x^2z, 3x^2y + 5x)$$

Finalmente se evalúa el gradiente en el punto indicado por el problema:

$$\nabla f(1,-2,-1) = \big(6(1)(-2)(-1) + 5(-1), 3(1)^2(-1), 3(1)^2(-2) + 5(1)\big)$$

$$\nabla f(1,-2,-1) = (12 - 5, -3, -6 + 5) = (7, -3, -1)$$

22) Hallar el plano tangente a la función $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto (1,–1,4).

Resolución:

La función depende de las variables x,y,z:

$$f(x,y,z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

y al estar igualada a cero, entonces corresponde a una superficie de nivel. El gradiente de esta función es ortogonal a la superficie, por lo que corresponde al vector normal del plano tangente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-4x, -4y, 2z)$$

Evaluando el gradiente en el punto de tangencia (1,–1,4):

$$N = \nabla f(1,-1,4) = \big(-4(1), -4(-1), 2(4)\big)$$

$$N = (-4,4,8)$$

Finalmente, la ecuación cartesiana del plano es:

$$N \cdot P = N \cdot P_0$$

$$(-4,4,8) \cdot (x,y,z) = (-4,4,8) \cdot (1,-1,4)$$

$$-4x + 4y + 8z = -4 - 4 + 32$$

$$-4x + 4y + 8z = 24$$

Como todos los coeficientes son múltiplos de cuatro, se simplifican:

$$(-4x + 4y + 8z = 24)\left(\frac{1}{4}\right)$$

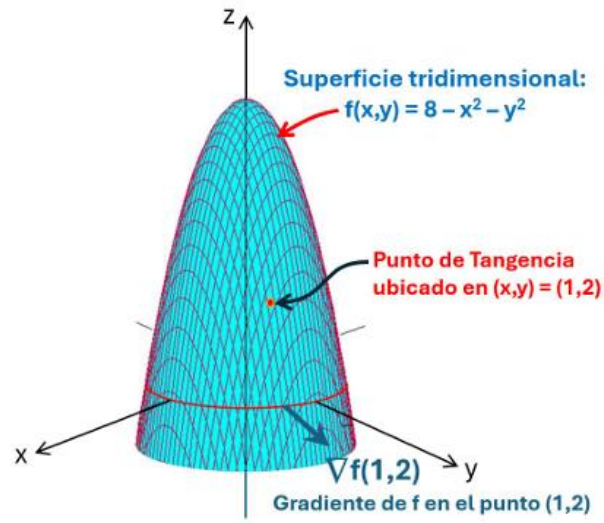
$$-x + y + 2z = 6$$

23) Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = 8 - x^2 - y^2$ en el punto (1,2).

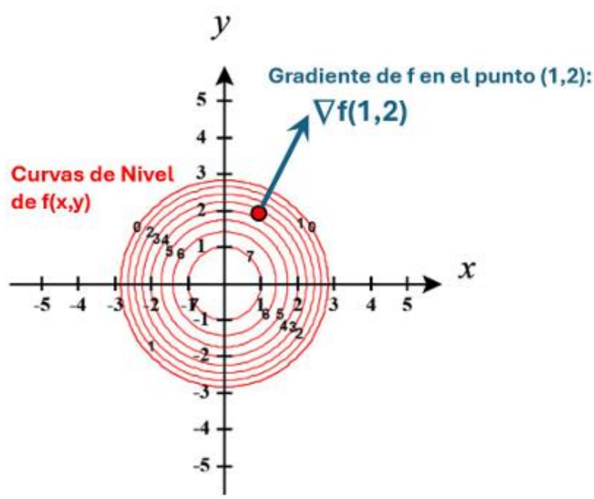
Resolución:

La función es una superficie tridimensional, pero si se calcula su gradiente, éste se encuentra en el dominio de la función: en el **plano xy**:

$$f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$$



En el dominio de la función f(x,y): $\mathbb{R}^2$:



Para que el gradiente sea ortogonal a la superficie, ésta debe ser una superficie de nivel de una función con dominio $\mathbb{R}^3$, lo cual se logra igualando a cero la función original al restarle z:

$$z = 8 - x^2 - y^2$$

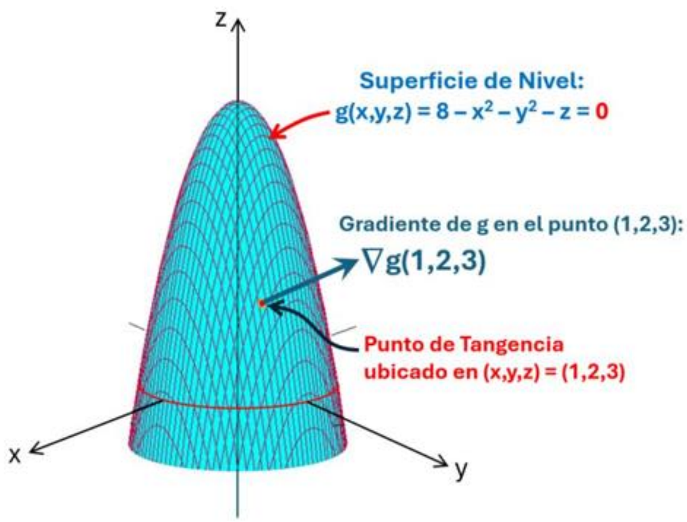
$$8 - x^2 - y^2 - z = 0$$

Entonces la nueva función es:

$$g(x, y, z) = 8 - x^2 - y^2 - z$$

Su gradiente es el vector tridimensional:

$$\nabla g(x, y, z) = (-2x, -2y, -1)$$



El punto de la superficie por donde pasa el plano tangente es su punto pivote:

$$(x, y, z) = \left(1{,}2, f(1{,}2)\right)$$

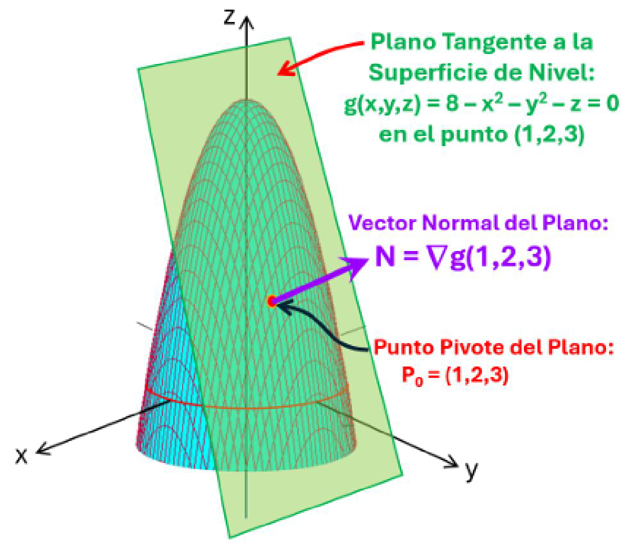
$$(x, y, z) = (1{,}2{,}8 - (1)^2 - (2)^2)$$

$$(x, y, z) = (1{,}2{,}8 - 5) = (1{,}2{,}3) = P_0$$

El vector normal a la superficie en este punto es el gradiente de la superficie de nivel g(x,y,z) = 0:

$$N = \nabla g(1{,}2{,}3) = (-2(1), -2(2), -1)$$

$$N = (-2, -4, -1)$$



Finalmente, la ecuación cartesiana del plano se obtiene como:

$$N \cdot P = N \cdot P_0$$

$$(-2,-4,-1) \cdot (x,y,z) = (-2,-4,-1) \cdot (1{,}2{,}3)$$

$$-2x - 4y - z = -2 - 8 - 3$$

$$-2x - 4y - z = -13$$

Se recomienda que la ecuación del plano posea coeficientes enteros lo más simplificados posibles, y de preferencia que el coeficiente principal (el de la equis, o el primero que aparezca) sea positivo:

$$(-2x - 4y - z = -13)(\mathbf{-1})$$

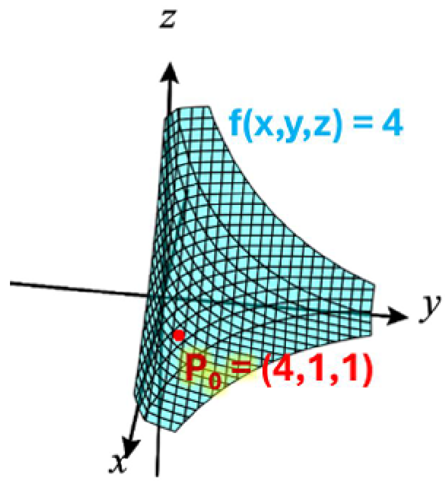
$$2x + 4y + z = 13$$

24) Obtener la ecuación de la recta normal a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$, en el punto (4,1,1).

Resolución:

Toda recta necesita dos elementos constructivos: un punto pivote y un vector director. El **punto pivote** es (4,1,1) dado que es el único punto conocido, el cual pertenece a la superficie a la cual esta recta debe ser normal:

$$P_0 = (4{,}1{,}1) \subset S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$$



En cuanto al vector director, debe ser ortogonal a la superficie; el único vector que puede serlo es el vector gradiente, pero la superficie debe ser una superficie de nivel de una función escalar con dominio $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$$

Como la superficie en efecto depende de x, y, z, y además toma un valor constante de 4, entonces sí es una superficie de nivel. Entonces su **gradiente** es:

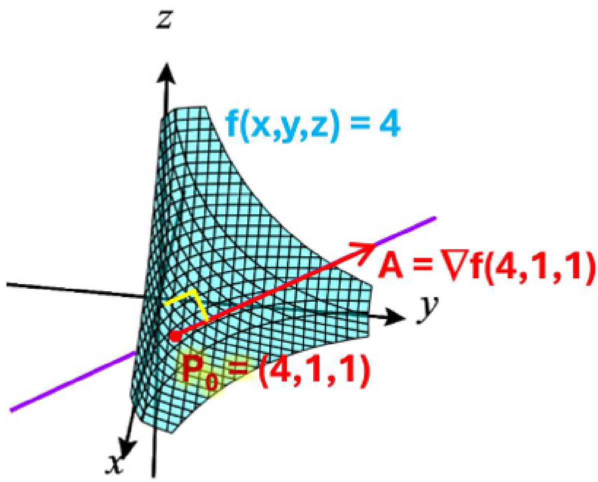
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

El vector normal a la superficie se obtiene evaluando el gradiente en el punto pivote:

$$\nabla f(4,1,1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}, \frac{1}{2\sqrt{1}}, \frac{1}{2\sqrt{1}}\right) = \left(\frac{1}{2(2)}, \frac{1}{2(1)}, \frac{1}{2(1)}\right)$$

Entonces el **vector director** de la recta normal es:

$$A = \nabla f(4,1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



La **ecuación vectorial** de la **recta normal** es:

$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (4,1,1) + t\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

y se puede compactar si se suman los vectores del lado derecho de la ecuación:

$$(x, y, z) = \left(4 + \frac{t}{4}, 1 + \frac{t}{2}, 1 + \frac{t}{2}\right)$$

25) La temperatura de un gas en cualquier punto (x,y,z) de un cierto espacio está dada por $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Si una molécula del gas se desplaza siguiendo la trayectoria helicoidal c(t) = (cos(t) , sen(t) , t), determinar la rapidez con que varía la temperatura de dicha molécula a lo largo de la trayectoria.

Resolución:

La rapidez con que cambia la función escalar de temperatura a lo largo de una trayectoria es calculada mediante la derivada direccional a lo largo de una curva:

$$D_u T = \nabla T \cdot u$$

donde u es el vector que marca la dirección de cálculo, en este caso corresponde a la trayectoria. La dirección de una curva o trayectoria está dada por su vector tangente, el cual se calcula mediante la derivada de la función de la curva:

$$u = c'(t) = \frac{dc}{dt} = (-sen(t), cos(t), 1)$$

El gradiente de la función temperatura es un vector de tres componentes porque su dominio es $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\nabla T = (2x, 2y, 2z)$$

El gradiente debe evaluarse en el vector que describe la curva: c(t) = (x,y,z), pues la derivada direccional a lo largo de una curva es en realidad la derivada de una composición de funciones:

$$\nabla T|_{c(t)} = (2cos(t), 2sen(t), 2t)$$

Se efectúa el producto punto del gradiente y el vector director u para obtener la derivada direccional:

$$D_u T = (2cos(t), 2sen(t), 2t) \cdot (-sen(t), cos(t), 1)$$

$$D_u T = -2cos(t)sen(t) + 2sen(t)cos(t) + 2t$$

$$D_u T = 2t$$

26) Obtener la divergencia y el rotacional del campo F(x,y,z) = (3y,4z,–6x).

Resolución:

La función F(x,y,z) es un campo vectorial y pertenece al espacio $\mathbb{R}^3$, por lo que sí se puede determinar la divergencia y el rotacional:

Divergencia:

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (3y, 4z, -6x) = \frac{\partial}{\partial x}(3y) + \frac{\partial}{\partial y}(4z) + \frac{\partial}{\partial z}(-6x)$$

$$\nabla \cdot F = 0 + 0 + 0 = 0$$

Rotacional:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (3y, 4z, -6x) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix}$$

Es un producto cruz entre vectores; nótese que en el **segundo renglón** del determinante sólo están los **operadores derivada**, no son los resultados de las derivadas. Realizando la expansión en cofactores con el primer renglón:

$$\nabla \times F = \hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(-6x) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-6x) - \frac{\partial}{\partial z}(3y)\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(3y)\right)$$

$$\nabla \times F = \hat{\imath}(0-4) - \hat{\jmath}(-6-0) + \hat{k}(0-3) = -4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k} = (-4,6,-3)$$

En conclusión, el resultado de la divergencia es el escalar cero, y del rotacional es el vector tridimensional (–4,6,–3).

PARTE 4. INTEGRALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

27) Calcular $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} xydydx$.

Resolución:

En una integral doble, primero se efectúa la integral del centro:

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} xydydx = \int_1^2 \left[x \int_{2x}^{3x+1} ydy \right] dx$$

Nótese que en esta integral central la variable es ye, y la equis es una constante de manera similar a las derivadas parciales. La integral es directa porque corresponde a la función potencia uno:

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} xydydx = \int_1^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=2x}^{y=3x+1} dx$$

Luego se evalúa el resultado de la integral central en los límites de integración, primero el superior y se le resta la sustitución con el inferior; como se integró respecto a ye, estos límites se sustituyen sólo en la ye:

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} xydydx = \int_1^2 \left[x \frac{(3x+1)^2}{2} - x \frac{(2x)^2}{2} \right] dx$$

Conviene desarrollar las potencias para así obtener un polinomio fácil de integrar:

$$= \int_1^2 \left[x \frac{9x^2 + 6x + 1}{2} - x \frac{4x^2}{2} \right] dx = \int_1^2 \left[\frac{9x^3 + 6x^2 + x}{2} - \frac{4x^3}{2} \right] dx$$

$$= \int_1^2 \frac{5x^3 + 6x^2 + x}{2} dx$$

Ahora se efectúa la integral externa, la cual es con respecto a equis. Conviene sacar de la integral el denominador constante y realizar la integración de cada término, los cuales corresponden a funciones potencia:

$$\int_1^2 \frac{5x^3 + 6x^2 + x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (5x^3 + 6x^2 + x)\, dx = \frac{1}{2} \left[5 \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2}$$

Finalmente se evalúa el resultado de la integral en los límites de integración, primero se sustituye el superior y se le resta la sustitución con el inferior:

$$= \frac{1}{2}\left[5\frac{(2)^4}{4} + 2(2)^3 + \frac{(2)^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[5\frac{(1)^4}{4} + 2(1)^3 + \frac{(1)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[5\frac{16}{4} + 2(8) + \frac{4}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[5\frac{1}{4} + 2(1) + \frac{1}{2}\right]$$

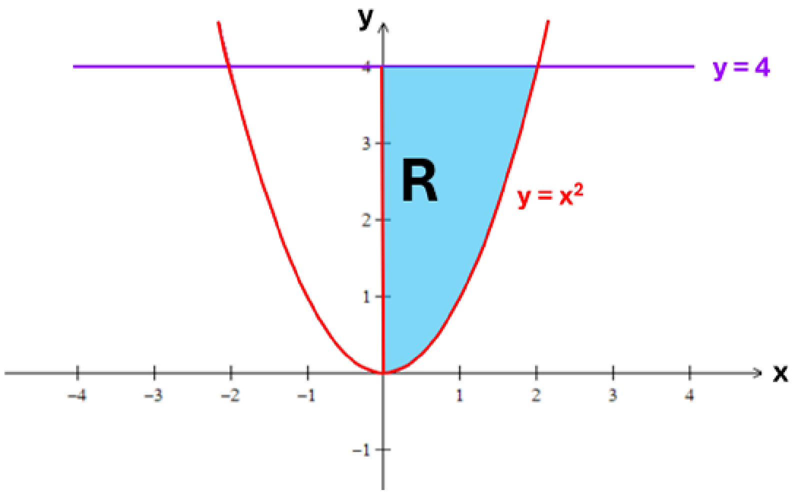
$$= \frac{1}{2}\left[5\frac{16-1}{4} + 16 - 2 + \frac{4-1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{5(15)}{4} + 14 + \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5(15)}{4} + \frac{4(14)}{4} + \frac{6}{4}\right] = \frac{1}{8}[75 + 56 + 6] = \frac{137}{8}$$

28) Calcular $\iint_R xe^{y^2} dA$, donde R es la región del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 4$.

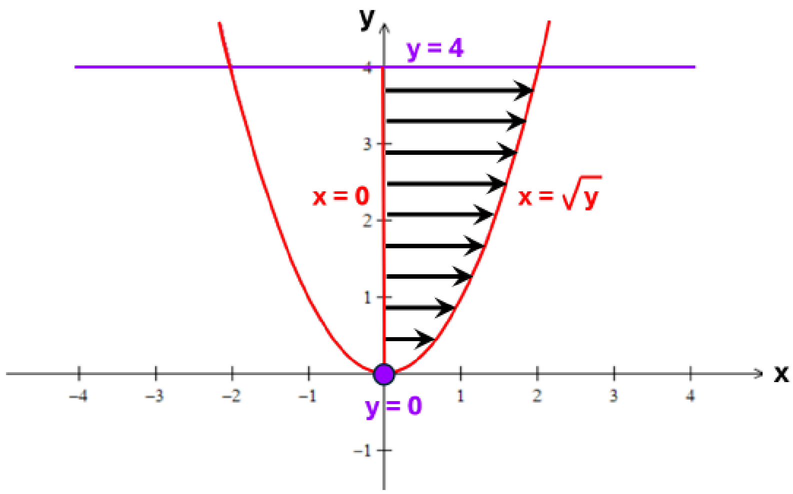
Resolución:

Primero se debe graficar la **región de integración R** para poder definir los límites de integración:



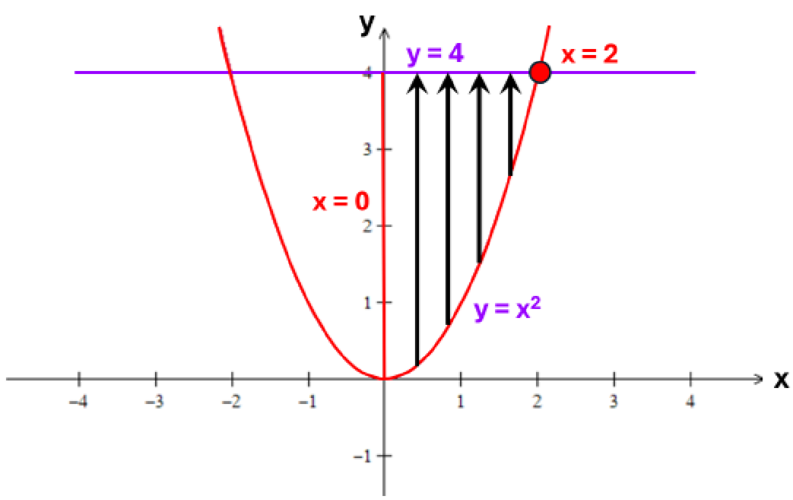
De acuerdo con el **Teorema de Fubini**, se pueden plantear dos casos:

Caso 1: la primera integral se realiza respecto a x:



$$\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} xe^{y^2}dxdy$$

Caso 2: la primera integral se efectúa respecto a y:



$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=x^2}^{y=4} xe^{y^2}dydx$$

Ambas integrales son iguales de acuerdo con Fubini:

$$\overset{1}{\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} xe^{y^2}dxdy} = \overset{2}{\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=x^2}^{y=4} xe^{y^2}dydx}$$

No se van a realizar las dos integrales dobles, sólo la que más convenga. En la **integral 1**, la exponencial es una constante y sale de la integral, por esta razón es la más fácil de hacer:

$$\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} xe^{y^2}dxdy = \int_0^4 e^{y^2}\int_0^{\sqrt{y}} xdxdy = \int_0^4 e^{y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 e^{y^2}\left[\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]dy = \int_0^4 e^{y^2}\left[\frac{y}{2} - 0\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{y^2}ydy$$

Esta última integral en ye es directa, sólo se completa la diferencial:

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{y^2}ydy = \frac{1}{2(2)}\int_0^4 e^{y^2}2ydy = \frac{1}{4}\left[e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=4}$$

$$\int e^u du: \quad \begin{array}{c} u = y^2 \\ du = 2ydy \end{array}$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{(4)^2} - e^{(0)^2}\right] = \frac{1}{4}\left[e^{16} - e^0\right] = \frac{1}{4}\left[e^{16} - 1\right]$$

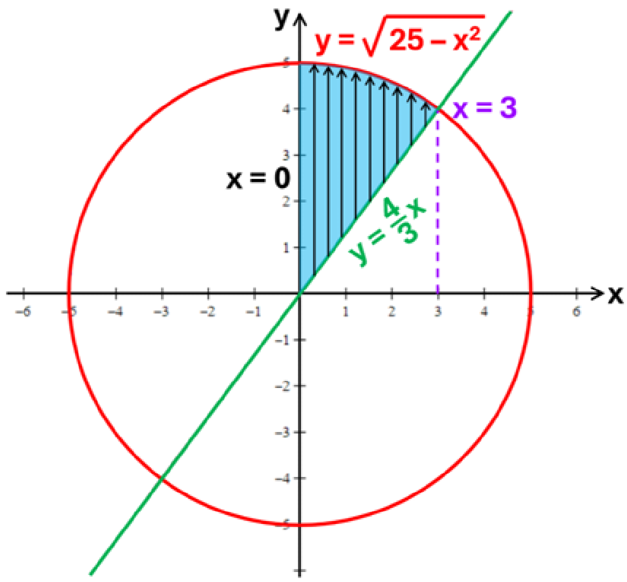
29) Cambiar el orden de integración de:

$$\int_0^3\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dydx$$

Resolución:

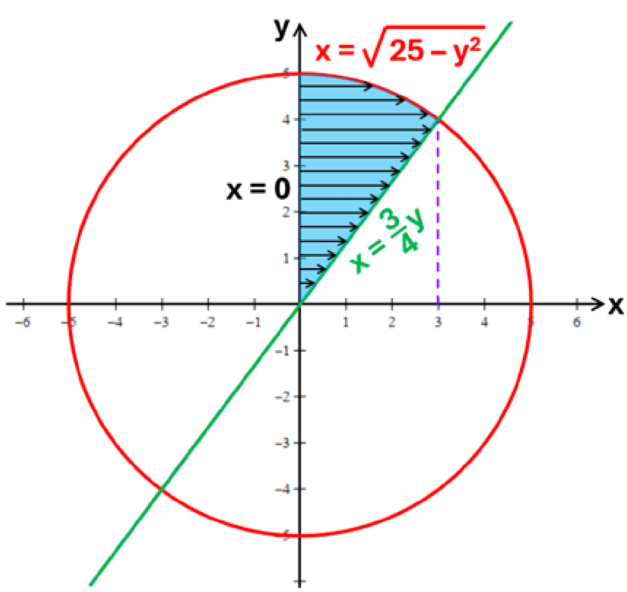
Primero se debe graficar la región de integración, considerando que la integral central es respecto a ye y la externa respecto a equis:

$$\int_{x=0}^{x=3}\left[\int_{y=\frac{4x}{3}}^{y=\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

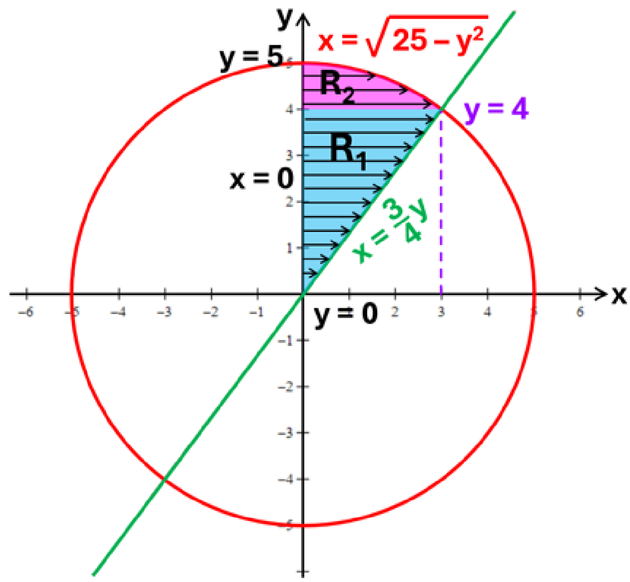


De acuerdo con el **Teorema de Fubini**, se puede cambiar el orden de las variables de integración, pero cambiando también sus límites según la gráfica de la región de integración. Si se comienza ahora integrando respecto a x, el límite inferior de integración es x = 0, pero el superior corresponde tanto a la recta inclinada como a la porción de circunferencia:

$$\int_{x=0}^{x=3}\left[\int_{y=\frac{4x}{3}}^{y=\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_{y=a}^{y=b}\left[\int_{x=0}^{x=?} f(x,y)dx\right]dy$$



Entonces, la región de integración debe ser partida en dos porciones:



Y mediante la **propiedad de aditividad** (suma de integrales) se plantea una integral doble por cada porción de la región de integración:

$$\underbrace{\int_{y=0}^{y=4}\left[\int_{x=0}^{x=\frac{3}{4}y} f(x,y)dx\right]dy}_{\boldsymbol{R_1}} + \underbrace{\int_{y=4}^{y=5}\left[\int_{x=0}^{x=\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx\right]dy}_{\boldsymbol{R_2}}$$

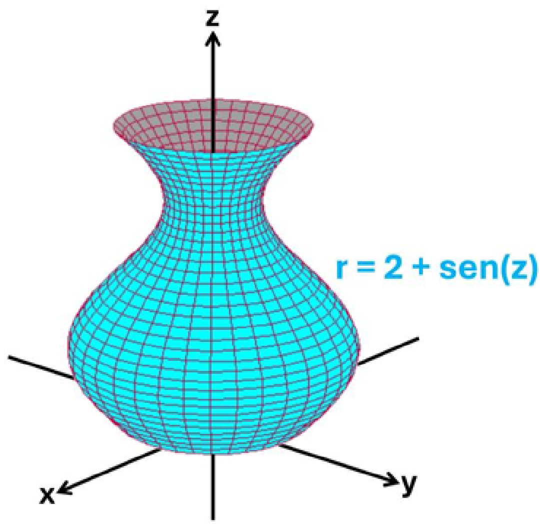
Por lo tanto, según el **Teorema de Fubini**, el **cambio de orden de integración** en la integral original queda como:

$$\int_0^3\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dydx = \int_0^4\int_0^{\frac{3y}{4}} f(x,y)dxdy + \int_4^5\int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dxdy$$

30) Calcular el volumen de un jarrón cuyo radio está dado por: r=2+sen(z), con zε[0,2π], donde r y z están en cm.

Resolución:

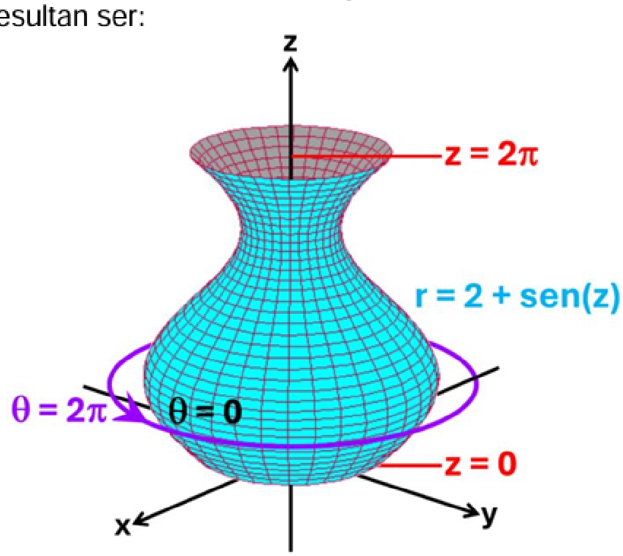
La región de integración está en $\mathbb{R}^3$:



El volumen de la figura tridimensional se puede calcular mediante una integral triple con función unitaria:

$$f(x, y, z) = 1$$

Como el radio del jarrón depende de zeta, entonces conviene plantear la integral en coordenadas cilíndricas. Los límites de integración de zeta son dato del problema, pero los demás resultan ser:



Entonces la integral triple a calcular es:

$$\iiint_R 1dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2\pi} \int_{r=0}^{r=2+sen(z)} 1|r|drdzd\theta$$

donde |r| es el jacobiano de las coordenadas cilíndricas. Recuérdese que se debe añadir el jacobiano cuando se cambie una integral a otras coordenadas diferentes a las rectangulares.

Continuando con el desarrollo de la integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2+sen(z)} r dr dz d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2+sen(z)} dz d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\left(2+sen(z)\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] dz d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[4+2sen(z)+sen^2(z)]dz d\theta$$

La integral respecto a zeta se separa en una suma de integrales:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[4\int_0^{2\pi} dz + 2\int_0^{2\pi} sen(z)dz + \int_0^{2\pi} sen^2(z)dz\right] d\theta$$

Las dos primeras integrales son directas, pero en la última se introduce la identidad:

$$sen^2(z) = \frac{1-cos(2z)}{2}$$

y la integral resultante se descompone en dos dado que es una resta:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left[4z+2\left(-cos(z)\right)\right]_{z=0}^{z=2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-cos(2z)\right)dz\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4(2\pi)-2cos(2\pi)] - [4(0)-2cos(0)]d\theta$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dz - \int_0^{2\pi} cos(2z)dz\right] d\theta$$

$$\int cos(u)du: \quad \begin{matrix} u = 2z \\ du = 2dz \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[8\pi - 2(1)] - [0-2(1)]d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}[z]_{z=0}^{z=2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos(2z)(2dz)\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[8\pi - 2 + 2]d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}[2\pi - 0] - \left[\frac{1}{2}sen(2z)\right]_{z=0}^{z=2\pi}\right] d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}[2\pi] - \left[\frac{1}{2}sen(4\pi) - \frac{1}{2}sen(0)\right]\right]d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{2}[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\pi - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0)\right]\right]d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{2}[2\pi - 0] + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\pi - 0]d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{2}[2\pi] + \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi^2 + \frac{\pi}{2}[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= 8\pi^2 + \frac{\pi}{2}[2\pi - 0] = 8\pi^2 + \frac{\pi}{2}[2\pi] = 8\pi^2 + \pi^2 = 9\pi^2$$

Por lo tanto, el volumen del jarrón es $9\pi^2$ unidades de volumen:

$$Volumen = \iiint_R 1dV = 9\pi^2\ u^3$$

donde u puede estar en cm, m, ft, in, etc.

31) Obtener el trabajo realizado por la fuerza: $\bar{F} = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$, para mover una partícula desde el punto (1,0) hasta el punto (2,2), a lo largo de la curva $y = x^2 - x$.

Resolución:

El trabajo se calcula mediante una integral de línea del campo de fuerza:

$$W = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

El modo de calcular esta integral de línea es:

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}\big(\bar{r}(t)\big) \cdot \bar{r}'(t)dt$$

Para desarrollar la integral, se van construyendo sus partes:

a) **Parametrización de la curva**:

$$x = t$$

$$y = t^2 - t$$

$$\bar{r}(t) = (t\,, t^2 - t)$$

b) **Vector tangente a la curva**:

$$\bar{r}'(t) = \frac{d}{dt}(t\,, t^2 - t) = \left(\frac{d}{dt}t\,, \frac{d}{dt}(t^2 - t)\right) = (1\,, 2t - 1)$$

c) **Integrando**:

$$\bar{r}(t) = (\overset{\mathbf{x}}{t}\,, \overset{\mathbf{y}}{t^2 - t})$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (t^2 - (t^2 - t)^2\,, 2t(t^2 - t)\,)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) = (\,t^2 - (t^2 - t)^2\,, 2t(t^2 - t)\,) \cdot (1\,, 2t - 1)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'^{(t)} = t^2 - (t^2 - t)^2 + 2t(t^2 - t)(2t - 1)$$

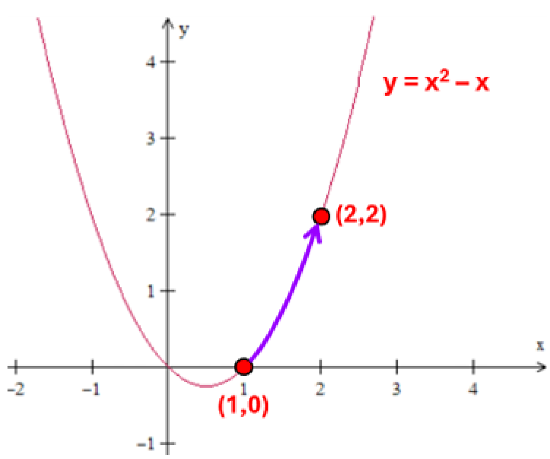
$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) = t^2 - (t^4 - 2t^3 + t^2) + 2t(2t^3 - 3t^2 + t)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) = t^2 - t^4 + 2t^3 - t^2 + 4t^4 - 6t^3 + 2t^2$$

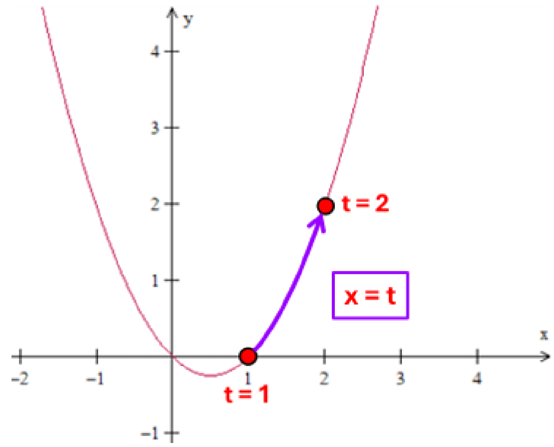
$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) = 3t^4 - 4t^3 + 2t^2$$

d) **Integral de línea**:

Los límites de integración se definen sobre la gráfica de la curva:



Y como x = t:



Entonces la integral es:

$$\int_1^2 (3t^4 - 4t^3 + 2t^2)\, dt = \left[3\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2}$$

Y evaluando los límites de integración:

$$\int_1^2 (3t^4 - 4t^3 + 2t^2)\, dt = \left[3\frac{t^5}{5} - t^4 + 2\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2}$$

$$= \left[3\frac{(2)^5}{5} - (2)^4 + 2\frac{(2)^3}{3}\right] - \left[3\frac{(1)^5}{5} - (1)^4 + 2\frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$= 3\frac{32-1}{5} - 16 + 1 + 2\frac{8-1}{3}$$

$$= 3\frac{31}{5} - 15 + 2\frac{7}{3} = \frac{9(31) - (15)^2 + 10(7)}{15} = \frac{279 - 225 + 70}{15} = \frac{124}{15}$$

32) Calcular $\int_C \ x^2dx + xydy + dz$, donde C es la trayectoria dada por c(t) = $(t,t^2,1)$, con $t\varepsilon[0,1]$.

Resolución:

Como la región de integración C es una trayectoria, entonces es una integral de línea, pero está expresada en su forma diferencial; en esta forma, los términos que acompañan a la diferencial son los componentes del campo vectorial a ser integrado:

$$F(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$$

Se puede efectuar la integral del campo vectorial sobre la curva C como se acostumbra:

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt$$

donde r(t) es la función de la trayectoria, que para este problema se llama c(t), y r'(t) es su vector tangente que marca la dirección de la trayectoria.

O bien, conviene desarrollar la integral en forma diferencial porque ya está planteada de esta manera:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C x^2dx + xydy + dz$$

Para una función de trayectoria:

x y z

$$c(t) = (t, t^2, 1)$$

De acuerdo con la definición de diferencial, si la variable independiente de cada componente de la curva es t:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt$$

$$dy = \frac{dy}{dt}dt$$

$$dz = \frac{dz}{dt}dt$$

Entonces la integral queda expresada como:

$$\int_C x^2dx + xydy + dz = \int_C x^2\frac{dx}{dt}dt + xy\frac{dy}{dt}dt + \frac{dz}{dt}dt$$

Sustituyendo los componentes de la curva c(t):

$$= \int_C (t)^2\frac{d(t)}{dt}dt + (t)(t^2)\frac{d(t^2)}{dt}dt + \frac{d(1)}{dt}dt$$

$$= \int_C t^2(1)dt + t^3(2t)dt + (0)dt$$

$$= \int_C t^2 dt + 2t^4 dt$$

Y los límites de integración están dados por el intervalo $t \in [0,1]$:

$$= \int_0^1 t^2 dt + 2t^4 dt$$

Finalmente, se realiza la integral de cada término:

$$\int_0^1 t^2 dt + 2t^4 dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{t=1}$$

Y se evalúa en los límites de integración, primero se sustituye el límite superior y luego se le resta la sustitución con el límite inferior:

$$= \left[\frac{(1)^3}{3} + 2\frac{(1)^5}{5}\right] - \left[\frac{(0)^3}{3} + 2\frac{(0)^5}{5}\right] = \left[\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5}\right] - [0]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$$

33) Determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F = (2z+x , y–z , x+y) para trasladar una partícula a lo largo del perímetro del triángulo cuyos vértices son (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1), si el movimiento es en este orden.

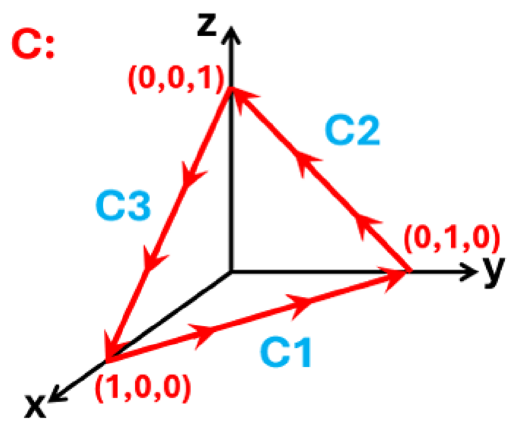
Resolución:

El trabajo realizado por un campo vectorial se calcula mediante la integral de línea:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt$$

donde r(t) es la función de la trayectoria, y r'(t) es su vector tangente.

Primero se debe parametrizar la trayectoria:

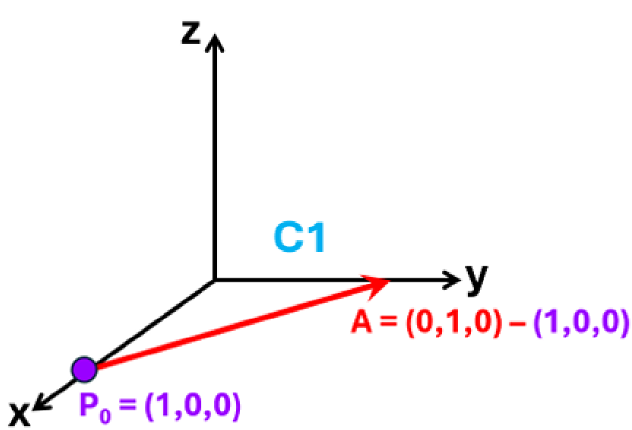


Como está formada por tres rectas, conviene realizar la integral en cada una de ellas y emplear la **propiedad de aditividad**:

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C1} F \cdot dr + \int_{C2} F \cdot dr + \int_{C3} F \cdot dr$$

Así se facilita la parametrización de cada parte de la trayectoria:

C1: La parametrización de una recta se efectúa mediante la obtención de su ecuación vectorial, por lo que se necesitan dos elementos: el punto pivote y el vector director:



$$P_0 = (1,0,0)$$

P_0

$$A = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$$

La ecuación vectorial de la recta es:

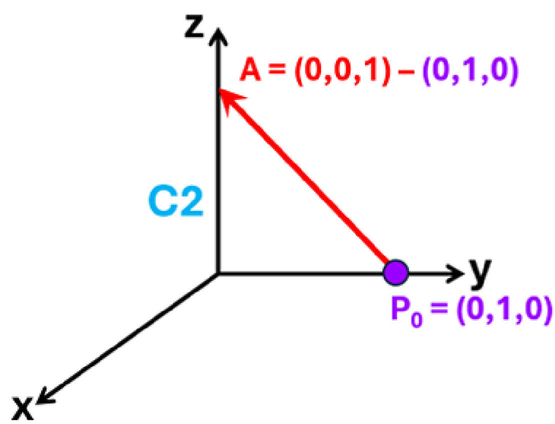
$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (1{,}0{,}0) + t(-1{,}1{,}0)$$

La cual se puede reescribir efectuando la suma de los vectores del lado derecho, y esto genera la función vectorial de variable escalar que describe a la trayectoria:

$$r(t) = (1 - t, t, 0)$$

C2: De forma similar a la recta anterior:



$$P_0 = (0{,}1{,}0)$$

P_0

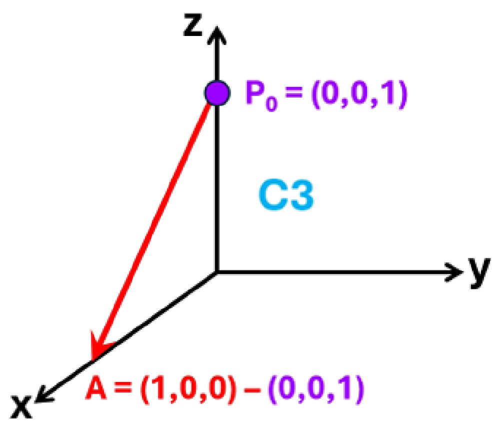
$$A = (0{,}0{,}1) - (0{,}1{,}0) = (0, -1{,}1)$$

$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (0{,}1{,}0) + t(0, -1{,}1)$$

$$r(t) = (0{,}1 - t, t)$$

C3: De forma similar a las rectas anteriores:



$$P_0 = (0,0,1)$$

P0

$$A = (1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1)$$

$$P = P_0 + tA$$

$$(x, y, z) = (0,0,1) + t(1,0,-1)$$

$$r(t) = (t, 0, 1 - t)$$

Luego se plantea y se desarrolla cada integral de línea:

C1: Primero se obtiene el vector tangente a la curva, el cual es la derivada de r(t):

$$r'(t) = \frac{d}{dt}(1 - t, t, 0) = (-1,1,0)$$

Luego se desarrolla el integrando, iniciando con la composición del campo vectorial con la ecuación de la trayectoria:

$$F(x, y, z) = (2z + x, y - z, x + y)$$

x y z

$$r(t) = (1 - t, t, 0)$$

$$F\big(r(t)\big) = \big(2(0) + (1 - t), (t) - (0), (1 - t) + (t)\big) = (1 - t, t, 1)$$

El integrando es el producto punto de esta composición de funciones por el vector tangente de la curva:

$$F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) = (1 - t, t, 1) \cdot (-1,1,0) = (-1 + t) + (t) + (0) = -1 + 2t$$

Finalmente se efectúa la integral, cuyos límites de integración son:

Límite inferior: corresponde a la posición del punto pivote en la recta C1, el cual está en t = 0 (por esta razón el punto pivote P_0 tiene subíndice cero).

Límite superior: está posicionado exactamente donde termina el vector director A de la recta; el parámetro t de la recta sólo cambia el tamaño de A, por lo que en su punto final sólo cabe una vez el vector A, es decir, t debe valer uno.

Entonces, la integral queda como:

$$\int_{C1} F \cdot dr = \int_0^1 F\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt = \int_0^1 (-1+2t)dt$$

Efectuando la integral:

$$\int_0^1 (-1+2t)dt = -\int_0^1 dt + 2\int_0^1 tdt = \left[-t + 2\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1}$$

Evaluando el resultado en los límites de integración:

$$= [-t+t^2]_{t=0}^{t=1} = [-(1)+(1)^2] - [-(0)+(0)^2] = [-1+1] - [0] = 0 - 0 = 0$$

C2: Vector tangente a la curva:

$$r'(t) = \frac{d}{dt}(0,1-t,t) = (0,-1,1)$$

Integrando:

$$F(x,y,z) = (2z+x, y-z, x+y)$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\ \ \text{x} \quad \text{y} \quad \text{z} \\ r(t) = (0,1-t,t) \end{array}$$

$$F\big(r(t)\big) = \big(2(t)+(0), (1-t)-(t), (0)+(1-t)\big) = (2t, 1-2t, 1-t)$$

$$F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) = (2t, 1-2t, 1-t) \cdot (0,-1,1) = (0) + (-1+2t) + (1-t) = t$$

Integral de línea: sus límites de integración son obtenidos de forma similar a la integral sobre la curva C1:

$$\int_{C2} F \cdot dr = \int_0^1 F\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt = \int_0^1 tdt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \left[\frac{(1)^2}{2}\right] - \left[\frac{(0)^2}{2}\right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

C3: Vector tangente a la curva:

$$r'(t) = \frac{d}{dt}(t, 0,1 - t) = (1,0, -1)$$

Integrando:

$$F(x, y, z) = (2z + x, y - z, x + y)$$

$$\begin{array}{c} \text{x y z} \\ r(t) = (t, 0,1 - t) \end{array}$$

$$F\big(r(t)\big) = \big(2(1 - t) + (t), (0) - (1 - t), (t) + (0)\big) = (2 - t, -1 + t, t)$$

$$F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) = (2 - t, -1 + t, t) \cdot (1,0, -1) = (2 - t) + (0) + (-t) = 2 - 2t$$

Integral de línea: sus límites de integración son obtenidos de forma similar a la integral sobre las curvas C1 y C2:

$$\int_{C2} F \cdot dr = \int_0^1 F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (2 - 2t) dt$$

$$= 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 t dt = \left[2t - 2\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= [2t - t^2]_{t=0}^{t=1} = [2(1) - (1)^2] - [2(0) - (0)^2] = 2 - 1 - 0 = 1$$

Por último, se aplica la propiedad de aditividad para obtener el valor total de la integral de línea:

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C1} F \cdot dr + \int_{C2} F \cdot dr + \int_{C3} F \cdot dr = [0] + \left[\frac{1}{2}\right] + [1] = \frac{3}{2}$$

El trabajo realizado por el campo de fuerzas F a lo largo de la curva es tres medios. Un último comentario sobre esta integral, como la trayectoria es una curva cerrada, y como la integral se calculó en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario), al símbolo de integral se le agrega un círculo:

$$W = \oint_C F \cdot dr = \frac{3}{2}$$

Esto no cambia en nada el procedimiento de cálculo ni el resultado obtenido, sólo indica que la integral se realizó a lo largo de una curva cerrada.

34) Calcular la integral del campo vectorial F(x,y,z) = (x^2y,xy^2,z) sobre la superficie del plano x+y+z=1, con xε[0,1], y ε[0,1], z ε[0,1].

Resolución:

Se trata de una integral de superficie de un campo vectorial:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \iint_R F\big(r(u,v)\big) \cdot (r_u \times r_v)dudv$$

Primero se **parametriza la superficie**, es decir, se transforma su ecuación escalar en una ecuación vectorial para poderla describir punto a punto:

$$x + y + z = 1$$

Para ello se puede proponer lo siguiente, despejar zeta para obtener una función dependiente de equis y de ye:

$$z = 1 - x - y$$

y de esta forma las variables independientes serían los parámetros:

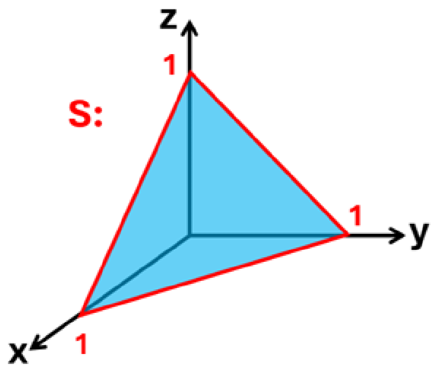
$$x = u$$

$$y = v$$

Sustituyendo estos parámetros en zeta:

$$z = 1 - u - v$$

Con equis, ye y zeta se construye una función vectorial que describe cada punto de la superficie:



Luego se obtiene el **vector normal** a la superficie, el cual consiste en el producto cruz de las derivadas parciales de r(u,v) respecto a cada una de sus variables independientes u y v:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u} u, \frac{\partial}{\partial u} v, \frac{\partial}{\partial u} (1 - u - v) \right) = (1,0,-1)$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v} u, \frac{\partial}{\partial v} v, \frac{\partial}{\partial v} (1 - u - v) \right) = (0,1,-1)$$

El producto cruz se recomienda realizarlo mediante expansión en cofactores y menores con el primer renglón:

$$r_u \times r_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = +\hat{\imath} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (0+1)\hat{\imath} - (-1+0)\hat{\jmath} + (1-0)\hat{k} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} = (1,1,1)$$

Ahora se desarrolla el **integrando** de la integral de superficie, donde primero se efectúa la sustitución (composición) del campo vectorial F con la función de superficie r(u,v):

$$F(x, y, z) = (x^2 y, x y^2, z)$$

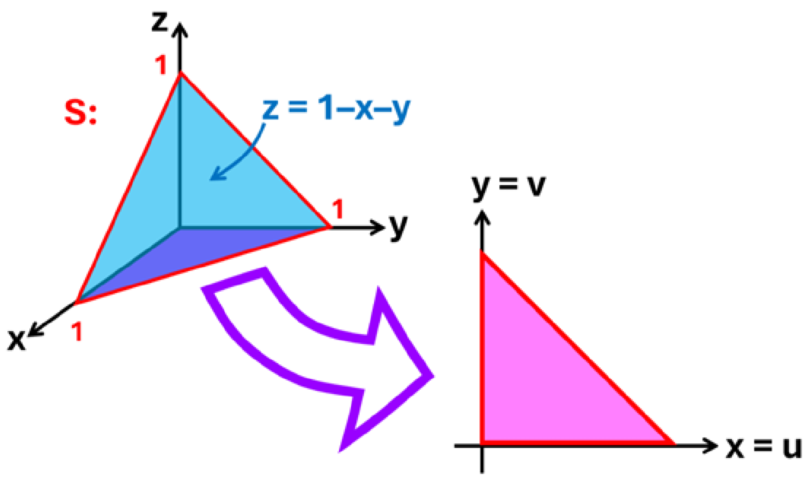
$$r(u, v) = (\overset{x}{u}, \overset{y}{v}, \overset{z}{1 - u - v})$$

$$F\big(r(u, v)\big) = ((u)^2(v), (u)(v)^2, 1 - u - v) = (u^2 v, u v^2, 1 - u - v)$$

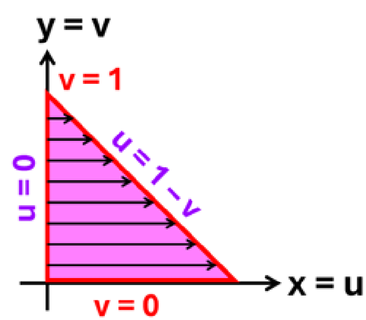
y después se realiza el producto punto con el vector normal:

$$F\big(r(u, v)\big) \cdot (r_u \times r_v) = (u^2 v, u v^2, 1 - u - v) \cdot (1,1,1) = u^2 v + u v^2 + 1 - u - v$$

Finalmente se plantea la **integral de superficie**, como u corresponde a equis y v a ye, entonces la región de integración en el plano uv es:



Si la integral comienza respecto a u, entonces los límites de integración son:



$$\iint_R F\big(r(u,v)\big)\cdot(r_u \times r_v)dudv = \int_{v=0}^{v=1}\int_{u=0}^{u=1-v}(u^2v + uv^2 + 1 - u - v)\,dudv$$

La integral central se descompone en varias integrales pues el integrando está conformado por sumas y restas:

$$\int_{v=0}^{v=1}\left[v\int_{u=0}^{u=1-v}u^2du + v^2\int_{u=0}^{u=1-v}udu + \int_{u=0}^{u=1-v}du - \int_{u=0}^{u=1-v}udu - v\int_{u=0}^{u=1-v}du\right]dv$$

Todas las integrales en u son directas:

$$= \int_0^1\left[v\frac{u^3}{3} + v^2\frac{u^2}{2} + u - \frac{u^2}{2} - vu\right]_{u=0}^{u=1-v}dv$$

Se evalúan en los límites de integración, primero se sustituye el límite superior y se le resta la sustitución con el límite inferior:

$$= \int_0^1 \left[v\frac{(1-v)^3}{3} + v^2\frac{(1-v)^2}{2} + (1-v) - \frac{(1-v)^2}{2} - v(1-v)\right] dv$$

$$- \int_0^1 \cancelto{0}{\left[v\frac{(0)^3}{3} + v^2\frac{(0)^2}{2} + (0) - \frac{(0)^2}{2} - v(0)\right]} dv$$

Se desarrollan los binomios elevados al cuadrado y al cubo, y se efectúan las multiplicaciones indicadas:

$$= \int_0^1 \left[v\frac{1-3v+3v^2-v^3}{3} + v^2\frac{1-2v+v^2}{2} + 1 - v - \frac{1-2v+v^2}{2} - (v-v^2)\right] dv$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{v-3v^2+3v^3-v^4}{3} + \frac{v^2-2v^3+v^4}{2} + 1 - v - \frac{1-2v+v^2}{2} - v + v^2\right] dv$$

Y se agrupan los términos semejantes para simplificar el integrando final:

$$= \int_0^1 \left[\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)v^4 + \left(\frac{3}{3}-\frac{2}{2}\right)v^3 + \left(-\frac{3}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)v^2 + \left(\frac{1}{3}-1+\frac{2}{2}-1\right)v \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{1}{2}\right)\right] dv$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{6}\right)v^4 + (0)v^3 + (0)v^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)v + \left(\frac{1}{2}\right)\right] dv$$

Se separa en varias integrales y se calculan, afortunadamente todas las integrales son directas:

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 v^4 dv - \frac{2}{3}\int_0^1 v dv + \frac{1}{2}\int_0^1 dv$$

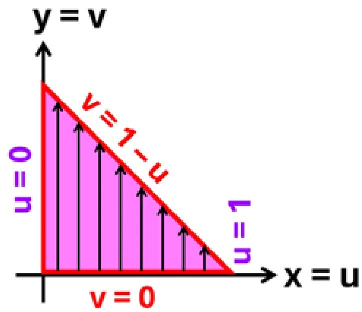
$$= \left[\frac{1}{6}\frac{v^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}v\right]_{v=0}^{v=1} = \left[\frac{v^5}{30} - \frac{v^2}{3} + \frac{v}{2}\right]_{v=0}^{v=1}$$

Por último, se evalúan en los límites de integración:

$$= \left[\frac{(1)^5}{30} - \frac{(1)^2}{3} + \frac{(1)}{2}\right] - \left[\frac{(0)^5}{30} - \frac{(0)^2}{3} + \frac{(0)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{30} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] - 0 = \frac{1 - 10 + 15}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

A este resultado también se llega si a la integral doble resultante de la integral de superficie se le aplica el **Teorema de Fubini**, entonces la integral central sería respecto a v:



$$\iint_R F\big(r(u,v)\big) \cdot (r_u \times r_v) dudv = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=1-u} (u^2 v + uv^2 + 1 - u - v)\, dvdu$$

35) Calcular la integral del campo vectorial F(x,y,z) = (3y,4z,–6x) sobre la superficie dada por σ(r,θ) = (rcosθ,rsenθ,9–r^2) con rε[0,3] y θε[0,2π].

Resolución:

Como la región de integración es una superficie y la función es un campo vectorial, entonces se trata de una integral de superficie vectorial:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \iint_R F\big(\sigma(r,\theta)\big) \cdot (\sigma_r \times \sigma_\theta) dr d\theta$$

Primero se plantea la **región de integración**, la cual es una superficie. Como ya está **parametrizada**:

$$\sigma(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), 9 - r^2)$$

entonces se procede a obtener el **vector normal** a la superficie:

$$\sigma_r = \frac{\partial \sigma}{\partial r} = (cos(\theta), sen(\theta), -2r)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-rsen(\theta), rcos(\theta), 0)$$

$$\sigma_r \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ cos(\theta) & sen(\theta) & -2r \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +\hat{\imath}\big(0 + 2r^2cos(\theta)\big) - \hat{\jmath}\big(0 - 2r^2sen(\theta)\big) + \hat{k}\big(rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)\big)$$

$$= \big(2r^2cos(\theta)\big)\hat{\imath} - \big(-2r^2sen(\theta)\big)\hat{\jmath} + \Big(r\big(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\big)\Big)\hat{k}$$

$$= \big(2r^2cos(\theta)\big)\hat{\imath} + \big(2r^2sen(\theta)\big)\hat{\jmath} + (r)\hat{k}$$

Entonces, el vector normal expresado como una terna ordenada de números (sin los vectores unitarios) es:

$$\sigma_r \times \sigma_\theta = (2r^2cos(\theta), 2r^2sen(\theta), r)$$

Luego se desarrolla el **integrando**, primero se sustituye la función que describe a la superficie en el campo vectorial a integrar:

$$F(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$$

$$\sigma(r, \theta) = (\overset{\mathbf{x}}{rcos(\theta)}, \overset{\mathbf{y}}{rsen(\theta)}, \overset{\mathbf{z}}{9 - r^2})$$

$$F\big(\sigma(r, \theta)\big) = \big(3rsen(\theta), 4(9 - r^2), -6rcos(\theta)\big)$$

y después se realiza el producto punto con el vector normal:

$$F\big(\sigma(r, \theta)\big) \cdot (\sigma_r \times \sigma_\theta) = \big(3rsen(\theta), 4(9 - r^2), -6rcos(\theta)\big) \cdot (2r^2cos(\theta), 2r^2sen(\theta), r)$$

$$= 6r^3sen(\theta)cos(\theta) + 8(9 - r^2)r^2sen(\theta) - 6r^2cos(\theta)$$

$$= 6r^3sen(\theta)cos(\theta) + 72r^2sen(\theta) - 8r^4sen(\theta) - 6r^2cos(\theta)$$

Finalmente, se efectúa la **integral**; el enunciado del problema ya menciona los límites de integración para cada variable:

$$r \in [0,3] \ , \theta \in [0,2\pi]$$

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \big(6r^3sen(\theta)cos(\theta) + 72r^2sen(\theta) - 8r^4sen(\theta) - 6r^2cos(\theta)\big)drd\theta$$

Conviene separar en varias integrales dado que son sumas y restas:

$$= \int_0^{2\pi} \left[6sen(\theta)cos(\theta) \int_0^3 r^3 dr + 72sen(\theta) \int_0^3 r^2 dr - 8sen(\theta) \int_0^3 r^4 dr - 6cos(\theta) \int_0^3 r^2 dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[6sen(\theta)cos(\theta)\frac{r^4}{4} + 72sen(\theta)\frac{r^3}{3} - 8sen(\theta)\frac{r^5}{5} - 6cos(\theta)\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[6sen(\theta)cos(\theta)\frac{(3)^4}{4} + 72sen(\theta)\frac{(3)^3}{3} - 8sen(\theta)\frac{(3)^5}{5} - 6cos(\theta)\frac{(3)^3}{3} \right] d\theta - \int_0^{2\pi} \left[6sen(\theta)cos(\theta)\frac{(0)^4}{4} + 72sen(\theta)\frac{(0)^3}{3} - 8sen(\theta)\frac{(0)^5}{5} - 6cos(\theta)\frac{(0)^3}{3} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[6sen(\theta)cos(\theta)\frac{81}{4} + 72sen(\theta)\frac{27}{3} - 8sen(\theta)\frac{243}{5} - 6cos(\theta)\frac{27}{3} \right] d\theta - 0$$

$$= \int_0^{2\pi} 6\frac{81}{4} sen(\theta)cos(\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} 72\frac{27}{3} sen(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} 8\frac{243}{5} sen(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} 6\frac{27}{3} cos(\theta) d\theta$$

$$= \frac{3(81)}{2} \int_0^{2\pi} sen(\theta)cos(\theta) d\theta + 24(27) \int_0^{2\pi} sen(\theta) d\theta - \frac{8(243)}{5} \int_0^{2\pi} sen(\theta) d\theta - 2(27) \int_0^{2\pi} cos(\theta) d\theta$$

Todas las integrales son directas, y en la primera se hace un cambio de variable simple:

$$= \frac{243}{2} \int_0^{2\pi} sen^1(\theta)(cos(\theta)d\theta) + \left[648(-cos(\theta)) - \frac{1944}{5}(-cos(\theta)) - 54sen(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$\int u^n du$: $u = sen(\theta)$, $du = cos(\theta)d\theta$

$$= \left[\frac{243}{2}\frac{sen^2(\theta)}{2} - 648cos(\theta) + \frac{1944}{5}cos(\theta) - 54sen(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \left[\frac{243}{4} sen^2(\theta) - \frac{1296}{5}cos(\theta) - 54sen(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

Se evalúa en los límites de integración de la última integral:

$$= \left[\frac{243}{4}sen^2(2\pi) - \frac{1296}{5}cos(2\pi) - 54sen(2\pi)\right] - \left[\frac{243}{4}sen^2(0) - \frac{1296}{5}cos(0) - 54sen(0)\right]$$

$$= \left[\frac{243}{4}(0) - \frac{1296}{5}(1) - 54(0)\right] - \left[\frac{243}{4}(0) - \frac{1296}{5}(1) - 54(0)\right]$$

$$= -\frac{1296}{5} + \frac{1296}{5} = 0$$

36) Calcular el flujo del campo vectorial F = (4x , y , 4z) que pasa a través de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Resolución:

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie tridimensional se calcula mediante la integral de superficie:

$$\Phi = \iint\limits_{S} F \cdot d\sigma = \iint\limits_{R} F\big(r(u,v)\big) \cdot (r_u \times r_v)dudv$$

donde r(u,v) es la función vectorial que describe punto a punto a la superficie, y su vector normal en cada punto está dado por el producto cruz de sus derivadas parciales:

$$r_u \times r_v = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

De acuerdo con la fórmula de la integral, primero se debe obtener la función r(u,v) mediante la **parametrización de la superficie**; como es una esfera, su parametrización se realiza auxiliándose de las coordenadas esféricas:

$$x = \rho sen(\phi)cos(\theta)$$
$$y = \rho sen(\phi)sen(\theta)$$
$$z = \rho cos(\phi)$$

El radio de la esfera ρ es siempre constante, por lo que las variables ϕ y θ son las que se proponen como los parámetros:

$$\phi = u$$
$$\theta = v$$

Entonces:

$$x = \rho sen(u)cos(v)$$
$$y = \rho sen(u)sen(v)$$
$$z = \rho cos(u)$$

y esto conforma un vector el cual describe puntualmente a la superficie:

$$r(u,v) = \big(\overset{x}{\rho sen(u)cos(v)}, \overset{y}{\rho sen(u)sen(v)}, \overset{z}{\rho cos(u)}\big)$$

Luego se obtiene el **vector normal a la superficie**:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \big(\rho cos(u)cos(v), \rho cos(u)sen(v), -\rho sen(u)\big)$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (-\rho sen(u)sen(v), \rho sen(u)cos(v), 0)$$

y se efectúa el producto cruz, desarrollando la expansión en cofactores del primer renglón del determinante:

$$r_u \times r_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & \qquad - & \qquad + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \rho cos(u)cos(v) & \rho cos(u)sen(v) & -\rho sen(u) \\ -\rho sen(u)sen(v) & \rho sen(u)cos(v) & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= +\hat{\imath}\begin{vmatrix} \rho cos(u)sen(v) & -\rho sen(u) \\ \rho sen(u)cos(v) & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} \rho cos(u)cos(v) & -\rho sen(u) \\ -\rho sen(u)sen(v) & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ \hat{k}\begin{vmatrix} \rho cos(u)cos(v) & \rho cos(u)sen(v) \\ -\rho sen(u)sen(v) & \rho sen(u)cos(v) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\big[0 - \big(-\rho^2 sen^2(u)cos(v)\big)\big] + \hat{\jmath}\Big[-\Big(0 - \big(\rho^2 sen^2(u)sen(v)\big)\Big)\Big]$$
$$+ \hat{k}\big[\rho^2 sen(u)cos(u)cos^2(v) - \big(-\rho^2 sen(u)cos(u)sen^2(v)\big)\big]$$

$$= \hat{\imath}[\rho^2 sen^2(u)cos(v)] + \hat{\jmath}[\rho^2 sen^2(u)sen(v)]$$
$$+ \hat{k}[\rho^2 sen(u)cos(u)cos^2(v) + \rho^2 sen(u)cos(u)sen^2(v)]$$

$$= \hat{\imath}[\rho^2 sen^2(u)cos(v)] + \hat{\jmath}[\rho^2 sen^2(u)sen(v)]$$
$$+ \hat{k}\big[\rho^2 sen(u)cos(u)\big(cos^2(v) + sen^2(v)\big)\big]$$

$$= [\rho^2 sen^2(u)cos(v)]\hat{\imath} + [\rho^2 sen^2(u)sen(v)]\hat{\jmath} + [\rho^2 sen(u)cos(u)]\hat{k}$$

$$= \big(\rho^2 sen^2(u)cos(v), \rho^2 sen^2(u)sen(v), \rho^2 sen(u)cos(u)\big)$$

Como el radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ es $\rho = 2$:

$$r_u \times r_v = \left(4sen^2(u)cos(v), 4sen^2(u)sen(v), 4sen(u)cos(u)\right)$$

A continuación se construye el **integrando**, comenzando con la composición del campo vectorial F con la función de la superficie r(u,v):

$$F(x, y, z) = (4x, y, 4z)$$

$$r(u, v) = \left(\overset{x}{2sen(u)cos(v)}, \overset{y}{2sen(u)sen(v)}, \overset{z}{2cos(u)}\right)$$

$$F\big(r(u, v)\big) = \Big(4\big(2sen(u)cos(v)\big), 2sen(u)sen(v), 4\big(2cos(u)\big)\Big)$$

y luego se le hace producto punto con el vector normal a la superficie:

$$F\big(r(u, v)\big) \cdot (r_u \times r_v) =$$

$$= \Big(4\big(2sen(u)cos(v)\big), 2sen(u)sen(v), 4\big(2cos(u)\big)\Big) \cdot \left(4sen^2(u)cos(v), 4sen^2(u)sen(v), 4sen(u)cos(u)\right)$$

$$= 32sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u)sen^2(v) + 32sen(u)cos^2(u)$$

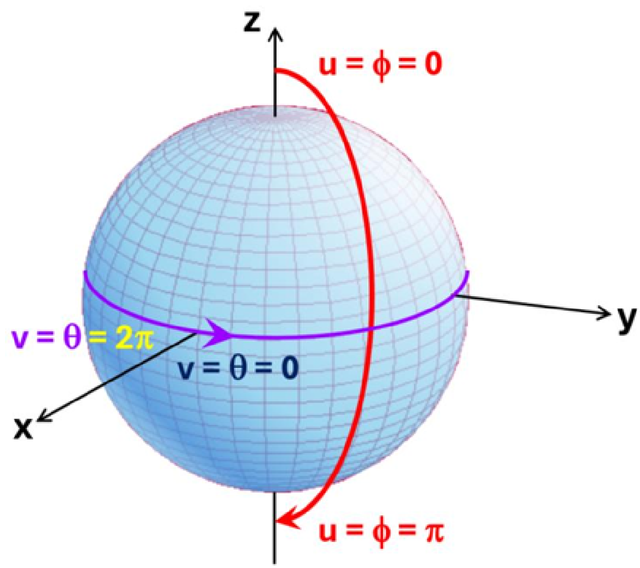
Conviene simplificar lo más posible esta función porque se va a integrar:

$$= 24sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u)sen^2(v) + 32sen(u)cos^2(u)$$

$$= 24sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u)\big(cos^2(v) + sen^2(v)\big) + 32sen(u)cos^2(u)$$

$$= 24sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u) + 32sen(u)cos^2(u)$$

Ahora viene la **integral de superficie**, pero primero se establecen los **límites de integración**, los cuales corresponden a las partes de la superficie. Se trata de una esfera de radio 2:



Como los parámetros variables u y v son los ángulos ϕ y θ respectivamente, y como el ángulo ϕ va del polo norte al polo sur de la esfera:

$$0 \leq u \leq \pi$$

En cambio, el ángulo θ recorre todo el ecuador de la esfera, dándole toda la vuelta:

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

Entonces la integral queda planteada como:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \big(24sen^3(u)cos^2(v) + 8sen^3(u) + 32sen(u)cos^2(u)\big)dudv$$

Efectuando cada parte de esta integral:

$$= \int_0^{2\pi} \left[24cos^2(v) \underbrace{\int_0^{\pi} sen^3(u)du}_{1} + 8 \underbrace{\int_0^{\pi} sen^3(u)du}_{2} + 32 \underbrace{\int_0^{\pi} sen(u)cos^2(u)du}_{3}\right] dv$$

Lo que viene a continuación es la aplicación de técnicas de integración; en las primeras dos integrales (**1** y **2**) hay un seno elevado a una potencia non, entonces se descompone el seno cúbico para poder introducir la ***identidad de Pitágoras***:

$$sen^2(u) + cos^2(u) = 1 \;\longrightarrow\; sen^2(u) = 1 - cos^2(u)$$

$$\int_0^{\pi} sen^3(u)du = \int_0^{\pi} sen^2(u)sen(u)du = \int_0^{\pi} \big(1 - cos^2(u)\big)sen(u)du$$

$$= \int_0^{\pi} sen(u)du - \int_0^{\pi} cos^2(u)sen(u)du$$

Las integrales resultantes son directas, la primera cumple con la fórmula del seno, y la segunda corresponde a la función potencia con base en el coseno, pues su derivada es menos seno:

$$= [-cos(u)]_{u=0}^{u=\pi} + \int_0^{\pi} cos^2(u)(-sen(u)du)$$

$$\int w^n dw: \quad \begin{matrix} w = cos(u) \\ dw = -sen(u)du \end{matrix}$$

$$= [-cos(u)]_{u=0}^{u=\pi} + \left[\frac{cos^3(u)}{3}\right]_{u=0}^{u=\pi}$$

$$= \{[-cos(\pi)] - [-cos(0)]\} + \left\{\frac{cos^3(\pi)}{3} - \frac{cos^3(0)}{3}\right\}$$

$$= \{[-(-1)] - [-1]\} + \left\{\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right\} = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

La última integral original en u (la **3**), también corresponde a la función potencia:

$$\int_0^{\pi} sen(u)cos^2(u)du = \int_0^{\pi} cos^2(u)(-sen(u)du)$$

$$\int w^n dw: \quad \begin{matrix} w = cos(u) \\ dw = -sen(u)du \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{cos^3(u)}{3}\right]_{u=0}^{u=\pi} = \frac{cos^3(\pi)}{3} - \frac{cos^3(0)}{3} = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = -\frac{2}{3}$$

Sustituyendo estos resultados en la integral original:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} \left[24cos^2(v)\overset{\mathbf{1}}{\frac{4}{3}} + 8\overset{\mathbf{2}}{\frac{4}{3}} + 32\overset{\mathbf{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)}\right] dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[32cos^2(v) - \frac{32}{3}\right] dv$$

Finalmente se desarrolla la integral en v:

$$\int_0^{2\pi}\left[32cos^2(v)-\frac{32}{3}\right]dv = 32\int_0^{2\pi}cos^2(v)dv-\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}dv$$

En la primera integral hay un coseno cuadrado, como su potencia es par, entonces se aplica la identidad trigonométrica:

$$cos^2(v)=\frac{1+cos(2v)}{2}$$

Con esta identidad se reduce la potencia del coseno para obtener una integral más fácil:

$$32\int_0^{2\pi}cos^2(v)dv-\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}dv = 32\int_0^{2\pi}\frac{1+cos(2v)}{2}dv-\frac{32}{3}[v]_{v=0}^{v=2\pi}$$

$$=\frac{32}{2}\left[\int_0^{2\pi}dv+\int_0^{2\pi}cos(2v)dv\right]-\frac{32}{3}[2\pi-0]$$

$$\int cos(w)dw: \quad \begin{matrix} w=2v \\ dw=2dv \end{matrix}$$

$$=\frac{32}{2}[v]_{v=0}^{v=2\pi}+\frac{32}{2(2)}\int_0^{2\pi}cos(2v)2dv-\frac{32}{3}[2\pi]$$

$$=\frac{32}{2}[2\pi-0]+\frac{32}{4}[sen(2v)]_{v=0}^{v=2\pi}-\frac{64}{3}\pi$$

$$=\frac{32}{2}[2\pi]+\frac{32}{4}[sen(4\pi)-sen(0)]-\frac{64}{3}\pi$$

$$=32\pi+\frac{32}{4}[0]-\frac{64}{3}\pi=\frac{96}{3}\pi-\frac{64}{3}\pi=\frac{32}{3}\pi$$

El flujo del campo F a través de la superficie es:

$$\Phi=\iint_S F\cdot d\sigma=\frac{32}{3}\pi$$

Un último comentario sobre esta integral, como la esfera es una superficie cerrada, al símbolo de integral se le agrega un círculo:

$$\Phi=\oiint_S F\cdot d\sigma=\frac{32}{3}\pi$$

Esto no cambia en nada el procedimiento de cálculo ni el resultado obtenido, sólo indica que la integral se realizó a sobre una superficie cerrada.

37) Calcular $\oint_C -e^x cos(2y)dx + 2e^x sen(2y)dy$, a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=4$.

Resolución:

Como la región de integración es una circunferencia, la cual es una curva o trayectoria, pero en Matemáticas es considerada en general como una línea, entonces se trata de un integral de línea. Esta integral está expresada en forma diferencial, y como posee dos términos, el campo vectorial a ser integrado está definido en $\mathbb{R}^2$. Como en toda integral, primero se plantea la **región de integración**, y como es una trayectoria se realiza su **parametrización**, que para una circunferencia es vía las coordenadas polares:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsen(\theta)$$

En la circunferencia, el radio es una constante:

$$\overset{\mathbf{r^2}}{x^2 + y^2} = 4 \;\; \longrightarrow \;\; r = \sqrt{4} = 2$$

Pero el ángulo es variable, por lo que es definido como el parámetro que permite ubicar los puntos de la curva:

$$\theta = t$$

Entonces, la parametrización de la trayectoria es:

$$x = 2cos(t)$$
$$y = 2sen(t)$$

Y esto conforma una función vectorial de variable escalar:

$$c(t) = \left(\overset{\mathbf{x}}{2cos(t)}, \overset{\mathbf{y}}{2sen(t)}\right)$$

Luego, se obtiene el **vector tangente** a la curva, es decir, su derivada:

$$c'(t) = \left(\underset{\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}}{-2sen(t)}, \underset{\boldsymbol{\frac{dy}{dt}}}{2cos(t)}\right)$$

La función c(t) se sustituye en los términos de la expresión diferencial de la integral, y el vector tangente en las diferenciales, pues por definición:

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$
$$dy = \left(\frac{dy}{dt}\right) dt$$

De esta forma, ya se puede expresar el **integrando** en términos de la variable principal de la región de integración, que es **t**:

$$-e^{x} cos(2y)dx + 2e^{x} sen(2y)dy$$
$$-e^{2cos(t)} cos\left(2\big(2sen(t)\big)\right)\big(-2sen(t)\big)dt + 2e^{2cos(t)} sen\left(2\big(2sen(t)\big)\right)\big(2cos(t)\big)dt$$

Finalmente, se determinan los **límites de integración**, los cuales corresponden al parámetro t, que a su vez es el ángulo; como la integral se debe calcular a lo largo de toda la circunferencia, entonces:

$$t \in [0,2\pi]$$

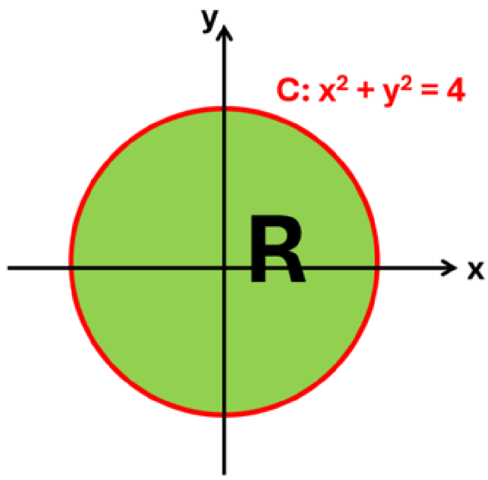
Y la **integral** resulta ser:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy$$
$$= \oint_0^{2\pi} 2e^{2cos(t)} cos\big(4sen(t)\big) sen(t)dt + 4e^{2cos(t)} sen\big(4sen(t)\big) cos(t)dt$$

Desafortunadamente esta integral es muy complicada, entonces se debe optar por otro método. Como la integral se efectúa a lo largo de una trayectoria cerrada, la cual encierra una región conexa simple (sin agujeros ni partes separadas), y como la dirección de cálculo es en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces se cumplen las condiciones del **Teorema de Green**:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

La integral se va a efectuar como integral doble sobre el círculo, la parte encerrada por la circunferencia (el exterior del círculo):



Se desarrolla el **integrando** de la **integral doble**:

$$\oint_C \overbrace{-e^x cos(2y)}^{F_1}dx + \overbrace{2e^x sen(2y)}^{F_2}dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}2e^x sen(2y) = 2sen(2y)\frac{\partial}{\partial x}e^x = 2e^x sen(2y)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x cos(2y)\right) = -e^x\frac{\partial}{\partial y}cos(2y) = 2e^x sen(2y)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2e^x sen(2y) - 2e^x sen(2y) = 0$$

Entonces, la **integral doble** queda como:

$$\iint_R 0dxdy = 0$$

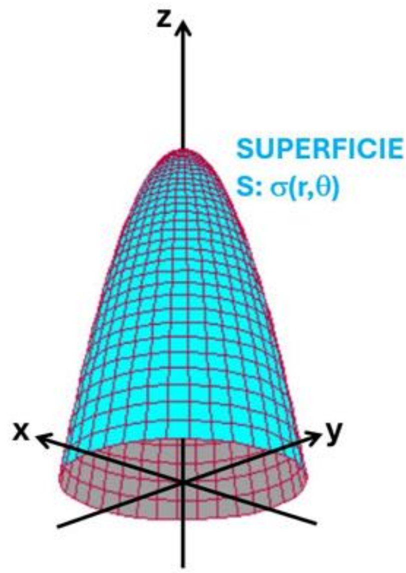
Este resultado corresponde a la integral de línea original:

$$\oint_C -e^x cos(2y)dx + 2e^x sen(2y)dy = \iint_R 0dxdy = 0$$

38) Calcular la integral del rotacional de F(x,y,z) = (3y,4z,–6x) sobre la superficie dada por $\sigma(r,\theta)$ = (rcosθ,rsenθ,9–r^2) con rε[0,3] y $\theta\varepsilon[0,2\pi]$.

Resolución:

La región de integración es una superficie parametrizada, cuya expresión funcional corresponde a un paraboloide de revolución:



La integral a desarrollar es una integral de superficie vectorial porque el enunciado del problema pide integrar el rotacional de un campo vectorial:

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\sigma = \iint_R \nabla \times F\big(\sigma(r,\theta)\big) \cdot (\sigma_r \times \sigma_\theta) dr d\theta$$

Se calcula el **rotacional del campo vectorial**:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix}$$

$$= +\hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(-6x) - \frac{\partial}{\partial z}4z\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-6x) - \frac{\partial}{\partial z}3y\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}4z - \frac{\partial}{\partial y}3y\right)$$

$$= (0-4)\hat{\imath} - (-6-0)\hat{\jmath} + (0-3)\hat{k}$$

$$= -4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k} = (-4,6,-3)$$

En cuanto a la **región de integración**, es una superficie y ya está **parametrizada**:

$$\sigma(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), 9 - r^2)$$

entonces se determina su **vector normal**:

$$\sigma_r = \frac{\partial\sigma}{\partial r} = (cos(\theta), sen(\theta), -2r)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (-rsen(\theta), rcos(\theta), 0)$$

$$\sigma_r \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ cos(\theta) & sen(\theta) & -2r \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +\hat{\imath}\big(0 + 2r^2cos(\theta)\big) - \hat{\jmath}\big(0 - 2r^2sen(\theta)\big) + \hat{k}\big(rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)\big)$$

$$= \big(2r^2cos(\theta)\big)\hat{\imath} - \big(-2r^2sen(\theta)\big)\hat{\jmath} + \Big(r\big(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\big)\Big)\hat{k}$$

$$= \big(2r^2cos(\theta)\big)\hat{\imath} + \big(2r^2sen(\theta)\big)\hat{\jmath} + (r)\hat{k}$$

$$\sigma_r \times \sigma_\theta = (2r^2cos(\theta), 2r^2sen(\theta), r)$$

Luego se desarrolla el **integrando**, primero se sustituye la función de la superficie en el rotacional del campo vectorial, pero como es un vector constante, queda igual:

$$\nabla \times F\big(\sigma(r,\theta)\big) = (-4,6,-3)$$

Después se efectúa el producto punto con el vector normal:

$$\nabla \times F\big(\sigma(r,\theta)\big) \cdot (\sigma_r \times \sigma_\theta) = (-4,6,-3) \cdot (2r^2cos(\theta), 2r^2sen(\theta), r)$$

$$= -8r^2cos(\theta) + 12r^2sen(\theta) - 3r$$

Finalmente, se efectúa la **integral de superficie** con los límites de integración para cada variable indicados por el enunciado del problema:

$$r \in [0,3] \ \ ,\theta \in [0,2\pi]$$

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-8r^2cos(\theta) + 12r^2sen(\theta) - 3r)drd\theta$$

Como el integrando está conformado por sumas y restas, conviene separarlo en varias integrales:

$$= \int_0^{2\pi} \left[-8cos(\theta) \int_0^3 r^2 dr + 12sen(\theta) \int_0^3 r^2 dr - 3 \int_0^3 r dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-8cos(\theta) \frac{r^3}{3} + 12sen(\theta) \frac{r^3}{3} - 3 \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-8cos(\theta) \frac{(3)^3}{3} + 12sen(\theta) \frac{(3)^3}{3} - 3 \frac{(3)^2}{2} \right] d\theta - \int_0^{2\pi} \left[-8cos(\theta) \frac{(0)^3}{3} + 12sen(\theta) \frac{(0)^3}{3} - 3 \frac{(0)^2}{2} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-8cos(\theta) \frac{27}{3} + 12sen(\theta) \frac{27}{3} - 3 \frac{9}{2} \right] d\theta - 0$$

$$= -8(9) \int_0^{2\pi} cos(\theta) d\theta + 12(9) \int_0^{2\pi} sen(\theta) d\theta - \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Todas las integrales son directas:

$$= \left[-72sen(\theta) + 108\big(-cos(\theta)\big) - \frac{27}{2}\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

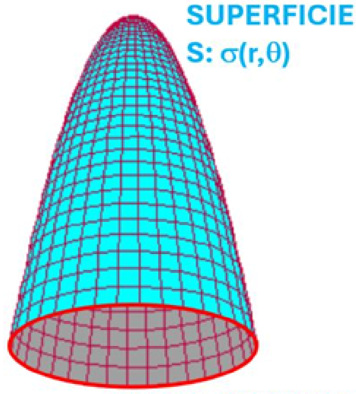
$$= \left[-72sen(2\pi) - 108cos(2\pi) - \frac{27}{2}(2\pi) \right] - \left[-72sen(0) - 108cos(0) - \frac{27}{2}(0) \right]$$

$$= \left[-72(0) - 108(1) - \frac{27}{2}(2\pi) \right] - [-72(0) - 108(1) - 0]$$

$$= [0 - 108 - 27\pi] - [0 - 108 - 0]$$

$$= -108 - 27\pi + 108 = -27\pi$$

Hasta aquí termina esta integral, pero existe otro camino de resolución, pues la integral cumple con las condiciones del **Teorema de Stokes**: la región de integración es una superficie abierta (con boca descrita por una curva cerrada), y el integrando es el rotacional de un campo vectorial:



Entonces, la integral de superficie se puede rehacer de acuerdo con este teorema:

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\sigma = \oint_C F \cdot dc$$

donde dc corresponde a la diferencial de longitud de la curva descrita en forma vectorial. La orilla de la superficie es una curva cerrada que corresponde a una circunferencia localizada sobre el plano xy (con z = 0); como el componente z de la superficie parametrizada es:

$$z = 9 - r^2$$

entonces:

$$0 = 9 - r^2$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

es una circunferencia de radio 3. La **parametrización de la curva** es:

$$c(t) = (3cos(t), 3sen(t), 0)$$

y su **vector tangente** es:

$$c'(t) = (-3sen(t), 3cos(t), 0)$$

El **integrando** de la integral de línea es:

$$F(x, y, z) = (\underbrace{3y}_{\mathbf{x}}, \underbrace{4z}_{\mathbf{y}}, \underbrace{-6x}_{\mathbf{z}})$$

$$c(t) = (3cos(t), 3sen(t), 0)$$

$$F\big(c(t)\big) = \Big(3\big(3sen(t)\big), 4(0), -6\big(3cos(t)\big)\Big)$$

$$F\big(c(t)\big) = \big(9sen(t), 0, -18cos(t)\big)$$

y se le aplica producto punto con el vector tangente:

$$F\big(c(t)\big) \cdot c'(t) = \big(9sen(t), 0, -18cos(t)\big) \cdot (-3sen(t), 3cos(t), 0)$$

$$= -27sen^2(t) + 0 + 0 = -27sen^2(t)$$

Finalmente, se desarrolla la **integral de línea**:

$$\oint_C F \cdot dc = \oint_C F\big(c(t)\big) \cdot c'(t)dt$$

Sus límites de integración corresponden al ángulo t, el cual da la vuelta completa:

$$\oint_C F\big(c(t)\big) \cdot c'(t)dt = -27\oint_0^{2\pi} sen^2(t)dt$$

Esta integral no es directa, pero se efectúa aplicando la identidad trigonométrica:

$$sen^2(t) = \frac{1 - cos(2t)}{2}$$

$$\oint_C F\big(c(t)\big) \cdot c'(t)dt = -\frac{27}{2}\oint_0^{2\pi}\big(1 - cos(2t)\big)dt$$

$$= -\frac{27}{2}\oint_0^{2\pi} dt + \frac{27}{2}\oint_0^{2\pi} cos(2t)dt$$

$$\int cos(u)du: \quad \begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix}$$

$$= \left[-\frac{27}{2}t\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{27}{2(2)}\oint_0^{2\pi} cos(2t)2dt$$

$$= \left[-\frac{27}{2}t + \frac{27}{4}sen(2t)\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \left[-\frac{27}{2}(2\pi) + \frac{27}{4} sen(4\pi)\right] - \left[-\frac{27}{2}(0) + \frac{27}{4} sen(0)\right]$$

$$= \left[-27\pi + \frac{27}{4}(0)\right] - \left[-\frac{27}{2}(0) + \frac{27}{4}(0)\right]$$

$$= [-27\pi + 0] - [0 + 0] = -27\pi$$

Se obtiene el mismo resultado que con la integral de superficie, pero el procedimiento es más corto, pues no fue necesario el rotacional ni la obtención del vector normal a la superficie.

39) Calcular la integral de la divergencia de F(x,y,z) = (x^3,y^3,z^3) en todo el volumen de la esfera de radio 2 centrada en el origen.

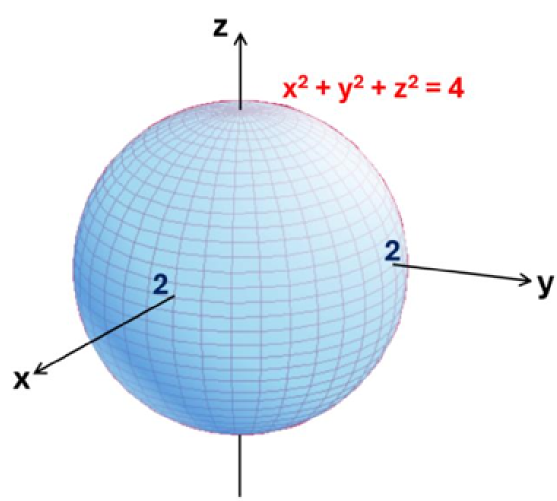
Resolución:

La **divergencia** del campo vectorial es:

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x^3, y^3, z^3) = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

La **región de integración** es el volumen encerrado por la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2)^2 = 4$$



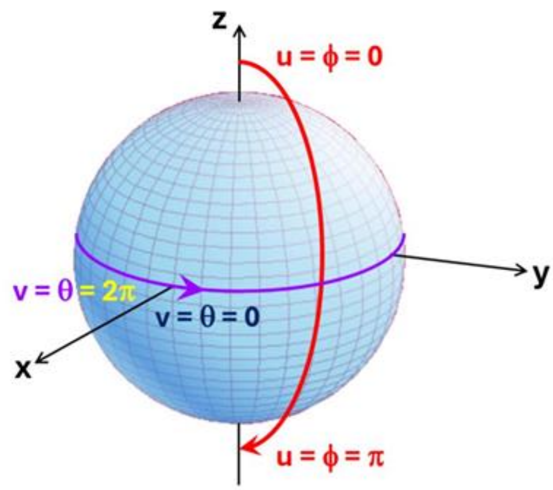
La integral a efectuar conviene plantearla en **coordenadas esféricas**:

$$\iiint\limits_V (\nabla \cdot F) dV = \iiint\limits_V (\nabla \cdot F) |J(\rho, \phi, \theta)| \, d\rho d\phi d\theta$$

donde el jacobiano de las coordenadas esféricas es:

$$J(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 sen(\phi)$$

Y los límites de integración deben cubrir todo el volumen de la esfera:



El **integrando** en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3\rho^2$$

Entonces, la **integral** de la divergencia queda planteada como:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} 3\rho^2 |\rho^2 sen(\phi)| d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 3\rho^4 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3sen(\phi) \int_0^2 \rho^4 d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[3sen(\phi) \frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{3}{5} sen(\phi)(2)^5 - \frac{3}{5} sen(\phi)(0)^5 \right] d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{3(32)}{5} sen(\phi) - 0 \right] d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3(32)}{5} \int_0^{\pi} sen(\phi) d\phi d\theta$$

$$= \frac{3(32)}{5}\int_0^{2\pi}[-cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi}d\theta = \frac{96}{5}\int_0^{2\pi}\left[-cos(\pi) - \left(-cos(0)\right)\right]d\theta$$

$$= \frac{96}{5}\int_0^{2\pi}[-(-1) + (1)]d\theta = \frac{96}{5}\int_0^{2\pi}[1+1]d\theta$$

$$= \frac{96(2)}{5}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{192}{5}\theta|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{192}{5}[2\pi - 0] = \frac{192}{5}2\pi = \frac{384}{5}\pi$$

Este resultado también se puede obtener si la integral se plantea mediante el **Teorema de Gauss**, pues la región de integración es una superficie cerrada (sin boca ni huecos, y encierra un volumen):

$$\iiint\limits_V (\nabla \cdot F)dV = \oiint\limits_S F \cdot d\sigma$$

Para ello, primero se debe obtener la **función parametrizada** que describe la **superficie**; como es una esfera, se emplean las coordenadas esféricas:

$$x = \rho sen(\phi)cos(\theta)$$

$$y = \rho sen(\phi)sen(\theta)$$

$$z = \rho cos(\phi)$$

El radio de la esfera es constante, pero los ángulos ϕ y θ son variables, por lo que se proponen como parámetros:

$$\phi = u$$

$$\theta = v$$

Entonces, la función de la superficie es:

$$r(u,v) = \left(\rho sen(u)cos(v), \rho sen(u)sen(v), \rho cos(u)\right)$$

Luego se obtiene el **vector normal** a la superficie:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\rho sen(u)cos(v), \frac{\partial}{\partial u}\rho sen(u)sen(v), \frac{\partial}{\partial u}\rho cos(u)\right)$$

$$= \left(\rho cos(u)cos(v), \rho cos(u)sen(v), -\rho sen(u)\right)$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\rho sen(u)cos(v), \frac{\partial}{\partial v}\rho sen(u)sen(v), \frac{\partial}{\partial v}\rho cos(u)\right)$$

$$= (-\rho sen(u)sen(v), \rho sen(u)cos(v), 0)$$

$$r_u \times r_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + \qquad\qquad & - \qquad\qquad & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \rho cos(u)cos(v) & \rho cos(u)sen(v) & -\rho sen(u) \\ -\rho sen(u)sen(v) & \rho sen(u)cos(v) & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= +\hat{\imath}\left(0 + \rho^2 sen^2(u)cos(v)\right) - \hat{\jmath}\left(0 - \rho^2 sen^2(u)sen(v)\right) + \hat{k}\left(\rho^2 sen(u)cos(u)cos^2(v) + \rho^2 sen(u)cos(u)sen^2(v)\right)$$

$$= \left(\rho^2 sen^2(u)cos(v)\right)\hat{\imath} + \left(\rho^2 sen^2(u)sen(v)\right)\hat{\jmath} + \left(\rho^2 sen(u)cos(u)\left(cos^2(v) + sen^2(v)\right)\right)\hat{k}$$

$$= \left(\rho^2 sen^2(u)cos(v)\right)\hat{\imath} + \left(\rho^2 sen^2(u)sen(v)\right)\hat{\jmath} + \left(\rho^2 sen(u)cos(u)\right)\hat{k}$$

$$= \left(\rho^2 sen^2(u)cos(v), \rho^2 sen^2(u)sen(v), \rho^2 sen(u)cos(u)\right)$$

Se desarrolla el **integrando**, primero con la sustitución de la función de superficie en el campo vectorial:

$$F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$$

$$r(u, v) = \left(\overset{x}{\rho sen(u)cos(v)}, \overset{y}{\rho sen(u)sen(v)}, \overset{z}{\rho cos(u)}\right)$$

$$F\left(r(u, v)\right) = \left(\left(\rho sen(u)cos(v)\right)^3, \left(\rho sen(u)sen(v)\right)^3, \left(\rho cos(u)\right)^3\right)$$

y luego se efectúa el producto punto con el vector normal a la superficie:

$$F\left(r(u, v)\right) \cdot (r_u \times r_v) = \left(\left(\rho sen(u)cos(v)\right)^3, \left(\rho sen(u)sen(v)\right)^3, \left(\rho cos(u)\right)^3\right) \cdot \left(\rho^2 sen^2(u)cos(v), \rho^2 sen^2(u)sen(v), \rho^2 sen(u)cos(u)\right)$$

$$= \rho^5 sen^5(u)cos^4(v) + \rho^5 sen^5(u)sen^4(v) + \rho^5 sen(u)cos^4(u)$$

Y como el radio de la esfera es $\rho = 2$:

$$F\left(r(u, v)\right) \cdot (r_u \times r_v) = (2)^5 sen^5(u)cos^4(v) + (2)^5 sen^5(u)sen^4(v) + (2)^5 sen(u)cos^4(u)$$

$$F\left(r(u, v)\right) \cdot (r_u \times r_v) = 32sen^5(u)cos^4(v) + 32sen^5(u)sen^4(v) + 32sen(u)cos^4(u)$$

Finalmente, se realiza la **integral de superficie**, cuyos límites de integración corresponden a:

$$\phi = u: \ u \in [0, \pi]$$

$$\theta = v: \ v \in [0, 2\pi]$$

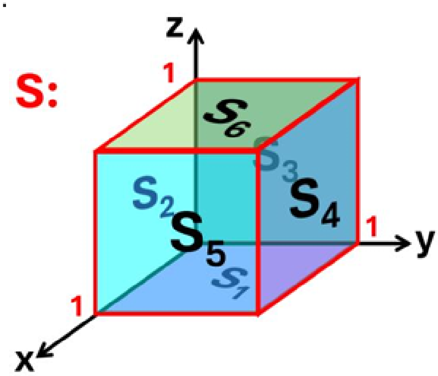
$$\oiint_S F \cdot d\sigma = \int_{v=0}^{v=2\pi} \int_{u=0}^{u=\pi} \big(32sen^5(u)cos^4(v) + 32sen^5(u)sen^4(v) + 32sen(u)cos^4(u)\big)dudv$$

Esta integral es más laboriosa y produce el mismo resultado, por lo que en este teorema conviene sólo efectuar la integral de la divergencia.

40) Realizar la integral del campo F = (x,y,z) sobre la superficie del cubo unitario con vértice en el origen.

Resolución:

La **región de integración** es una superficie cerrada conformada por seis planos que construyen un cubo:



La integral del campo se debe calcular en cada plano mediante la **propiedad de aditividad**:

$$\oiint_S F \cdot d\sigma = \iint_{S_1} F \cdot d\sigma + \iint_{S_2} F \cdot d\sigma + \iint_{S_3} F \cdot d\sigma + \iint_{S_4} F \cdot d\sigma + \iint_{S_5} F \cdot d\sigma + \iint_{S_6} F \cdot d\sigma$$

Recuérdese que el círculo (u óvalo) colocado sobre el signo de la integral doble indica el cálculo de la integral sobre una superficie cerrada (sin boca ni agujeros), que en este caso es toda la superficie exterior del cubo.

Aunque cada integral efectuada sobre una cara del cubo resulta ser muy sencilla, el realizar seis integrales de superficie es muy laborioso. Como la superficie cumple con las condiciones del **Teorema de Gauss**, entonces:

$$\oiint_S F \cdot d\sigma = \iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV$$

Entonces, primero se calcula la **divergencia** del campo vectorial:

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Luego se efectúa la **integral triple**, cuyos límites de integración en coordenadas cartesianas (o rectangulares) son:

$$x \in [0,1]$$

$$y \in [0,1]$$

$$z \in [0,1]$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV = \int_{z=0}^{z=1} \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=1} 3dxdydz = 3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dxdydz$$

$$= 3 \int_0^1 \int_0^1 [x]_{x=0}^{x=1} dydz = 3 \int_0^1 \int_0^1 [1-0] dydz$$

$$= 3 \int_0^1 \int_0^1 dydz = 3 \int_0^1 [y]_{y=0}^{y=1} dz = 3 \int_0^1 [1-0] dz$$

$$= 3 \int_0^1 dz = 3[z]_{z=0}^{z=1} = 3[1-0] = 3$$

Este resultado debe ser el mismo si se realizan las seis integrales de superficie que conforman a la superficie completa del cubo:

$$\oiint_S F \cdot d\sigma = \iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV = 3$$