Guía de Estudio para el Examen Extraordinario de Ecuaciones Diferenciales

La presente guía es un material de apoyo para los estudiantes de la Facultad de Química que presentan el Examen Extraordinario de Ecuaciones diferenciales (clave 1307). Esta guía en ningún momento sustituye el contenido del curso de Ecuaciones Diferenciales ni el contenido de ninguno de los textos mencionados en la bibliografía. Los problemas aquí presentados pueden o no estar incluidos en el Examen Extraordinario.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN **4**
- 1.1. Definición y clasificación de ecuaciones diferenciales. 4
- 1.2. Problemas que dan origen a las ecuaciones diferenciales. 5
- 1.3. Tipos de soluciones. 6
- 1.4. Problema de valores iniciales. 7
- 1.5. Curvas integrales. 9
- 1.6. Campos de direcciones. 9
- 1.7. Teoremas de existencia y unicidad (sin demostración). 10
- 1.8. Comportamiento cualitativo de soluciones. 11

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN **12**
- 2.1. Ecuaciones exactas. 12
- 2.2. Ecuaciones de variables separables. 14
- 2.3. Factores integrantes. 17
- 2.4. Ecuaciones homogéneas. 18
- 2.5. Ecuaciones lineales. 21
- 2.6. Ecuaciones de Bernoulli. 23

3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN **27**
- 3.1. Problemas geométricos. 27
- 3.2. Familias de curvas. 28
- 3.3. Trayectorias isogonales y ortogonales. 31
- 3.4. Problemas de diluciones y mezclas. 31
- 3.5. Decaimiento radiactivo. 34
- 3.6. Ecosistemas y poblaciones (sistemas ecológicos competencia por alimentos, productividad, red trófica). 36
- 3.7. Procesos de 1er orden. 38
- 3.8. Procesos de 2º orden. 39

4. ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN **41**
- 4.1. Reducción de orden. 41
- 4.2. Teoría general de las ecuaciones lineales. 45

4.3. Ecuaciones homogéneas. 45
4.4. Dependencia lineal. 45
4.5. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes. 48
4.6. El problema no homogéneo. 50
4.7. Vibraciones en sistemas mecánicos. 54
4.8. Ley de Newton y movimiento planetario. 55
4.9. Circuitos eléctricos. 56
4.10. Otras aplicaciones como Neurofisiología (procesos neurales, neurona formal continua, discriminación psicofísica, movimiento ocular). 57
4.11. Generalización a ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes. 59

5. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN 62
5.1. Introducción y nociones generales. 62
5.2. Sistemas lineales. 63
5.3. Método de eliminación. 64
5.4. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. 67
5.5. Método de matrices. 68
5.6. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes. . . . 72
5.7. Las ecuaciones de Volterra. 76
5.8. Aplicaciones. 77

6. SERIES, SOLUCIONES DE ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN 79
6.1. Introducción. 79
6.2. Generalidades sobre las series de potencias. 80
6.3. Puntos ordinarios. Solución en serie cerca de los puntos ordinarios. 82
6.4. Puntos singulares regulares. 86
6.5. Ecuaciones de Euler, Legendre, Chebychev, Jacobi, Hermite, Bessel y Laguerre. 87

7. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE 90
7.1. Operador Transformada de Laplace. 90
7.2. Teorema de existencia, linealidad y aplicación del operador. . . . 91
7.3. Resolución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. 92
7.4. Resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales. 94

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Definición y clasificación de ecuaciones diferenciales.

1. **Problema** Clasifíque las siguientes ecuaciones diferenciales como ordinaria (EDO) o parcial (EDP), proporcione el orden e indique las variables independientes y dependientes. Si la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, indique si es lineal o no lineal.

   a) $ln(x)\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{dy}{dx} = e^x$
   Solución Ecuación diferencial ordinaria, tercer orden, variable dependiente: y, variable independiente: x, lineal

   b) $V\frac{dV}{dT} - T = cos(2\pi T)$
   Solución Ecuación diferencial ordinaria, primer orden, variable dependiente: V, variable independiente: T, No lineal

   c) $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$ donde $V(x)$ es una función de x y E es un constante.

   Solución Ecuación diferencial ordinaria, segundo orden, variable dependiente: ψ, variable independiente: x, lineal

   d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cos(x)sen(y)$
   Solución Ecuación diferencial parcial, segundo orden, variable dependiente: u, variables independientes: x y y.

   e) $ln(x)\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^2y}{dx^2} = y^2e^x$
   Solución Ecuación diferencial ordinaria, cuarto orden, variable dependiente: y, variable independiente: x, no lineal

   f) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}cos\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = xy$
   Solución Ecuación diferencial parcial, segundo orden, variable dependiente: u, variables independientes: x y y.

g) $\left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)^2 - cos(t)\frac{d^3x}{dt^3} + e^{2t}x = 3$
Solución Ecuación diferencial ordinaria, cuarto orden, variable dependiente: y, variable independiente: x, no lineal

h) $\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - r^{-1}\frac{\partial C}{\partial r} = kN$ donde k es una constante.
Solución Ecuación diferencial parcial, segundo orden, variable dependiente: C, variables independientes: r y t.

2. **Problema** Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $(y'')^2 - 4y' = x^2$
   Solución 2° orden 2° grado

   b) $(y'^3) + xy = e^x$
   Solución 1er orden 3er grado

   c) $y''' + 3xy^3 = 5y'$
   Solución 3er orden 1er grado

3. **Problema** Determinar el orden de las ecuaciones y si son o no lineales

   a) $y' = \sqrt{1 + y''}$
   Solución 2° orden, no lineal

   b) $x^3y''' - x^2y'' - 3y = 0$
   Solución 3er orden, lineal

   c) $y' = xy^(1/2)$
   Solución 1er orden, no lineal

1.2. Problemas que dan origen a las ecuaciones diferenciales.

1. **Problema** ¿Cuáles serán las curvas que verifican que la pendiente en cada uno de sus puntos es igual al triple de la distancia del origen del sistema de coordenadas a cada punto de la curva? Establezca la ecuación que resuelve el problema.

   Solución

   Considere que la ecuación de la curva que se busca es de la forma $y = f(x)$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x + y} \tag{1.1}$$

2. **Problema** ¿Cuál será el camino $x(t)$ recorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 segundos el cuerpo recorre 100 metros? Establezca la ecuación que resuelve el problema.

Solución

Considerando que el cuerpo se encuentra en $x(0) = 0$ al tiempo $t = 0$ y sabiendo que la velocidad del cuerpo está dado por $\frac{dx(t)}{dt}$ donde $x(t)$ representa la trayectoria que sigue, entonces la ecuación que modela el problema resulta ser $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$, donde k es la constante de proporcionalidad. También se tiene que $x(10) = 100$

3. **Problema** La rapidez de cambio de la cantidad de reactivo en una reacción química es directamente proporcional a la cantidad de reactivo presente. ¿Cómo se expresa esto de forma simbólica? $A \to B$.

   Solución $\frac{dA}{dt} \propto [A]$

4. **Problema** Si P representa el tamaño de una población de bacterias en su fase exponencial de crecimiento, la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población. ¿Cuál es la ecuación diferencial que representa esto?

   Solución $\frac{dP}{dt} \propto P$

1.3. Tipos de soluciones.

1. **Problema** Muestre que la función explícita $y = e^{2x} - 2e^{5x}$ es solución a la ecuación diferencial $y'' - 7y' + 10y = 0$

   Solución

   Se tiene que

$$y = e^{2x} - 2e^{5x} \tag{1.2}$$
$$y' = 2e^{2x} - 10e^{5x} \tag{1.3}$$
$$y'' = 4e^{2x} - 50e^{5x} \tag{1.4}$$

   de donde sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$\begin{aligned} y'' - 7y' + 10y &= 4e^{2x} - 50e^{5x} - 7\left(2e^{2x} - 10e^{5x}\right) + 10\left(e^{2x} - 2e^{5x}\right) \\ &= 4e^{2x} - 50e^{5x} - 14e^{2x} + 70e^{5x} + 10e^{2x} - 20e^{5x} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. **Problema** Muestre que

$$x^2 - xy^2 = 4 \tag{1.6}$$

   es una solución implícita a la ecuación diferencial

$$(2x - y^2)dx - 2xydy = 0. \tag{1.7}$$

   Solución

Diferenciando ambos lados de (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} d\left(x^2 - xy^2 = 4\right) &= d\left(x^2\right) - d\left(xy^2\right) = d\,(4) \\ &= 2xdx - x2ydy - y^2dx = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

de donde $(2x - y^2)dx - 2xydy = 0$, es decir recuperamos la ecuación diferencial (1.7). Por lo tanto, (1.6) es solución a la ecuación diferencial (1.7).

3. **Problema** Determinar si las siguientes soluciones de una ecuación diferencial son generales o particulares:

   a) $x + y^2 = c$
   Solución solución general

   b) $y = xlnx$
   Solución solución particular

   c) $y = 1/x$
   Solución solución particular

   d) $y = C_1e^2x + C_2e^3x$
   Solución solución general

4. **Problema** Determinar si la solución general $x + y^2 = c$ es solución de la ecuación diferencial $y' = -\frac{1}{2y}$.

   Solución

   Derivar implícitamente la ecuación $x + y^2 = c$:

   $$1 + 2yy' = 0$$

   Despejando:

   $$y' = -\frac{1}{2y}$$

   Sustituyendo en

   $$y' = -\frac{1}{2y}:$$

   $$-\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2y}$$

1.4. Problema de valores iniciales.

1. **Problema** Muestre que $y(x) = c_1cos(2t) + c_2sen(2t)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ y encuentre los valores de c_1y c_2 que cumplan con las condiciones iniciales $y(0) = 3$ y $y'(0) = 4$

   Solución

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1 cos(2t) + c_2 sen(2t) \\
y'(t) &= -2c_1 sen(2t) + 2c_2 cos(2t) \\
y''(t) &= -4c_1 cos(2t) - 4c_2 sen(2t)
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$y'' + 4y = -4c_1 cos(2t) - 4c_2 sen(2t) + 4\left(c_1 cos(2t) + c_2 sen(2t)\right) = 0$$

Por otro lado,

$$y(0) = c_1 cos(0) + c_2 sen(0) = c_1 = 3$$

y

$$y'(0) = -2c_1 sen(0) + 2c_2 cos(0) = 2c_2 = 4 \tag{1.10}$$

de donde se tiene que, $c_1 = 3$ y $c_2 = 2$, por lo que la solución particular es $y(x) = 3cos(2t) + 2sen(2t)$

2. **Problema** Cuando tenemos un **problema de valor inicial**

   $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ sujeto a $y(x_0) = y_0$

   La solución es una función que satisfaga la ecuación y que pase por el punto (x_0, y_0).

   [x] Cierto

   [ ] Falso

   [ ] Depende de la ecuación.

   [ ] Depende de la condición inicial.

   Solución

   Es la definición.

3. **Problema** La función $y = c_1x^4 + c_2x^{-1}$ es una familia solución de $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$. Determine la solución del problema de valores iniciales con la misma ecuación diferencial y las condiciones iniciales $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$.

   Solución:

   $y = -\dfrac{1}{5}x^4 + \dfrac{11}{5}x^{-1}$

   Desarrollo:

   $2 = y(1) = c_1 1^4 + c_2 1^{-1} = c_1 + c_2$

   $y' = 4c_1x^3 - c_2x^{-2}$

   $-3 = y'(1) = 4c_1 1^3 - c_2 1^{-2} = 4c_1 - c_2$

Al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ 4c_1 & - & c_2 & = & -3 \end{array}$$

se tiene que $c_1 = -\dfrac{1}{5}$ y $c_2 = \dfrac{11}{5}$.

1.5. Curvas integrales.

1. **Problema** Muestre que la familia de curvas $x^2 - y^2 = c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y\frac{dy}{dx} - x = 0$ para cada constante c.

   Solución

   Derivado implícitamente se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2 - y^2\right) &= \frac{d}{dx}(c) \\ \frac{d}{dx}\left(x^2\right) - \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= 0 \\ 2x - 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

   de donde se tiene finalmente que, $y\frac{dy}{dx} - x = 0$

2. **Problema**. Una **curva integral** es la gráfica de cualquiera de las soluciones de una ecuación diferencial.

   Solución

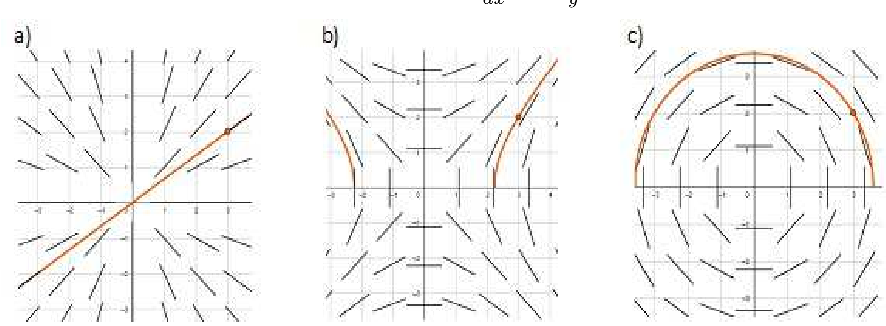
   [x] Cierto

   [ ] Falso

   Es la definición.

1.6. Campos de direcciones.

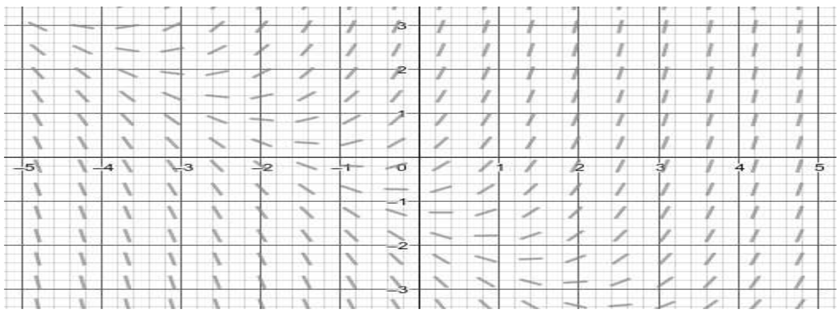
1. **Problema** Seleccione de las figuras mostradas el campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$



Solución

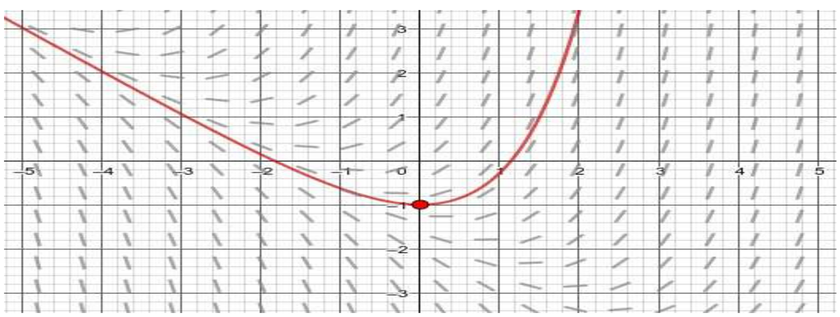
Inciso (c)

2. **Problema** Use el siguiente campo de direcciones para trazar una curva solución aproximada al problema de valor inicial $y' = x + y + 1$ sujeto a $y(0) = -1$



Solución

Se debe trazar una curva que pase por el punto $(0, -1)$ y cuyas pendientes sigan las del campo de direcciones:



1.7. Teoremas de existencia y unicidad (sin demostración).

1. **Problema** Considere la ecuación diferencial dada por $3\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{5}}$. De acuerdo con el Teorema de Existencia y Unicidad, determine una región del plano $X - Y$ donde tenga una solución única para las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$.

Solución

En este caso se reescribe la ecuación diferencial de acuerdo con el Teorema de Existencia y Unicidad, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}y^{\frac{2}{5}} \tag{1.12}$$

de donde, se tiene que

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^{\frac{2}{5}} \tag{1.13}$$

de donde,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{5}y^{-\frac{3}{5}} = \frac{6}{5y^{\frac{3}{5}}} \tag{1.14}$$

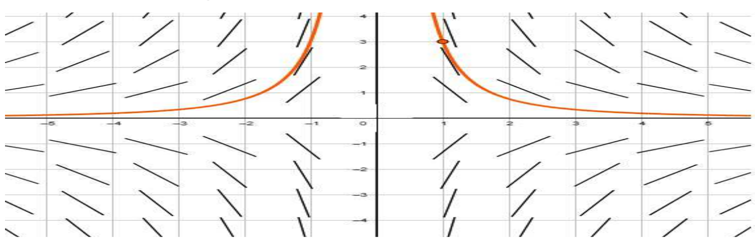
Se puede observar que la función $f(x,y)$ es continua en todo el plano $X-Y$ no así la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{5y^{\frac{3}{5}}}$ que deja de ser continua en $y = 0$. Por lo tanto se garantiza solución única (y por supuesto, va implícito que la ecuación diferencial con las condiciones iniciales tiene solución) para las regiones $y < 0$ o $y > 0$, es decir, para condiciones iniciales con $y_0 < 0$ y $y_0 > 0$.

1.8. Comportamiento cualitativo de soluciones.

1. **Problema** Explique cualitativamente (sin resolver) el comportamiento de las soluciones a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$.

   Solución

   Considere el campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial mostrado en la figura,

   Podemos ver que todas las soluciones a la ecuación diferencial tienden al eje x cuando x tiende a infinito (más o menos infinito). Ningúna solución puede cruzar el eje y. Sin embargo, hay una solución, el eje x, es decir $y(x) = 0$. Por lo que podemos ver, las solcuiones divergen en $x = 0$, excepto la solución $y = 0$.

Capítulo 2

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

2.1. Ecuaciones exactas.

1. **Problema** Encuentre la solución a la ecuación diferencial

$$(ye^{xy} - 2x)\,dx + xe^{xy}dy = 0 \tag{2.1}$$

Solución
En este caso se tiene,

$$M = ye^{xy} - 2x \tag{2.2}$$
$$N = xe^{xy} \tag{2.3}$$

de donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy} \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = xye^{xy} + e^{xy} \tag{2.5}$$

De acuerdo con esto, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ por lo que la ecuación diferencial es exacta. Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - 2x \tag{2.6}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

Integrando la segunda ecuación con respecto a y se tiene que

$$f(x, y) = e^{xy} + h(x), \tag{2.7}$$

donde $h(x)$ es una función a determinar. Derivando parcialmente a (2.7) con respecto a x, se tiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{dh(x)}{dx} \tag{2.8}$$

Comparando (2.8) con (2.6) se tiene,

$$\begin{aligned} ye^{xy} + \frac{dh(x)}{dx} &= ye^{xy} - 2x \\ \frac{dh(x)}{dx} &= -2x \end{aligned} \tag{2.9}$$

Integrando se tiene, $h(x) = -x^2$ de donde, $f(x, y) = e^{xy} - x^2$, de donde la solución a la ecuación diferencial (2.1) es,

$$e^{xy} - x^2 = c \tag{2.10}$$

siendo c la constante de integración.

2. **Problema** Compruebe que la siguiente ecuación diferencial es exacta y halle su solución.

$$(x^2 + 4y^2)dx + 8xydy = 0$$

Solución

Para comprobar que es exacta, comparamos con la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales de M respecto a y y de N respecto a x.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 8y$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

la ecuación diferencial es exacta.

Ahora encontramos una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 4y^2 \tag{2.11}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy \tag{2.12}$$

Para hallar $f(x, y)$ integramos la primer ecuación con respecto a x,

$$f(x, y) = \int (x^2 + 4y^2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 4xy^2 + h(y) \tag{2.13}$$

donde $h(y)$ es una función que depende únicamente de y.

Derivamos a (2.13) con respecto a y y la igualamos con (2.12), de donde,

$$8xy + \frac{dh(y)}{dx} = 8xy$$

de aqui se tiene,

$$\frac{dh(y)}{dx} = 0$$

por lo que $h(x, y) = k$, constante.

Entonces la solución a la ecuación diferencial es,

$$\frac{1}{3}x^3 + 4xy^2 = c,$$

con c la constante de integración.

2.2. Ecuaciones de variables separables.

1. **Problema** Resolver por variables separables la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}. \tag{2.14}$$

Solución

Sabemos que una ecuación diferencial es separable si es de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, que puede reescribirse como $dy = f(x)g(y)dx$. Separamos $\frac{dy}{g(y)} = \frac{1}{f(x)}dx$, e integramos $\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{1}{f(x)}dx + C$, donde C es una constante

Entonces, reescribiendo (2.14) como

$$(1 + y^2)dy = x^2 dx,$$

se tiene,

$$\int (1 + y^2)dy = \int x^2 dx + c$$

$$\int dy + \int y^2 dy = \int x^2 dx + c$$

$$y + \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + c$$

La solución se expresa de forma implícita.

2. **Problema** Una solución que no es ni implícita ni explícita.

   Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^{y^2} x \tag{2.15}$$

   Solución

   Es una ecuación separable, que se puede reescribir como

$$e^{-y^2} dy = x dx.$$

   Integrando de ambos lados, $\int e^{-y^2} dy = \int x dx + c$, de donde

$$\int e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}x^2 + c$$

   La integral de la izquierda no se puede integral por métodos anlíticos, sólo por métodos numéricos.

   Si multiplicamos por 2 tenemos $2\int e^{-y^2} dy = 2\frac{1}{2}x^2 + 2c$, entonces,

$$erf(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy = x^2 + k,$$

   donde $k = 2c$

   Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial es,

$$erf(x) = x^2 + k$$

3. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xe^{2x+3y}.$$

   Solución

   La ecuación diferencial puede ser reescrita como $\frac{dy}{dx} = xe^{2x}e^{3y}$ de donde la ecuación se puede separar como $e^{3y}dy = xe^{2x}dx$. Integrando de ambos lados, se tiene,

$$\int e^{3y} dy = \int xe^{2x} dx \tag{2.16}$$

La primer integral puede ser hecha por cambio de variable y la segunda integral por partes se tiene,

$$\frac{1}{3}e^{3y} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \tag{2.17}$$

donde C es la constante de integración. Con un poco de álgebra

$$e^{3y} = \frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C$$

$$y = \frac{1}{3}ln\left(\frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C\right) \tag{2.18}$$

4. **Problema** Resuelvan por variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 6x}{y^2}$$

Solución

De

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 6x}{y^2},$$

tenemos

$$y^2 dy = (4x^3 + 6x)dx.$$

Integrando de ambos lados,

$$\int y^2 dy = \int (4x^3 + 6x)dx$$

se tiene

$$\frac{1}{3}y^3 = x^4 + 2x^2 + c,$$

despejamos y ya que la solución es explícita

$$y^3 = 3x^4 + 6x^2 + 3c$$

de aqui que si $3c = k$ entonces,

$$y = \left(3x^4 + 6x^2 + k\right)^{\frac{1}{3}}$$

es la solución general explícita.

2.3. Factores integrantes.

1. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$xy^2dx + (2x^2y - 3x)dy = 0. \tag{2.19}$$

solución

La ecuación no resulta ser separable y además

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \neq 4xy - 3 = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.20}$$

con $M(x,y) = xy^2$ y $N(x,y) = 2x^2y - 3x$, por lo que resulta no ser exacta. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} &= \frac{2xy - (4xy-3)}{2x^2y - 3x} \\ &= \frac{-2xy+3}{x(2xy-3)} = -\frac{2xy-3}{x(2xy-3)} = -\frac{1}{x} \end{aligned} \tag{2.21}$$

que resulta ser una expresión función únicamente de x, por lo que la ecuación diferencial acepta un factor integrante dado por,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-lnx} = e^{lnx^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x} \tag{2.22}$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.19) por $\mu(x) = \frac{1}{x}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(xy^2\right) + \frac{1}{x}\left(2x^2y - 3x\right) &= 0 \\ y^2dx + (2xy - 3) &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta última ecuación ya es exacta, como se puede comprobar, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$, donde $M(x,y) = y^2$ y $N(x,y) = 2xy - 3$. Se tiene entonces que existe una función f tal que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y^2 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2xy - 3 \tag{2.25}$$

Integrando la ecuación (2.24) con respecto a x se tiene que $f(x,y) = xy^2 + h(y)$, con $h(y)$ una función únicamente de la variable y y que hay que determinar. De esta función se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{dh(y)}{dy}$. Igualando con la ecuación (2.25) se tiene,

$$\begin{aligned} 2xy + \frac{dh(y)}{dy} &= 2xy - 3 \\ \frac{dh(y)}{dy} &= -3 \end{aligned}$$

Integrando esta última ecuación se obtiene que, $h(y) = -3y$, por lo tanto, $f(x, y) = xy^2 - 3y$. Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial (2.19) está dada por, $f(x, y) = c$ es decir, $xy^2 - 3y = c$ siendo c la constante de integración.

2. **Problema** Resuelvan por factor de integración la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Solución
De la ecuación diferencial se tiene que $p(x) = -3$, entonces

$$\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{3x}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ se tiene,

$$e^{-3x}\left(\frac{dy}{dx} - 3y\right) = 0,$$

de donde,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = 0.$$

Integrando de ambos lados se tiene,

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right)dx = \int 0dx + c,$$

de donde,

$$e^{-3x}y = c.$$

Despejando y, se tiene finalmente la solución

$$y = ce^{3x}.$$

2.4. Ecuaciones homogéneas.

1. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3x - 2y}.$$

Solución
Se puede observar que la ecuación diferencial es homogénea ya que se puede reescribir como,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(2 + \frac{y}{x}\right)}{x\left(3 - 2\frac{y}{x}\right)} = \frac{2 + \frac{y}{x}}{3 - 2\frac{y}{x}} \tag{2.26}$$

Considerando el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$ o $y = xu$ se tiene que $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Sustituyendo directamente en la ecuación diferencial o en (2.26) se obtiene,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u &= \frac{2+u}{3-2u} \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{2+u}{3-2u} - u \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{2+u-u(3-2u)}{3-2u} \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{2u^2-2u+2}{3-2u} \end{aligned} \tag{2.27}$$

La última ecuación ya es separable y se puede separar como,

$$\frac{3-2u}{2u^2-2u+2}du = \frac{dx}{x} \tag{2.28}$$

Integrando de ambos lados se tiene,

$$\int \frac{3-2u}{2u^2-2u+2}du = \int \frac{dx}{x} \tag{2.29}$$

La integral de la izquierda se puede hacer de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{3-2u}{2u^2-2u+2}du = -\frac{1}{2}\int \frac{2u-3}{u^2-u+1}du &= -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1-2}{u^2-u+1}du \\ -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}du &+ \frac{1}{2}\int \frac{2}{u^2-u+1}du \end{aligned} \tag{2.30}$$

La primera integral se puede realizar de manera directa, $\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}du = \frac{1}{2}ln\left(u^2-u+1\right)$
Para la segunda,

$$\int \frac{1}{u^2-u+1}du = \int \frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \tag{2.31}$$

Haciendo el cambio de variable, $v = u - \frac{1}{2}$ de donde $du = dv$ se tiene,

$$\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dv}{(v^2+\frac{3}{4}} \tag{2.32}$$

Por sustitución trigonométrica,$v = \sqrt{\frac{3}{4}}tan(\theta)$ de donde $dv = \sqrt{\frac{3}{4}}sec^2(\theta)$, por lo tanto,

$$\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}sec^2(\theta)d\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}}tan^2(\theta)+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \int \frac{sec^2(\theta)}{tan^2(\theta)+1}d\theta = \sqrt{\frac{4}{3}} \int \frac{sec^2(\theta)}{sec^2(\theta)}d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \int d\theta = \sqrt{\frac{4}{3}}\theta + c \tag{2.33}$$

Regresando a las variables originales,

$$\sqrt{\frac{4}{3}}\theta + c = \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}arctan(v) + c = \frac{4}{3}arctan\left(u-\frac{1}{2}\right) + c = \frac{4}{3}arctan\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\right) + c \tag{2.34}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2}{u^2-u+1}du = \frac{4}{3}arctan\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\right) + c$$

Entonces, la solución a la ecuación diferencial es,

$$-\frac{1}{2}ln\left(u^2-u+1\right) - \frac{4}{3}arctan\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\right) = ln(x) + c \tag{2.35}$$

2. **Problema** Resuelvan la EDO homogénea separándola

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^4+2y^4}{xy^3}.$$

Solución

Primero veremos si es homogénea

hacemos

$$f(x,y) = \frac{2x^4+2y^4}{xy^3}.$$

Hacemos la prueba de homogeneidad

$$f(tx,ty) = \frac{2\left(tx\right)^4+2\left(ty\right)^4}{\left(tx\right)\left(ty\right)^3}.$$

Por lo tanto,

$$f(tx,ty) = \frac{2t^4x^4+2t^4y^4}{t^4xy^3} = \frac{t^4\left(x^4+2y^4\right)}{t^4xy^3} = f(x,y),$$

de ahí que $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Pasamos al cambio de variable con $y=vx$ y como $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ sustituimos de lado izquierdo de la igualdad en la ecuación diferencial

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2x^4+2(vx)^4}{x(vx)^3}$

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2x^4+2v^4x^4}{x(xv)^3}$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{2x^4+2v^4x^4}{x(xv)^3}-v=\frac{x^4\left(2+2v^4\right)-v^4}{x^4v^3}=\frac{2+2v^4-v^4}{v^3}=\frac{v^4+2}{v^3}$

entonces $x\frac{dv}{dx}=\frac{v^4+2}{v^3}$ y es una ecuación separable, separamos y nos da $\frac{dx}{x}=\frac{v^3}{v^4+2}dv$

integramos y nos da $ln(x)=\frac{1}{4}\ln(v^4+2)+k$

expresamos a k como $ln(m)$

$\ln(x)=\frac{1}{4}\ln(v^4+2)+ln(m)$

aplicamos propiedades de logaritmos

$v^4+2=(mx)^4$

donde m es una constante

sustituimos $v=\frac{y}{x}$

$\left(\frac{y}{x}\right)^4+2=(mx)^4$

o bien $y^4+2x^4=m^4x^8$

despejamos y tenemos finalmente como solución a

$$y=\left(mx^8-2x^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

donde m es una constante.

2.5. Ecuaciones lineales.

1. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=x+ytan(x) \tag{2.36}$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0)=2$

Solución

La ecuación

$$\frac{dy}{dx}=x+ytan(x)$$

puede ser reescrita como,

$$\frac{dy}{dx}-ytan(x)=x$$

la cual es lineal. En este caso, el factor integrante correspondiente es,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int tan(x)dx} = e^{ln(sen(x))dx} = cos(x) \tag{2.37}$$

de donde,

$$cos(x)\frac{dy}{dx} - ycos(x)tan(x) = xcos(x) \tag{2.38}$$

que puede ser reescrita como,

$$\frac{d}{dx}\left(ycos(x)\right) = xcos(x) \tag{2.39}$$

Integrando de amabos lados,

$$\int \frac{d}{dx}\left(ycos(x)\right) dx = \int xcos(x)dx \tag{2.40}$$

de donde,

$$ycos(x) = xsen(x) + cos(x) + c \tag{2.41}$$

de donde finalmente se tiene como solución a

$$y = x\frac{sen(x)}{cos(x)} + 1 + \frac{c}{cos(x)} = xtan(x) + 1 + csec(x) \tag{2.42}$$

Tenemos de la condición inicial que $x = 0$, $y = 2$, entonces,

$$2 = (0)tan(0) + 1 + csec(0) = 1 + c \tag{2.43}$$

de donde $c = 1$. Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial (2.36) sujeta a las condiciones iniciales dadas es,

$$y = xtan(x) + sec(x) + 1$$

2. **Problema** Resuelvan por factor de integración

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 3.$$

Solución

Reescribimos la ecuación como:

$\frac{dy}{dx} - 3x = 3$ entonces $p(x) = -3$ y el factor de integración es,

$\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}x = 3e^{-3x}$

$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = 3e^{-3x}$ integramos y obtenemos

$e^{-3x}y = \int 3e^{-3x} + c$

$e^{-3x}y = -e^{-3x} + c$ despejamos y

$y = -1 + ce^{3x} = ce^{3x} - 1$ es la solución general

2.6. Ecuaciones de Bernoulli.

1. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xy^4 \tag{2.44}$$

Solución

Reescribiendo la ecuación (2.44) como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{x}{2}y^4 \tag{2.45}$$

se puede ver que se trata de una ecuación diferencial no lineal de tipo Bernoulli. Haciendo el cambio de variable,

$$u = y^{1-4} = y^{-3} \tag{2.46}$$

se tiene que, $\frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$. Multiplicado la ecuación (2.44) por $-3y^{-4}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
-3y^{-4}\frac{dy}{dx} + 3y^{-4}\frac{y}{2x} &= -3y^{-4}\frac{xy^4}{2} \\
-3y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x}y^{-3} &= -\frac{3}{2}x \\
\frac{du}{dx} + \frac{3}{2x}u &= -\frac{3}{2}x \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

la última ecuación ya es lineal. El factor integrante a sociado a esta ecuación es

$$\mu(x) = e^{\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}} = e^{\frac{3}{2}ln(x)} = x^{\frac{3}{2}} \tag{2.48}$$

Multiplicado (2.47) por (2.48) se tiene,

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dx} + x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2x}u = -x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}x \tag{2.49}$$

que puede ser reescrita como,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}u\right) = -\frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}} \tag{2.50}$$

Integrando de ambos lados se tiene,

$$\left(x^{\frac{3}{2}}u\right) = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{2}} \tag{2.51}$$

de donde

$$u = -\frac{3}{7}x^2 + cx^{-\frac{3}{2}} \tag{2.52}$$

Pero $u = y^{-3}$, entonces, la solución final es,

$$y^{-3} = -\frac{3}{7}x^2 + cx^{-\frac{3}{2}} \tag{2.53}$$

2. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' - y = y^2 \tag{2.54}$$

Solución

Paso 1: Dividimos por y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = 1 \tag{2.55}$$

Paso 2: Realizamos el cambio de variable $v = \frac{1}{y}$ y $v' = -\frac{y'}{y^2}$: Sustituyendo en la ecuación original:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = 1 \tag{2.56}$$

Lo cual se convierte en:

$$-v' - v = 1 \tag{2.57}$$

Paso 3: Simplificamos y resolvemos la ecuación diferencial lineal en v:

$$v' + v = -1 \tag{2.58}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Usamos el factor integrante: **Paso 4:** Encontramos el factor integrante $e^{\int 1dx} = e^x$: Multiplicamos toda la ecuación por el factor integrante:

$$e^x v' + e^x v = -e^x \tag{2.59}$$

Paso 5: Reconocemos que el lado izquierdo es la derivada de ve^x:

$$\frac{d}{dx}(ve^x) = -e^x \tag{2.60}$$

Paso 6: Integramos ambos lados:

$$ve^x = -\int e^x dx \tag{2.61}$$

$$ve^x = -e^x + C \tag{2.62}$$

Paso 7: Despejamos v:

$$v = -1 + Ce^{-x} \tag{2.63}$$

Recordando que $v = \frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = -1 + Ce^{-x} \tag{2.64}$$

Paso 8: Invertimos para encontrar y:

$$y = \frac{1}{-1 + Ce^{-x}} \tag{2.65}$$

3. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$xy' + y = y^3 \tag{2.66}$$

Solución

Paso 1: Dividimos por y^3:

$$\frac{xy'}{y^3} + \frac{y}{y^3} = 1 \tag{2.67}$$

lo cual se simplifica a:

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = 1 \tag{2.68}$$

Paso 2: Realizamos el cambio de variable $v = \frac{1}{y^2}$ y $v' = -\frac{2y'}{y^3}$: Sustituyendo en la ecuación original:

$$x\left(-\frac{v'}{2}\right) + v = 1 \tag{2.69}$$

lo cual se simplifica a:

$$-x\frac{v'}{2} + v = 1 \tag{2.70}$$

Paso 3: Multiplicamos por -2:

$$-xv' + 2v = -2 \tag{2.71}$$

Reorganizando:

$$xv' - 2v = 2 \tag{2.72}$$

Paso 4: Reconocemos que esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden y usamos el factor integrante $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}$: Multiplicamos toda la ecuación por el factor integrante x^{-2}:

$$x^{-2}xv' - 2x^{-2}v = 2x^{-2} \tag{2.73}$$

lo cual se simplifica a:

$$\frac{v'}{x} - \frac{2v}{x^2} = \frac{2}{x^2} \tag{2.74}$$

Paso 5: Reconocemos que el lado izquierdo es la derivada de $\frac{v}{x^2}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} \tag{2.75}$$

Paso 6: Integramos ambos lados:

$$\frac{v}{x^2} = \int \frac{2}{x^2}dx \tag{2.76}$$

lo cual da:

$$\frac{v}{x^2} = -\frac{2}{x} + C \tag{2.77}$$

Paso 7: Despejamos v:

$$v = -2x + Cx^2 \tag{2.78}$$

Recordando que $v = \frac{1}{y^2}$:

$$\frac{1}{y^2} = -2x + Cx^2 \tag{2.79}$$

Paso 8: Invertimos para encontrar y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{-2x + Cx^2}} \tag{2.80}$$

Capítulo 3

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.1. Problemas geométricos.

1. **Problema** La pendiente de una curva en cualquiera de sus puntos (x, y) vale $\sqrt{2x+y}$. Encuentre la ecuación de dicha curva

   Solución

   Sabemos que si $y = f(x)$ es la función cuya gráfica es la curva que se busca, entonces la pendiente en cada punto de la curva está dada por $\frac{dy}{dx}$, de donde para hallar la función se tiene que resolver la ecuación diferencial

   $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x+y} \tag{3.1}$$

   Para resolverla hacemos el cambio de variable, $u = 2x + y$ de donde $\frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ de donde se obtiene que, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (3.1) se tiene,

   $$\frac{du}{dx} - 2 = \sqrt{u}$$

   de donde se obtiene la ecuación diferencial

   $$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} + 2 \tag{3.2}$$

   que se trata de una ecuación diferecnial de tipo separable, por lo que

   $$\frac{du}{\sqrt{u}+2} = dx$$

Integrando de ambos lados se tiene, $2\left(\sqrt{u}+2\right)-4ln\left(\sqrt{u}+2\right)=x+c$.

Como sugerencia para realizar la integral, se puede hacer el cambio de variable $v=\sqrt{u}+2$ lo que nos lleva a la integral $\int\left(2-\frac{4}{v}\right)dv$.

Regresando a las variables originales, se tiene que $u=2x+y$ por lo que la solución a la ecuación diferencial (3.1) y por lo tanto la familia de curvas que tienen la pendiente $2x+y$ son

$$2\left(\sqrt{2x+y}+2\right)-4ln\left(\sqrt{2x+y}+2\right)=x+c \tag{3.3}$$

2. **Problema** Encuentra la curva cuya pendiente en cualquier punto (x,y) es proporcional a la abscisa x de ese punto.

   Solución

   Dado que la pendiente de la curva es proporcional a la abscisa x, podemos escribir:

   $$\frac{dy}{dx}=kx \tag{3.4}$$

   donde k es una constante de proporcionalidad. La ecuación puede resolverse por separación de variables,

   $$\frac{dy}{dx}=kx \implies dy=kx\,dx \tag{3.5}$$

   Integrando de ambos lados:

   $$\int dy=\int kx\,dx \tag{3.6}$$

   Esto da:

   $$y=\frac{kx^2}{2}+C \tag{3.7}$$

   donde C es la constante de integración.

   La solución de la ecuación diferencial es una familia de parábolas de la forma:

   $$y=\frac{kx^2}{2}+C \tag{3.8}$$

   donde k y C son constantes. Esto significa que cualquier curva cuya pendiente en cualquier punto (x,y) sea proporcional a la abscisa x es una parábola.

3.2. Familias de curvas.

1. **Problema** Hallar la familia de curvas con la propiedad de que el área del triángulo formado la tangente a la curva en cualquier punto de la misma (x_0,y_0), el segmento de recta que va del origen al punto de tangencia y

el segemento del origen al punto de intersección de la tangente con el eje OX es una constante.

Solución

Suponga que la ecuación de la curva buscada es $y = f(x)$. La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta tangente cruza al eje X en el punto $(x_1, 0)$, de donde,

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Despejando x_1 se tiene,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

El área del triágulo formado por el segmento Ox_1, la tangente a la curva en cualquier punto de la misma (x_0, y_0) y el segmento de recta que va del origen al punto de tangencia está dadao por,

$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) f(x_0)$$

donde A debe ser constante. Como x_0 es arbitrario y además considerando la ecuación de la curva como $y = f(x)$ se tiene que la ecuación diferencial de la curva buscada es,

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'}\right) y = A,$$

que puede ser reescrita como,

$$xy - \frac{y^2}{y'} y = c$$

donde $c = 2A$. De donde,

$$\begin{aligned} xyy' - y^2 &= cy' \\ y'(xy - c) &= y^2 \\ \frac{dy}{dx}(xy - c) &= y^2 \\ y^2 dx + (c - xy)\, dy &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si consideramos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\,(c - xy)\,dy}{\partial x} = -y,$$

se tiene como factor integrante a,

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{y^2} dy} = e^{\int \frac{-y-2y}{y^2} dy} = e^{-3\int \frac{1}{y} dy} = e^{-3ln(y)} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

Multiplicando (3.9) por $\mu(y)$ se tiene,

$$\frac{1}{y}dx + \frac{1}{y^3}\,(c - xy)\,dy = 0 \tag{3.10}$$

la cual ya es exacta. Entonces, existe una función $g(x, y)$ tal que,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{y^3}\,(c - xy) \tag{3.11}$$

Integrando la primer ecuaciń con respecto a x se tiene,

$$g(x, y) = \frac{x}{y} + h(y)$$

Derivando $g(x, y)$ con respecto a y e igualando a la ecuación (3.11) se tiene,

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{dh}{dy} = \frac{1}{y^3}\,(c - xy)$$

de donde,

$$\frac{dh}{dy} = \frac{c}{y^3}$$

Integrando con respecto a y se tiene,

$$h(y) = -\frac{c}{2y^2}.$$

Por lo tanto la familia de curvas que resuelve el problema está dada por,

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{2y^2} = k,$$

siendo k un parámetro y $c = 2A$.

3.3. Trayectorias isogonales y ortogonales.

1. **Problema** Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y(x+c) = 1$.

   Solución

   Dada una familia de curvas $y = f(x,c)$, existe otra familia $y = g(x,c)$ que corta a la familia f bajo un mismo ángulo γ. A la familia g se le llama la familia de trayectorias isogonales de f y $y = g(x,c) = 0$ es solución de la ecuación diferencial

   $$tan(\gamma) = \frac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)g'(x)} \tag{3.12}$$

   En nuestro caso se tiene que, $y(x+c) = 1$, de donde $y = \frac{1}{x+c}$, de donde derivando se tiene,

   $$y' = -\frac{1}{(x+c)^2}$$

   Pero, $x + c = \frac{1}{y}$ de donde

   $$y' = -y^2$$

   Sustituyendo en (3.12) se tiene, con $\gamma = 45°$,

   $$1 = \frac{-y^2 - y'}{1 - y^2 y'} \tag{3.13}$$

   con $tan(45°) = 1$ y donde se ha hecho $y' = g'(x)$, la cual es una ecuación direncial de primer orden separable. Separando las variables se tiene,

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{y^2 - 1}$$

   es dedir,

   $$\frac{y^2 - 1}{1 + y^2} dy = dx$$

   Integrando del lado izquierdo, se tiene

   $$\int \frac{y^2 - 1}{1 + y^2} dy = \int \left(1 - \frac{2}{y^2 + 1}\right) = y - 2arctan(y)$$

   de donde, la familia de curvas isogonal a 45° a la familia $y = \frac{1}{x+c}$ es,

   $$y - 2arctan(y) = x + c$$

3.4. Problemas de diluciones y mezclas.

1. **Problema** Una solución salina entra a una razón constante de 6 litros/minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 200 litros de agua pura. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale

del tanque a razón de 2 litros/minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0,5 kg/litro, determine la masa de sal en el tanque después de t minutos.

Solución

Si m representa la masa de sal, entonces la razón de cambio de la sal está representada por $\frac{dm}{dt}$ donde t representa al tiempo.

El modelo que describe al problema es,

$$\frac{dm}{dt} = entrada - salida$$

, por lo que

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}5\frac{kg}{L} \times 6\frac{L}{min} - \frac{m}{200+4t} \times 2\frac{L}{min} \tag{3.14}$$

Nótese que cada minuto se están acumulando 4 L de solución (entran 6 litros cada minuto y sólo salen 2 litros cada minuto) por lo que a los 200 L que habían inicialmente de solución se le suman 4 L cada minuto, de ahi que al volumen inicial, después de cierto tiempo t, se le sumen $4t$ L. Reduciendo, la ecuación diferencial que describe al problema es,

$$\frac{dm}{dt} = 3 - \frac{m}{100+2t} \tag{3.15}$$

es decir,

$$\frac{dm}{dt} + \frac{1}{100+2t}m = 3 \tag{3.16}$$

donde m es en kg y t es en minutos. L ecuación diferencial es lineal, en este caso el factor integrante es,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100+2t}dt} = e^{\frac{1}{2}ln(100+2t)} = (100+2t)^{\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

Multiplicando (3.16) por (3.17) se tiene

$$(100+2t)^{\frac{1}{2}}\frac{dm}{dt} + (100+2t)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{100+2t}m = 3\,(100+2t)^{\frac{1}{2}}$$

de donde,

$$\frac{d}{dt}\left((100+2t)^{\frac{1}{2}}\,m\right) = 3\,(100+2t)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

Integrando de ambos lados con respecto a t se tiene,

$$(100+2t)^{\frac{1}{2}}\,m = \frac{3}{2}\frac{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

de donde,

$$m = 100 + 2t + c\,(100+2t)^{-\frac{1}{2}}$$

Como condición inicial tenemos $m(0) = 0$ kg ya que tenemos agua pura, entonces

$$100 + 2(0) + c\,(100 + 2(0))^{-\frac{1}{2}} = 0$$
$$100 + c\,(100)^{-\frac{1}{2}} = 0$$
$$c = -100^{\frac{3}{2}}$$

Por lo que la masa dentro del tanque queda finalmentedado por,

$$m = 100 + 2t - 100^{\frac{3}{2}}\,(100 + 2t)^{-\frac{1}{2}}$$

2. **Problema** Una solución salina entra a un tanque a una tasa de $5\,\mathrm{L/min}$ con una concentración de $2\,\mathrm{g/L}$. El tanque inicialmente contiene $100\,\mathrm{L}$ de agua pura. La solución se mezcla instantáneamente y se drena del tanque a una tasa de $3\,\mathrm{L/min}$. Encuentra la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

   Solución

   Sea $Q(t)$ la cantidad de sal (en gramos) en el tanque en el tiempo t. La tasa de cambio de la cantidad de sal en el tanque es la diferencia entre la tasa de entrada de sal y la tasa de salida de sal. La tasa de entrada de sal es:

$$\begin{aligned}\text{Tasa de entrada} &= (\text{Tasa de flujo de entrada}) \times (\text{Concentración de entrada}) \\ &= 5\,\mathrm{L/min} \times 2\,\mathrm{g/L} = 10\,\mathrm{g/min}\end{aligned}$$

   La tasa de salida de sal es:

$$\begin{aligned}\text{Tasa de salida} &= (\text{Tasa de flujo de salida}) \times (\text{Concentración en el tanque}) \\ &= 3\,\mathrm{L/min} \times \frac{Q(t)}{100 + (5-3)t}\end{aligned}$$

   La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\frac{dQ}{dt} = 10 - \frac{3Q(t)}{100 + 2t}$$

   Para resolver esta ecuación diferencial, usaremos un factor integrante. Primero, reescribimos la ecuación diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100 + 2t}Q = 10$$

   El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{100+2t}\,dt} = e^{\frac{3}{2}\ln|100+2t|} = (100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}\frac{dQ}{dt}+\frac{3}{2}(100+2t)^{\frac{1}{2}}Q=10(100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left[(100+2t)^{\frac{3}{2}}Q\right]=10(100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

Integrando ambos lados respecto a t:

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}Q=\int 10(100+2t)^{\frac{3}{2}}\,dt$$

Usamos una sustitución $u=100+2t$, $\frac{du}{dt}=2$, $\frac{dt}{du}=\frac{1}{2}$:

$$\int 10u^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du=5\int u^{\frac{3}{2}}\,du$$

$$5\int u^{\frac{3}{2}}\,du=5\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}=2u^{\frac{5}{2}}+C$$

Sustituyendo de nuevo $u=100+2t$:

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}Q=2(100+2t)^{\frac{5}{2}}+C$$

Finalmente, resolvemos para Q:

$$Q(t)=2(100+2t)+C(100+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

Dado que inicialmente el tanque contiene agua pura (es decir, sin sal), tenemos:

$$Q(0)=0$$

$$0=2(100)+C(100)^{-\frac{3}{2}}$$

$$0=200+C(100)^{-\frac{3}{2}}$$

$$C=-200\times 100^{\frac{3}{2}}=-200\times 1000=-200000$$

Por lo tanto, la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t es:

$$Q(t)=2(100+2t)-200000(100+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

3.5. Decaimiento radiactivo.

1. **Problema** Inicialmente había 40 mg de una sustancia radiactiva. Después de 10 horas, la sustancia disminuyo un 20 %. Si suponemos que la rapidez de desintegración es, en cualquier tiempo, proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, halle la cantidad de sustancia que habrá después de 12 horas.

Solución

El modelo que describe a mi problema es en este caso, $\frac{dN}{dt} = kN$ donde N es la cantidad de sustancia radiactiva en el instante de tiempo t y k es una constante, que en este caso $k < 0$. La solución en este caso (por variables separablee es $N = N_0 e^{kt}$, donde $N(0) = N_0 = 40$ es la cantidad de sustancia al instante $t = 0$ (la inicial).

Entonces después de 10 horas se tiene $0{,}2N_0$ d ela cantidad inicial, por lo que,$0{,}2N_0 = N_0 e^{10k}$, donde las unidades de k son en horas a la menos uno. Entonces, despejando k se tiene, $k = \frac{ln 0{,}2}{10}$. Por lo que se tiene que,

$$N(t) = 40e^{\frac{ln 0{,}2}{10}t} \tag{3.19}$$

Por lo tanto después de 12 horas se tiene la cantidad de sustancia dada por,

$$N = 40e^{\frac{ln 0{,}2}{10}12} \approx 5{,}8mg \tag{3.20}$$

2. **Problema** Un material radiactivo tiene una cantidad inicial de 100 mg. Después de 5 años, la cantidad de material radiactivo se reduce a 60 mg. Encuentra la constante de decaimiento k y determina la cantidad de material radiactivo que queda después de 10 años.

   Solución

   El decaimiento radiactivo se modela con la ecuación diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \tag{3.21}$$

   donde $Q(t)$ es la cantidad de material en el tiempo t y k es la constante de proporcionalidad.

   La solución general de la ecuación diferencial es:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt} \tag{3.22}$$

   donde Q_0 es la cantidad inicial de material.

   Ahora, sabemos que $Q_0 = 100\,\text{mg}$ y que después de 5 años $Q(5) = 60\,\text{mg}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación:

$$60 = 100e^{-5k} \tag{3.23}$$

   Dividiendo ambos lados por 100:

$$0{,}6 = e^{-5k} \tag{3.24}$$

   Aplicando el logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln(0{,}6) = -5k \tag{3.25}$$

Despejando k:

$$k = -\frac{\ln(0{,}6)}{5} \tag{3.26}$$

Calculamos k:

$$k \approx 0{,}102 \tag{3.27}$$

Usando $Q_0 = 100\,\text{mg}$ y $k \approx 0{,}102$ para encontrar $Q(10)$:

$$Q(10) = 100e^{-0{,}102\cdot 10} \tag{3.28}$$

Calculando $Q(10)$:

$$Q(10) \approx 100e^{-1{,}02} \approx 100 \cdot 0{,}36 \approx 36\,\text{mg} \tag{3.29}$$

La constante de decaimiento es aproximadamente $k \approx 0{,}102$ y la cantidad de material radiactivo que queda después de 10 años es aproximadamente 36 mg.

3.6. Ecosistemas y poblaciones (sistemas ecológicos competencia por alimentos, productividad, red trófica).

1. Considere un campo con 100 árboles, cada uno de los cuales es susceptible de contraer cierta infección viral. Suponga que durante el curso de una epidemia la tasa de cambio con respecto al tiempo del número de árboles contagiados N, es proporcional al número de árboles contagiados por el número de árboles no contagiados, $100 - N$. Si en el tiempo $t = 0$ un solo árbol está contagiado, encuentre que el número de árboles contagiados al tiempo t.

   Si la constante de proporcionalidad k tiene un valor de 0,01 cuando t es medido en días, encuentre el tiempo para el cual estarán contagiados la mitad de los árboles.

   Solución

   De acuerdo con el texto, se tiene que $\frac{dN}{dt} = kN(100 - N)$ donde k es la constante de proporcionalidad. Se tiene como condición inicial que $N(0) = 1$.Resolviendo por variables separables,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= kN(100 - N)dt \\ \frac{1}{N(100 - N)}dN &= kdt \end{aligned}$$

   Integrando de ambos lados. La parte izquierda se integra por fracciones parciales:

$$\frac{1}{N(100 - N)} = \frac{\frac{1}{100}}{N} + \frac{\frac{1}{100}}{100 - N} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{100 - N}\right) \tag{3.30}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{100}\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{100-N}\right)dN=\int kdt\\
&\frac{1}{100}\left(\ln|N|-\ln|100-N|\right)=kt+c_1\\
&\ln|N|-\ln|100-N|=100kt+c_2\\
&\ln\left(\frac{|N|}{|100-N|}\right)=100kt+c_2\\
&|\frac{N}{100-N}|=e^{100kt}e^{c_2}\\
&\frac{N}{100-N}=c_3e^{100kt}
\end{aligned}
$$

donde c_1 es la constante de integración, $c_2 = 100c_1$ y $c_3 = e^{c_2}$. Además se ha utilizado que $e^{ln|x|} = |x|$ y que c_3 considera los posibles signos del valor absoluto por lo que en las últimas líneas se ha omitido.

Considerando la condición inicial $N(0) = 1$ se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{100-1}&=c_3e^{100k(0)}\\
\frac{1}{99}&=c_3
\end{aligned}
$$

Por lo que se obtiene finalmente que,

$$\frac{N}{100-N}=\frac{1}{99}e^{100kt}$$

Despejando $N(t)$ se obtiene,

$$
\begin{aligned}
N&=\frac{100-N}{99}e^{100kt}\\
N&=\frac{100}{99}e^{100kt}-\frac{N}{99}e^{100kt}\\
N\frac{N}{99}e^{100kt}&=\frac{100}{99}e^{100kt}\\
N\left(1+\frac{1}{99}e^{100kt}\right)&=\frac{100}{99}e^{100kt}\\
N&=\frac{\frac{100}{99}e^{100kt}}{1+\frac{1}{99}e^{100kt}}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Dividiendo numerador y denominador por e^{100kt} se obtiene finalmente que el número de árboles contagiados es,

$$N=\frac{100}{1+99e^{-100kt}} \tag{3.32}$$

Si $k = 0{,}01$, entonces el tiempo T al cual la mitad de los 100 árboles estarán contagiados es,

$$50 = \frac{100}{1 + 99e^{-100(0{,}01)T}}$$

Despejando T se tiene que $T = -\ln\frac{1}{99} \approx 4{,}59511985$ es decir, en aproximadamente cinco días estarán contagiados la mitad de los árboles.

3.7. Procesos de 1er orden.

1. **Problema** Considere una reacción química de la forma $A \to B$ y que es una reacción de primer orden en el reactivo A. Escriba una ecuación diferencial que modele a A y encuentre A.

   Solución La ecuación diferencial de una reacción química de primer orden es:

   $$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

   Donde: $[A]$ representa la concentración del reactante en función del tiempo t.

   k es la llamada constante de velocidad de la reacción (en este caso $k > 0$.

   Para resolver esta ecuación diferencial, podemos separar las variables y luego integrar ambos lados de la ecuación, es decir,

   $$\frac{d[A]}{[A]} = -kdt$$

   $$\int \frac{d[A]}{[A]} = \int -kdt$$

   de donde,

   $$ln[A] = -kt + c$$

   que finalmente puede ser reescrita como,

   $$[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$$

   donde $[A]_0$ es la concentración inicial del reactante en $t = 0$.

   Esta ecuación muestra como evoluciona la concentración del reactivo A en función del tiempo en una reacción de primer orden.

3.8. Procesos de 2º orden.

1. **Problema** Considere la reacción química

$$H_{2(g)} + I_{2(g)} \rightarrow 2HI_{(g)}).$$

Se trata de una reacción química de 2° orden para el cambio de la concentración de $[H_2]$, que puede ser modela de acuerdo con,

$$\frac{d[H_2]}{dt} = -k[H_2][I_2] \tag{3.33}$$

Suponga que x representa la cantidad que ha reaccionado de H_2 y que

$$[H_2] = [H_2]_0 - x$$

e

$$[I_2] = [I_2]_0 - x,$$

donde $[H_2]_0$ e $[I_2]_0$ representan las cantidades al inicio, $t = 0$, de H_2 e I_2. De acuerdo con la ecuación (3.33) encuentre x en función de t.

Solución

La ecuación (3.33) puede ser reescrita como,

$$\frac{d\left([H_2]_0 - x\right)}{dt} = -k\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)$$

de donde,

$$\frac{dx}{dt} = k\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right) \tag{3.34}$$

Tenemos una ecuación diferencial de variables separables que puede reecribirse como,

$$\frac{dx}{\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)} = kdt.$$

Integrando de ambos lados, se tiene

$$\int \frac{dx}{\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)} = \int kdt. \tag{3.35}$$

Para realizar la integral del lado izquierdo recurrimos a las fracciones parciales, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)} &= \frac{A}{\left([H_2]_0 - x\right)} + \frac{B}{\left([I_2]_0 - x\right)} \\
&= \frac{A\left([I_2]_0 - x\right) + B\left([H_2]_0 - x\right)}{\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)} \\
&= \frac{A[I_2]_0 + B[H_2]_0 - x\left(A + B\right)}{\left([H_2]_0 - x\right)\left([I_2]_0 - x\right)}
\end{aligned}$$

De igualar los numeradores se tiene el sistema de ecuaciones,

$$A[I_2]_0 + B[H_2]_0 = 1$$

$$A + B = 0$$

que puede ser resuelto, de donde,

$$A = -\frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0}$$

y

$$B = \frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{([H_2]_0 - x)([I_2]_0 - x)} &= -\frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0}\int \frac{1}{[H_2]_0 - x} + \frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0}\int \frac{1}{[I_2]_0 - x} \\
&= \frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0} ln\left([H_2]_0 - x\right) - \frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0} ln\left([I_2]_0 - x\right) \\
&= \frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0} ln\frac{[H_2]_0 - x}{[I_2]_0 - x}
\end{aligned}$$

Por lo que la solución a la ecuación diferencial (3.34) resulta ser, de acuerdo con (3.35),

$$\frac{1}{[H_2]_0 - [I_2]_0} ln\frac{[H_2]_0 - x}{[I_2]_0 - x} = kt + c_1$$

siendo c_1 la constante de integración.

Despejando x se tiene finalmente,

$$x(t) = \frac{c[I_2]_0 - [H_2]_0 e^{-k([H_2]_0 - [I_2]_0)t}}{c - e^{-k([H_2]_0 - [I_2]_0)t}}$$

donde c es una constante (proviene de c_1).

Capítulo 4

ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

4.1. Reducción de orden.

1. **Problema** Halle una segunda solución a la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \tag{4.1}$$

sabiendo que una solución es $y_1 = 2x^3ln(x)$.

Solución

Para empezar comprobamos que $y_1 = 2x^3ln(x)$ es solución a la ecuación diferencial (4.1). Derivando dos veces se tiene,

$$\begin{aligned} y' &= 2x^3\frac{1}{x} + 6x^2ln(x) = 2x^2 + 6x^2ln(x) \\ y'' &= 4x + 6x^2\frac{1}{x} + 12xln(x) = 10x + 12xln(x) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.1) se tiene,

$$\begin{aligned} &x^2\left(10x + 12xln(x)\right) - 5x\left(2x^2 + 6x^2ln(x)\right) + 9\left(2x^3ln(x)\right) \\ &= 10x^3 + 12x^3ln(x) - 10x^3 - 30x^3ln(x) + 18x^3ln(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se propone como segunda solución a

$$y_2(x) = u(x)y_1(x).$$

Derivando dos veces a y_2 se tiene,

$$y_2' = uy_1' + u'y_1$$

y

$$y_2'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1.$$

Sustituyendo en (4.1) se tiene,

$$\begin{aligned}
x^2\left(uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1\right) - 5x\left(uy_1' + u'y_1\right) + 9\left(uy_1\right) &= 0 \\
x^2uy_1'' + 2x^2u'y_1' + x^2u''y_1 - 5xuy_1' - 5xu'y_1 + 9uy_1 &= 0 \\
u\left(x^2y_1'' - 5xy_1' + 9y_1\right) + x^2u''y_1 + u'\left(2x^2y_1' - 5xy_1\right) &= 0 \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Pero $x^2y_1'' - 5xy_1' + 9y_1 = 0$ ya que y_1 es solución de (4.1), según se mostró líneas arriba. Entonces, (4.3) se reduce a,

$$x^2u''y_1 + u'\left(2x^2y_1' - 5xy_1\right) = 0 \qquad (4.4)$$

Haciendo el cambio de variable, $v = u'$, de donde $v' = u''$, la ecuación (4.4) se reduce a,

$$\begin{aligned}
x^2v'y_1 + v\left(2x^2y_1' - 5xy_1\right) &= 0 \\
v' + v\left(\frac{2x^2y_1' - 5xy_1}{x^2y_1}\right) &= 0 \\
v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{5}{x}\right)v &= 0 \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Esta última es una ecuación diferencial separable que se puede reescribir como,

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{5}{x}\right)dx$$

Integrando de ambos lados se tiene,

$$\begin{aligned}
\int\frac{dv}{v} &= -\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{5}{x}\right)dx \\
\int\frac{dv}{v} &= -2\int\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)dx + 5\int\left(\frac{1}{x}\right)dx \\
ln(v) &= -2ln(y_1) + 5ln(x) \\
ln(v) &= ln(y_1^{-2}) + ln(x^5) \\
v = e^{ln(y_1^{-2})+ln(x^5)} = e^{ln(y_1^{-2})}e^{ln(x^5)} &= \frac{x^5}{y_1^2}.
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Pero $u' = v$ de donde

$$u' = \frac{x^5}{y_1^2}.$$

Además $y_1 = 2x^3ln(x)$, entonces,

$$u' = \frac{x^5}{y_1^2} = \frac{x^5}{4x^6ln^2(x)} = \frac{1}{4xln^2(x)} \qquad (4.7)$$

Integrando se obtiene,

$$u = \frac{1}{4}\int \frac{1}{xln(x)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4u} = -\frac{1}{4ln(x)} \tag{4.8}$$

donde se ha hecho $u = ln(x)$ de donde $du = \frac{dx}{x}$.

Por lo tanto, una segunda solución a la ecuación diferencial (4.1) es,

$$y_2 = u(x)y_1(x) = -\frac{1}{4ln(x)}2x^3ln(x) = -\frac{1}{2}x^3,$$

es decir,

$$y_2 = -\frac{1}{2}x^3,$$

2. **Problema** Considere la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' - y = 0. \tag{4.9}$$

Encuentre una segunda solución sabiendo que

$$y_1 = x$$

es solución.

Solución

Para encontrar la segunda solución, usamos el método de reducción de orden.

Suponemos que la segunda solución tiene la forma:

$$y_2 = v(x)y_1 = v(x)x,$$

donde $v(x)$ es una función a determinar. Derivando dos veces la función y_2,

$$y_2' = v'(x)x + v(x)$$

$$y_2'' = v''(x)x + 2v'(x)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial (4.9) se tiene,

$$x^2\left[v''(x)x + 2v'(x)\right] + x\left[v'(x)x + v(x)\right] - v(x)x = 0.$$

Desarrollando, obtenemos:

$$x^3v''(x) + 2x^2v'(x) + x^2v'(x) + xv(x) - xv(x) = 0$$

de donde,
$$x^3v''(x) + 3x^2v'(x) = 0$$
Dividiendo por x^2:
$$xv''(x) + 3v'(x) = 0. \tag{4.10}$$
Hacemos el cambio $u(x) = v'(x)$ de donde (4.10) queda como,
$$xu'(x) + 3u(x) = 0$$
la cual resulta ser una ecuación diferencial de primer orden en la función $u(x)$. La resolvemos usando separación de variables:
$$\frac{du}{u} = -\frac{3}{x}dx$$
Integrando ambos lados:
$$\ln|u| = -3\ln|x| = \ln|x|^{-3} = \ln\frac{1}{|x|^3}$$
de donde,
$$u(x) = v'(x) = \frac{1}{x^3}$$
Nótese que se ha omitido el valor absoluto y la constante de integración. Integrando nuevamente para encontrar $v(x)$:
$$v = \int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}$$
Por lo tanto, la segunda solución es:
$$y_2 = v(x)x = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)x$$
Es decir,
$$y_2 = -\frac{1}{2x}$$
Por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' - y = 0$ son:
$$y_1 = x$$
$$y_2 = -\frac{1}{2x}$$

de ahí que, la solución general es:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \left(-\frac{1}{2x} \right),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

4.2. Teoría general de las ecuaciones lineales.

1. **Problema** Muestre que la función $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

   Solución

   Derivando la función $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ dos veces se tiene

   $$y = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

   y

   $$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

   Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

   $$y'' - y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - y = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} = 0$$

   por lo tanto es solución.

4.3. Ecuaciones homogéneas.

1. **Problema** Muestre que la función $y = c_1 x^4 + c_2 x$ es solución a la ecuación diferencial homogénea $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$. Encuentre valores de c_1 y c_2 de acuerdo a las condiciones inciales $y(1) = 6$ y $y'(1) = 24$

   Solución

   Derivando dos veces la función $y = c_1 x^4 + c_2 x$ se tiene, $y' = 4c_1 x^3 + c_2$ y $y'' = 12c_1 x^2$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

   $$\begin{aligned} x^2 y'' - 4xy' + 4y &= x^2 \left(12c_1 x^2\right) - 4x \left(4c_1 x^3 + c_2\right) + 4 \left(c_1 x^4 + c_2 x\right) \\ &= 12c_1 x^4 - 16c_1 x^4 - 4c_2 x + 4c_1 x^4 + 4c_2 x = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.4. Dependencia lineal.

1. **Problema** Usando el Wronskiano del conjunto de funciones $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ muestre que son linealmente independientes.

$$W\left(e^{2x}, xe^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x} \tag{4.12}$$

Se observa que $W(e^{2x}, xe^{2x}) \neq 0$ por lo que podemos afirmar que el conjunto $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ es linealmente independiente.

2. **Problema** Calcule el Wronskiano de las funciones

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = xe^x, \quad f_3(x) = x^2e^x$$

y diga si son linealmente independientes y en que intervalo de números reales.

Solución

El Wronskiano de estas funciones se define como:

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

Calculando las derivadas de cada función se tiene,

$$f_1'(x) = e^x, \quad f_2'(x) = e^x + xe^x, \quad f_3'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

$$f_1''(x) = e^x, \quad f_2''(x) = 2e^x + xe^x, \quad f_3''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$$

Sustituyendo en el determinante del Wronskiano se tiene,

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (2x+x^2)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (2+4x+x^2)e^x \end{vmatrix}$$

Resta calcular el determinante. Usando propiedades de los determinantes podemos factorizar e^x de cada fila, de donde,

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = e^xe^xe^x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & 2x+x^2 \\ 1 & 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix}$$

de donde,

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & 2x+x^2 \\ 1 & 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix}$$

Ahora podemos calculamos el determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & 2x+x^2 \\ 1 & 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix}$$

usando cofactores. Expandiendo por la primera fila se tiene,

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1+x & 2x+x^2 \\ 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+x^2 \\ 1 & 2+4x+x^2 \end{vmatrix} + x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1+x \\ 1 & 2+x \end{vmatrix}$$

Calculando cada determinante de 2×2:
Primer determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2x+x^2 \\ 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix} = (1+x)(2+4x+x^2) - (2+x)(2x+x^2)$$

$$= 2 + 4x + x^2 + 2x + 4x^2 + x^3 - 2x - x^3 - 2x^2 - x^3$$

$$= 2 + 4x + 4x^2 - 2x^2$$

$$= 2 + 4x + 2x^2$$

Segundo determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x+x^2 \\ 1 & 2+4x+x^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2+4x+x^2) - 1 \cdot (2x+x^2)$$

$$= 2 + 4x + x^2 - 2x - x^2$$

$$= 2 + 2x$$

Finalmente, tercer determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x \\ 1 & 2+x \end{vmatrix} = 1 \cdot (2+x) - 1 \cdot (1+x)$$

$$= 2 + x - 1 - x$$

$$= 1$$

Sustituimos estos resultados en la expansión del determinante:

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = e^{3x} \left[1 \cdot (2 + 4x + 2x^2) - x \cdot (2 + 2x) + x^2 \cdot 1 \right]$$

$$= e^{3x} \left[2 + 4x + 2x^2 - 2x - 2x^2 + x^2 \right]$$

$$= e^{3x}\left[2 + 2x + x^2\right]$$

Por lo tanto, el Wronskiano es:

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = e^{3x}(2 + 2x + x^2)$$

So observa que el Wronskiano es diferente de cero para todo valor de x, por lo tanto las funciones f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes en todos los reales.

4.5. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.

1. **Problema** Encuentre la solución general a la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0 \tag{4.13}$$

Solución
Considere como solución a $y = e^{mx}$, de donde, $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$\begin{aligned} m^2e^{mx} - 2me^{mx} - 8e^{mx} &= 0 \\ \left(m^2 - 2m - 8\right)e^{mx} &= 0 \end{aligned}$$

Pero $e^{mx} \neq 0$ para todo x por lo que se debe tener que $\left(m^2 - 2m - 8\right) = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado se tiene, $m_1 = -2$ y que $m_2 = 4$ por lo que tenemos dos souciones, $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2(x) = e^{4x}$. La solución general a la ecuación diferencial es por lo tanto,

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{4x} \tag{4.14}$$

donde c_1 y c_2 son las constantes de integración.

2. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Considere como solución a $y = e^{rx}$, de donde, $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$\begin{aligned} r^2e^{rx} - 4re^{rx} + 4e^{rx} &= 0 \\ \left(r^2 - 2r - 8\right)e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

Pero $e^{rx} \neq 0$ para todo x por lo que la ecuación característica o auxiliar queda como,

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

Esto nos da una raíz doble:

$$r_1 = r_2 = 2$$

Dado que tenemos una raíz doble, las soluciones quedan como, $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

3. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Solución

Considere como solución a $y = e^{rx}$, de donde, $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2 e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$\begin{aligned} r^2 e^{rx} + 2re^{rx} + 5e^{rx} &= 0 \\ \left(r^2 + 2r + 5\right) e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

Pero $e^{rx} \neq 0$ para todo x por lo que la ecuación característica o auxiliar queda como,

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática usando la fórmula general:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$. Sustituimos estos valores:

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$r = -1 \pm 2i$$

Dado que tenemos raíces complejas $r = -1 + 2i$ y $r = -1 - 2i$, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = e^{-t}\left[C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)\right],$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

4.6. El problema no homogéneo.

1. **Problema** Encuentre la solución general a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx} - 8\frac{dy}{dx} + 20y = 8e^{-4x}csc(2x) \tag{4.15}$$

Solución

Paso 1: Resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada a (4.15):

$$\frac{d^2y}{dx} - 8\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \tag{4.16}$$

Se propone como solución a $y = e^{mx}$, de donde sustituyendo se tiene,

$$m^2 - 8m + 20 = 0$$

cuya solución resulta ser,$m = -4 + 2i$ y $m = -4 - 2i$ donde $i^2 = -1$. Por lo que la solución a la ecuación diferencial homogénea (4.16) resulta ser,

$$y_H = e^{-4x}\left(c_1 cos(2x) + c_2 sen(2x)\right) \tag{4.17}$$

Paso 2: Encontrar una solución particular a la ecuación diferencial no homogénea (4.15) Se propone como como solución particular a

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{4.18}$$

(variación de parámetros), donde $y_1 = e^{-4x}cos(2x)$ $y_2 = e^{-4x}sen(2x)$. Además se tiene que,

$$\begin{aligned}
u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-4x}sen(2x) \\ 8e^{-4x}csc(2x) & 2e^{-4x}cos(2x) - 4e^{-4x}sen(2x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-4x}cos(2x) & e^{-4x}sen(2x) \\ -2e^{-4x}sen(2x) - 4e^{-4x}cos(2x) & 2e^{-4x}cos(2x) - 4e^{-4x}sen(2x) \end{vmatrix}} \\
u_1' &= -\frac{8e^{-8x}csc(2x)sen(2x)}{2e^{-8x}cos^2(2x) - 4e^{-8x}cos(2x)sen(2x) + 2e^{-8x}sen^2(2x) + 4e^{-8x}cos(2x)sen(2x)} \\
u_1' &= -\frac{8e^{-8x}}{2e^{-8x}} \\
u_1' &= -4 \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

de donde integrando se tiene, $u_1(x) = -4x$

De forma análoga se obtiene u_2', para lo cual

$$\begin{aligned}
u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-4x}cos(2x) & 0 \\ -2e^{-4x}sen(2x) - 4e^{-4x}cos(2x) & 8e^{-4x}csc(2x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-4x}cos(2x) & e^{-4x}sen(2x) \\ -2e^{-4x}sen(2x) - 4e^{-4x}cos(2x) & 2e^{-4x}cos(2x) - 4e^{-4x}sen(2x) \end{vmatrix}} \\
u_2' &= -\frac{8e^{-8x}csc(2x)cos(2x)}{2e^{-8x}cos^2(2x) - 4e^{-8x}cos(2x)sen(2x) + 2e^{-8x}sen^2(2x) + 4e^{-8x}cos(2x)sen(2x)} \\
u_2' &= -\frac{8e^{-8x}cot(2x)}{2e^{-8x}} \\
u_2' &= 4cot(2x) \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

de donde integrando se tiene, $u_2(x) = 2ln|sen(2x)|$.

Por lo tanto de (4.18) se obtiene como solución particular a la ecuación diferencial (4.15),

$$y_p = \left(e^{-4x}cos(2x)\right)(-4x) + \left(e^{-4x}sen(2x)\right)(2ln|sen(2x)|) \tag{4.21}$$

es decir,

$$y_p = -4xe^{-4x}cos(2x) + 2e^{-4x}sen(2x)ln|sen(2x)|$$

La solución general a la ecuación diferencial (4.15) es entonces,

$$y(x) = y_H + y_p$$

es decir,

$$y(x) = e^{-4x}\left(c_1 cos(2x) + c_2 sen(2x)\right) - 4xe^{-4x}cos(2x) + 2e^{-4x}sen(2x)ln|sen(2x)|$$

2. **Problema** Encuentre la solución a la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Solución

Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$$

Esto nos da las raíces:

$$r_1 = 1 \quad \text{y} \quad r_2 = 2$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Para encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación no homogénea, usamos el método de coeficientes indeterminados. Dado que el término no homogéneo es e^x, proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Ae^x$$

Sustituimos $y_p(x)$ en la ecuación diferencial original:

$$(Ae^x)'' - 3(Ae^x)' + 2(Ae^x) = e^x$$

Calculamos las derivadas:

$$y_p'' = Ae^x, \quad y_p' = Ae^x$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación:

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = e^x$$

Simplificando:

$$(A - 3A + 2A)e^x = e^x$$

$$0 \cdot e^x = e^x$$

Esto indica que necesitamos modificar nuestra suposición para $y_p(x)$ porque e^x es una solución de la ecuación homogénea. Proponemos una nueva solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Axe^x$$

Nótese que se ha agregado un x a la solución particular. Sustituimos $y_p(x)$ en la ecuación diferencial original:

$$(Axe^x)'' - 3(Axe^x)' + 2(Axe^x) = e^x$$

Calculamos las derivadas:

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación:

$$(2Ae^x + Axe^x) - 3(Ae^x + Axe^x) + 2(Axe^x) = e^x$$

Simplificando:

$$2Ae^x + Axe^x - 3Ae^x - 3Axe^x + 2Axe^x = e^x$$

$$(2A - 3A)e^x + (A - 3A + 2A)xe^x = e^x$$

$$-Ae^x = e^x$$

Igualando los coeficientes:

$$-A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(x) = -xe^x$$

La solución general de la ecuación diferencial no homogénea es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

4.7. Vibraciones en sistemas mecánicos.

1. Una fuerza de 1000 newtons alarga 2 metros un resorte. Suponga que el resorte se encuentra suspendido verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa de 100 kilogramos a su extremo libre. Alcanzado el equilibrio, la masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento. Considere que la única fuerza involucrada es la de la gravedad.

   Solución

   Considere que el origen del sistema de referencia es en el punto de equilibrio, con el eje x dirigido hacia abajo.

   El valor de la constante del resorte, de acuerdo con la ley de Hooke ($F = kx$) resulta ser, $k = \frac{F}{x} = \frac{1000\,N}{2\,m} = 500\,N/m$.

   De la segunda Ley de Newton (en una dimensión) y la ley de Hooke,

$$F_x = mx'' = -kx\,.$$

   de donde,

$$mx'' + kx = 0$$

   Sustituyendo los valores de m y k se tiene,

$$100\frac{d^2x}{dt^2} + 500x = 0,$$

   es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0 \tag{4.22}$$

   con condiciones iniciales, $x(0) = 0$ y $\frac{dx(0)}{dt} = 10\,m/s$.

Se propone como solución a $x(t) = e^{rt}$ de donde $\frac{dx(t)}{dt} = re^{rt}$ y $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = r^2e^{rt}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (4.22) se tiene,

$$r^2 + 5 = 0$$

de donde $r_1 = i\sqrt{5}$ y $r_2 = -i\sqrt{5}$. La solución es por lo tanto,

$$x(t) = c_1cos(\sqrt{5}t) + c_2sen(\sqrt{5}t)$$

De las condiciones iniciales, $c_1 = 0$ y $c_2 = 2\sqrt{5}$, por lo que la solución a (4.22) con las condiciones inciales es,

$$x(t) = 2\sqrt{5}sen(\sqrt{5}t)$$

4.8. Ley de Newton y movimiento planetario.

1. **Problema** Encuentre la posición en el tiempo de un objeto de masa 5 Kg que cae bajo la acción de la gravedad. Suponga que inicia su caída desde una altura de 180 m partiendo del reposo.

   Solución

   Consideramos el eje x positivo de nuestro sistema de referencia hacia abajo y el origen en el punto donde inicia la caída. Por lo tanto $x(0) = 0$. Además parte del reposo, por lo que $x'(0) = 0$. Estas son mis condiciones iniciales.

   De acuerdo con la segunda ley de Newton

   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = Fuerza,$$

   en nuestro caso $Fuerza = mg = 5g$ donde $g \approx 10\ m/s^2$, es la aceleración de la gravedad (dirigida hacia abajo, es decir hacia el eje x positivo). Por lo tanto, la ecuación diferencial que model ala caída del obejeto resulta ser,

   $$5\frac{d^2x}{dt^2} = 50$$

   Es decir,

   $$5\frac{d^2x}{dt^2} - 50 = 0$$

   de donde,

   $$\frac{d^2x}{dt^2} - 10 = 0.$$

   Resolviendo la ecuación difereccial que queda se tiene,

   $$x(t) = 5t^2 + c_1t + c_2$$

   Las condiciones iniciales son $x(o) = 0$ y $x'(0) = 0$ por lo que la solución queda como

   $$x(t) = 5t^2$$

   posición medida desde donde inicia la caída el objeto.

4.9. Circuitos eléctricos.

1. **Problema** Encuentre la carga eléctrica $Q(t)$ instantánea en el condensador de un circuito RLC descrito por la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Considere que $R = 10$ ohm, $L = 1H$ y $C = \frac{1}{24}F$. Considere una fuete de voltaje variable dado por $E(t) = cos(t)$,

Solución

Sustituyendo los valores dados en la ecuación diferencial del circuito se tiene,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 10\frac{dQ}{dt} + 24Q = cos(t) \tag{4.23}$$

La ecuación diferencial homogénea asociada resulta ser,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 10\frac{dQ}{dt} + 24Q = 0$$

Proponiendo una solución dada por, $Q(t) = e^{mt}$ y sustituyendo se tiene la ecuación auxilar,

$$m^2 + 10m + 24 = 0$$

cuya solución es $m_1 = -4$ y $m_2 = -6$, por lo que solución a la ecuación diferecnial homogénea resulta ser

$$Q_H(t) = c_1e^{-4t} + C_2e^{-6t} \tag{4.24}$$

Una solución particular de (4.23), por parámetros indeterminados, es de la forma,

$$Q_p(t) = Acos(t) + Bsen(t).$$

Derivando dos veces se tiene,

$$Q'(t) = -Asen(t) + Bcos(t)$$

y

$$Q''(t) = -Acos(t) - Bsen(t).$$

Sustituyendo en (4.23) se tiene,

$$-Acos(t) - Bsen(t) - 10Asen(t) + 10Bcos(t) + 24Acos(t) + 24Bsen(t) = cos(t)$$

de donde

$$(23A + 10B)cos(t) + (-10A + 23B)sen(t) = cos(t)$$

de donde

$$
\begin{aligned}
23A + 10B &= 1 \\
-10A + 23B &= 0
\end{aligned}
$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene, $A = \frac{23}{629}$ y $B = \frac{10}{629}$, de donde,

$$Q_p(t) = \frac{23}{629}cos(t) + \frac{10}{629}sen(t).$$

Por lo tanto la carga eléctrica instantánea del condensador resulta ser,

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_p(t) = c_1e^{-4t} + C_2e^{-6t} + \frac{23}{629}cos(t) + \frac{10}{629}sen(t)$$

4.10. Otras aplicaciones como Neurofisiología (procesos neurales, neurona formal continua, discriminación psicofísica, movimiento ocular).

1. **Problema** Un modelo simplificado que representa el comportamiento eléctrico de una neurona, en función de la resistencia, la capacitancia y la corriente externa está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2V}{dt^2} + R \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{C} \cdot V = I_{ext}$$

Donde: V es el potencial de membrana, R es la resistencia total de la membrana, C es la capacitancia de la membrana, e I_{ext} es la corriente externa aplicada.

Encuentre el potencial de membrana, $V(t)$, considerando $I_{ext} = 0$.

Solución

Se propone como solución a

$$V(t) = e^{mt}$$

de donde se tiene, derivando dos veces con respecto al tiempo que,

$$V'(t) = me^{mt}$$

y

$$V''(t) = m^2e^{mt}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$m^2e^{mt} + Rme^{mt} + \frac{1}{C}e^{mt} = 0,$$

de donde

$$\left(m^2 + Rm + \frac{1}{C}\right) e^{mt} = 0,$$

pero

$$e^{mt} \neq 0$$

para todo t, entonces se obtiene la ecuación característica,

$$m^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0.$$

Resolviendo se tienen los dos valores de m siguientes,

$$m_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4}{C}}}{2}$$

y

$$m_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4}{C}}}{2}.$$

De donde la solución a la ecuación diferencial resulta ser,

$$V(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

2. **Problema** Considere la ecuación diferencial que describe el movimiento ocular y cómo varía la posición angular del ojo en función de la velocidad angular, la aceleración angular, el amortiguamiento, la frecuencia natural y la señal de error de posición dada por,

$$\theta''(t) + 2\zeta\omega_n\theta'(t) + \omega_n^2\theta(t) = K_p E(t)$$

Donde: $\theta(t)$ es la posición angular del ojo, $\theta'(t)$ es la velocidad angular del ojo, $\theta''(t)$ es la aceleración angular del ojo, ζ es el factor de amortiguamiento, ω_n es la frecuencia natural no amortiguada, K_p es la ganancia del controlador ocular, y $E(t)$ es el error de posición.

Encuentre $\theta(t)$ de la ecuación diferencial que describe el movimiento ocular considerando $E(t) = 0$

Solución

Se propone como solución a

$$\theta(t) = e^{mt}$$

de donde se tiene, derivando dos veces con respecto al tiempo que,

$$\theta'(t) = me^{mt}$$

y

$$\theta''(t) = m^2 e^{mt}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$m^2 e^{mt} + 2\zeta\omega_n m e^{mt} + \omega_n^2 e^{mt} = 0,$$

de donde

$$\left(m^2 + 2\zeta\omega_n m + \omega_n^2\right) e^{mt} = 0,$$

pero

$$e^{mt} \neq 0$$

para todo t, entonces se obtiene la ecuación característica,

$$m^2 + 2\zeta\omega_n m + \omega_n^2 = 0.$$

Resolviendo se tienen los dos valores de m siguientes,

$$m_1 = \frac{-2\zeta\omega_n + \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

y

$$m_2 = \frac{-2\zeta\omega_n - \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right).$$

De donde la solución a la ecuación diferencial resulta ser,

$$\theta(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

4.11. Generalización a ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes.

1. **Problema** Considere la ecuación diferencial de tercer orden homogénea:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Solución

Para resolverla, primero buscaremos una solución de la forma $y = e^{mx}$, donde m es una constante. Entonces, sustituyendo en la ecuación diferecnial obtenemos la siguiente ecuación característica:

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

Esta ecuación cúbica se puede factorizar como $(m-1)^3 = 0$, entonces tiene una raíz triple en $m = 1$.

Por lo tanto, la solución general para la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

es decir,

$$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes de integración arbitrarias.

2. **Problema** Resuelva siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = e^x$$

Solución

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada,

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$$

Se propone como solución a $y = e^{rx}$, de donde al sustituir en la ecuación diferencial homogénea se obtiene

$$\left(r^4 - 3r^2 + 2\right) e^{rx} = 0,$$

pero como $e^{rx} \neq 0$, entonces se obtiene la ecuación característica,

$$r^4 - 3r^2 + 2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$(r^2 - 1)(r^2 - 2) = 0$$

nos da las raíces:

$$r^2 = 1 \implies r = \pm 1$$

y

$$r^2 = 2 \implies r = \pm\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es,

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x}$$

Para encontrar una solución particular utilizamos parámetros indeterminados. Dado que el término no homogéneo es e^x, proponemos una solución particular a

$$y_p(x) = Ae^x$$

Sustituyendo $y_p(x)$ en la ecuación diferencial original se tiene,

$$(Ae^x)^{(4)} - 3(Ae^x)'' + 2(Ae^x) = e^x$$

de donde

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = e^x$$

Simplificando se tiene

$$(A - 3A + 2A)e^x = e^x$$

es decir,

$$0 = e^x,$$

lo cual es una inconsistencia. La propuesta inicial para y_p no es adecuada ya que se anula y esto se debe a que e^x es parte de la solución a la ecuación diferencial homogénea.

Entonces se propone

$$y_p(x) = Axe^x$$

donde se ha adicionado una x.

Sustituyendo $y_p(x)$ en la ecuación diferencial original:

$$(Axe^x)^{(4)} - 3(Axe^x)'' + 2(Axe^x) = e^x$$

Calculando las derivadas, se tiene,

$$Axe^x + 4Ae^x - 3(Axe^x + 2Ae^x) + 2(Axe^x) = e^x$$

de donde,

$$-2Ae^x = e^x$$

es decir,

$$-2A = 1$$

de donde finalmente,

$$A = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}xe^x$$

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

de donde,

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{\sqrt{2}x} + C_4e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}xe^x$$

Capítulo 5

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

5.1. Introducción y nociones generales.

1. **Problema** Escriba el sistema lineal en forma matricial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + z + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y - z - 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + z + t^2 - t - 2 \end{aligned}$$

Paso 1. Escribir una matriz columna para las derivadas, una matriz rectangular para las funciones x,y,z y otras matrices columna para los términos de t

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \\ \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + y - z \\ x + y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Escribir una simbolización abreviada por cada matriz quedando de la forma $X' = AX + \vec{f}(t)$. Entonces:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

donde en este caso,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

5.2. Sistemas lineales.

1. **Problema** Compruebe que el vector

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t} \tag{5.4}$$

es una solución del sistema dado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases} \tag{5.5}$$

Solución

Paso 1. Se escribe la forma desarrollada del vector separando cada componente, tal que:

$$x = e^{-5t}$$

$$y = 2e^{-5t}$$

Paso 2. Se deriva cada función respecto a la variable $''t''$

$$\frac{dx}{dt} = -5e^{-5t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -10e^{-5t}$$

Paso 3. Reemplazamos estas derivadas y las funciones x, y en las igualdades del sistema, tal que:

$$-5e^{-5t} = 3(e^{-5t}) - 4(2e^{-5t})$$

$$-10e^{-5t} = 4(e^{-5t}) - 7(2e^{-5t})$$

Paso 4. Simplificamos y se verifican las igualdades

$$3e^{-5t} - 8e^{-5t} = -5e^{-5t}$$

$$-5e^{-5t} = -5e^{-5t}$$

$$4e^{-5t} - 14e^{-5t} = -10e^{-5t}$$

$$-e^{-5t} = -10e^{-5t}$$

5.3. Método de eliminación.

1. **Problema** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales por eliminación sistemática

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

Solución

Paso 1. Se obtiene la derivada de la segunda ecuación, quedando una tercera ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx}{dt},$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Paso 2. Se sustituyen los resultados para $'x'$ de las segunda y tercera ecuaciones en la primera ecuación resultando en ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes para $'y'$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dt} - y,$$

o bien

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Paso 3. Se escribe la ecuación polinomial característica asociada a esta, quedando

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Paso 4. La factorización de esta ecuación es un binomio al cuadrado, tal que

$$(r - 1)^2 = 0.$$

Paso 5. Puede verse que la única solución de esta ecuación es $r = 1$, por lo que la solución de y estará dada por

$$y = C_1e^t + C_2te^t.$$

Paso 6. Obtenemos la derivada de esta función, de manera que

$$y' = C_1e^t + C_2te^t + C_2e^t,$$

o bien

$$y' = C_1e^t + C_2e^t(t+1)$$

Paso 7. Puesto que, $\frac{dy}{dt} = x$ o $y' = x$, tenemos que

$$x = C_1e^t + C_2e^t(t+1)$$

2. **Problema** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

Solución

Derivando la primera ecuación respecto a t, se tiene,

$$x'' = 3x' + 4y'$$

Sustituyendo y' de la segunda ecuación en la derivada anterior, con $y' = -x + 2y$, entonces

$$x'' = 3x' + 4(-x + 2y)$$

de donde,

$$x'' = 3x' - 4x + 8y$$

Dado que $x' = 3x + 4y$, despejamos y,

$$y = \frac{x' - 3x}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenida se tiene,

$$x'' = 3x' - 4x + 8\left(\frac{x' - 3x}{4}\right)$$

de donde

$$x'' = 3x' - 4x + 2(x' - 3x)$$

de donde

$$x'' = 3x' - 4x + 2x' - 6x.$$

Finalmente,

$$x'' = 5x' - 10x$$

La ecuación diferencial que queda,

$$x'' - 5x' + 10x = 0$$

se puede resolver por los métodos ya vistos.

La ecuación característica asociada es:

$$r^2 - 5r + 10 = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 40}}{2}$$

de donde,

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

es decir,

$$r = \frac{5 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$x(t) = e^{5t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

Para encontrar $y(t)$, usamos

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(x'(t) - 3x(t)\right),$$

donde

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{5}{2}e^{5t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \\ &+ e^{5t/2}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{15}}{2}C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en $y(t)$ se tiene, después de simplificar que,

$$y(t) = e^{5t/2}\left(\left(-\frac{1}{8}C_1 + \frac{\sqrt{15}}{8}C_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \left(\frac{\sqrt{15}}{8}C_1 + \frac{1}{8}C_2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

5.4. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.

1. **Problema** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Solución

Considere el operador $D = \frac{d}{dt}$ en términos del cual se puede escribir el sistema de ecuaciones como,

$$Dx = 3x + 4y, \tag{5.7}$$

$$Dy = -2x + y. \tag{5.8}$$

de donde,

$$Dx - 3x - 4y = 0, \tag{5.9}$$

$$2x + Dy - y = 0. \tag{5.10}$$

que se puede reescribir como,

$$(D-3)\,x - 4y = 0, \tag{5.11}$$

$$2x + (D-1)\,y = 0. \tag{5.12}$$

Se puede trabajar como un sistema de dos ecuaciones algebráico, de donde,

$$\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ 2 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.13}$$

Resolviendo se tiene,

$$[(D-3)(D-1)+8]\,x = 0 \tag{5.14}$$

de donde, se tiene la ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes,

$$(D^2 - 4D + 11)x = 0$$

Proponiendo una solución de la forma $x = e^{mx}$ se tiene la ecuación característica o auxiliar

$$m^2 - 4m + 11 = 0$$

cuyas soluciones son, $m_1 = 2 + \sqrt{7}i$ y $m_2 = 2 - \sqrt{7}i$, por lo que la solución a la ecuación diferencial para la función $x(t)$ es,

$$x(t) = e^{2t}\left(c_1 cos(\sqrt{7}t) + c_2 sen(\sqrt{7}t)\right) \tag{5.15}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^{2t}\left(-c_1\sqrt{7}sen(\sqrt{7}t) + c_2\sqrt{7}cos(\sqrt{7}t)\right) \\ &+ 2e^{2t}\left(c_1 cos(\sqrt{7}t) + c_2 sen(\sqrt{7}t)\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Despejando y de la ecuación (5.6) se tiene,

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - 3x\right)$$

Sustituyendo (5.15) en la ecuación anterior se obtiene, finalmente, la función $y(t)$.

5.5. Método de matrices.

1. **Problema** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales usando valores y vectores propios.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 8y \\ \frac{dy}{dt} &= 10x + 2y \end{aligned} \tag{5.17}$$

Solución El sistema de ecuaciones puede ser reescrito en forma matricial como,

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La matriz asociada al sistema está dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Para obtener los valores propios, λ, correspondientes a la matriz A se resuelve,

$$det\,(A - \lambda I) = 0$$

donde I es la matriz identidad,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para nuestro caso
$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 10 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
de donde se obtiene la ecuación de valores propios $((4-\lambda)(2-\lambda) - 80 = 0$, es decir, $\lambda^2 - 6\lambda - 72 = 0$. Resolviendo se obtiene los valores propios,
$$\lambda_1 = -6$$
y
$$\lambda_2 = 12.$$
Los vectores propios correspondientes a cada valor propio se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineal homogéneo,
$$\begin{cases} (4-\lambda)a + 8b &= 0 \\ 10a + (2-\lambda)b &= 0 \end{cases}$$
Para $\lambda = -6$ se tiene,
$$\begin{cases} 10a + 8b &= 0 \\ 10a + 8b &= 0 \end{cases}$$
Resolviendo se tiene, $b = -\frac{5}{4}a$. Considerando arbitrariamente $a = 4$ se tiene que $b = -5$, por lo que un vector propio para $\lambda = -6$ es,
$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$
Por otro lado, para $\lambda = 12$ se tiene,
$$\begin{cases} -8a + 8b &= 0 \\ 10a - 10b &= 0 \end{cases}$$
que se puede reducir a,
$$\begin{cases} a - b &= 0 \\ a - b &= 0 \end{cases}$$
Resolviendo se obtiene,$a = b$. Proponiendo arbitrariamente $a = 1 = b$ se obtiene como vector propio para $\lambda = 12$ a
$$V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales (5.25) es,
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{12t} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-6t}$$
es decir,
$$x(t) = c_1 e^{12t} + 4c_2 e^{-6t}$$
y
$$y(t) = c_1 e^{12t} - 5c_2 e^{-6t}.$$

2. **Problema** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

usando la técnica de valores y vectores propios.

Solución

El sistema de ecuaciones diferenciales puede ser escrito en forma matricial como,

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar los valores propios, resolvemos el determinante de $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

donde I es la matriz identidad,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Entonces, calculando el determinante se tiene,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 5 \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda - 7 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - \lambda - 7 = 0,$$

usando la fórmula cuadrática para encontrar los valores propios:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Entonces los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$$

Ahora, para encontrar los vectores propios correspondientes tenemos:

Para $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ tenemos,

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1+\sqrt{29}}{2} & 1 \\ 5 & -1-\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineal homogéneo que queda, se tiene,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{29}\right)a \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Considerando $a = 2$ se tiene como vector propio de $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ a,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3+\sqrt{29}. \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Para $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$: se tiene,

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1-\sqrt{29}}{2} & 1 \\ 5 & -1-\frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{29}\right) & 1 \\ 5 & \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{29}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineal homogéneo que queda se tiene,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)a \end{pmatrix}$$

de donde asignando arbitrariamente $a = 2$, tenemos como vector propio de $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ a,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3-\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

Sustituimos los valores propios y vectores propios encontrados:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{29}}{2}t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{29}}{2}t}\mathbf{v}_2$$

Donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2.

5.6. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes.

1. **Problema** Encuentre la solución al sistema de cuaciones diferencial no homogéneo siguiente

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + e^{2t}$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 4y + \sin(t) \tag{5.21}$$

Solución

Para resolver este sistema, primero encontramos la solución a la ecuación diferencial homogénea asociada y luego una solución particular.

Solución homogénea:

El sistema homogéneo asociado es:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y \tag{5.22}$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 4y \tag{5.23}$$

La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz A al resolver la ecuación

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

donde det significa determinante de la matriz $A - \lambda I$ con I la matriz unitaria de 2×2,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 14 = 0$$

Los valores propios son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Esto produce dos raíces complejas conjugadas.

$$\lambda_1 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

y

$$\lambda_1 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Ahora calculamos los vectores propios. Estos se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones lineal homogéneo,

$$\begin{cases} (3-\lambda)a + 2b & = 0 \\ -a + (4-\lambda) & = 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

para cada valor de λ.

Para $\lambda_1 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$ se tiene

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) a + 2b & = 0 \\ -a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) b & = 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

Resolviendo el sistema, por los métodos habituales del álgebra, se tiene,

$$b = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}\right) a,$$

siendo en este caso a un parámetro libre, de donde la solución general al sistema de ecuaciones (5.25) es,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}. \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Considerando, arbitrariamente, el valor de $a = 4$, entonces un vector propio para $\lambda_1 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$ es,

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{7} i \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

Considerando ahora el valor propio $\lambda_2 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$ el sistema de ecuaciones homogéneo algebraíco (5.24) se rduce a,

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) a + 2b & = 0 \\ -a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) b & = 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

La solución es nuevamente con las técnicas del álgebra, resultando,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}. \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

siendo en este caso a un parámetro libre. Considerando, arbitrariamente, el valor de $a = 4$, entonces un vector propio para $\lambda_1 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ es,

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{7}i \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

Por lo tanto, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (5.23) se ve como,

$$\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2})t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + i\sqrt{7} \end{pmatrix} + c_2 e^{(\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2})t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - i\sqrt{7} \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Recordando que $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$, se tiene después de hacer hacer el álgebra ($i^2 = -1$),

$$x_H(t) = 4e^{\frac{7}{2}t}\left(Acos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + Bsen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

y

$$y_H(t) = e^{\frac{7}{2}t}\left[A\left(cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sqrt{7}sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) + B\left(sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \sqrt{7}cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)\right]$$

Solución particular

Para el término no homogéneo (e^{2t}) y ($sin(t)$), proponemos una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = Ae^{2t} + B\sin(t) + C\cos(t)$$

y

$$y_p(t) = De^{2t} + F\sin(t) + G\cos(t)$$

Derivando con respecto a t se tiene,

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = 2Ae^{2t} + B\cos(t) - C\,\mathrm{sen}(t)$$

y

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = 2De^{2t} + F\cos(t) - G\,\mathrm{sen}(t)$$

Sustituyendo en (5.21) se tiene,

$$2Ae^{2t}+B\cos(t)-C\,\mathrm{sen}(t)=3\left(Ae^{2t}+B\sin(t)+C\cos(t)\right)+2\left(De^{2t}+F\sin(t)+G\cos(t)\right)+e^{2t}$$

y

$$2De^{2t}+F\cos(t)-G\,\mathrm{sen}(t)=-\left(Ae^{2t}+B\sin(t)+C\cos(t)\right)+4\left(De^{2t}+F\sin(t)+G\cos(t)\right)+\mathrm{sen}(t)$$

Desarrollando e igualando término a término se tiene,

$$\begin{aligned}2A&=3A+2D+1\\ B&=3C+2G\\ -C&=3B+2F\\ 2D&=-A+4D\\ F&=-C+4G\\ -G&=-B+4F+1\end{aligned} \tag{5.32}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta, se tiene,

$$A=-\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{13}{109}$$

$$C=\frac{7}{109}$$

$$D=-\frac{1}{4}$$

$$F=-\frac{23}{109}$$

y

$$G=-\frac{4}{109}$$

Por lo que la solución particular a (5.21) resulta ser,

$$x_p(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{13}{109}\sin(t)+\frac{7}{109}\cos(t)$$

y

$$y_p(t)=-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{23}{109}\sin(t)-\frac{4}{109}\cos(t)$$

o escrito en forma matricial,

$$\tilde{X}(t)_p=\begin{pmatrix}x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{13}{109}\sin(t)+\frac{7}{109}\cos(t)\\ -\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{23}{109}\sin(t)-\frac{4}{109}\cos(t)\end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución general del sistema es la suma de la solución homogénea y la particular:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

5.7. Las ecuaciones de Volterra.

1. **Problema** Considere el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra para la dinámica de las poblaciones de dos especies: una especie presa y una especie depredadora. Las ecuaciones del modelo son:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \tag{5.33}$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y, \tag{5.34}$$

donde:

- x es la población de presas.
- y es la población de depredadores.
- α es la tasa de crecimiento de las presas.
- β es la tasa de depredación.
- δ es la tasa de crecimiento de los depredadores en función de las presas.
- γ es la tasa de mortalidad de los depredadores.

Encuentre los puntos de equilbrio.

Solución

Los puntos de equilibrio se obtienen al igualar ambas ecuaciones a cero:

$$\alpha x - \beta xy = 0,$$
$$\delta xy - \gamma y = 0.$$

Los puntos de equilibrio son:

1. $(x, y) = (0, 0)$ (extinción de ambas poblaciones)

2. $(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ (punto de equilibrio no trivial)

El modelo de Lotka-Volterra proporciona una representación teórica de la interacción entre depredadores y presas. Las oscilaciones en las poblaciones son características de este modelo, y el estudio de estos sistemas es fundamental en ecología y biología matemática.

5.8. Aplicaciones.

1. **Problema** Se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales para una red eléctrica como sigue

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + RI_1 + RI_2 = E(t)$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + RI_1 + RI_2 = E(t)$$

Resuelva el sistema para las condiciones$R = 5O$, $L_1 = 0{,}01H$, $L_2 = 0{,}0125H$, $E = 100V$, $I_1(0) = 0$ e $I_2(0) = 0$ Paso 1. Se sustituyen las inductancias, resistencias y voltajes, quedando

$$0{,}01\frac{dI_1}{dt} + 5I_1 + 5I_2 = 100$$

$$0{,}0125\frac{dI_2}{dt} + 5I_1 + 5I_2 = 100$$

Paso 2. Como es un problema de condiciones iniciales, utilizaremos transformada de Laplace haciendo las consideraciones $\mathcal{L}\{I_1\} = X$; $\mathcal{L}\{I_2\} = Y$; $\mathcal{L}\{\frac{dI_1}{dt}\} = sX - 0 = sX$; $\mathcal{L}\{\frac{dI_2}{dt}\} = sY - 0 = sY$.

Paso 3. Se sustituyen los cambios mencionados en las ecuaciones diferenciales del sistema

$$0{,}01sX + 5X + 5Y = 100$$

$$0{,}0125sY + 5X + 5Y = 100$$

Paso 4. Por comodidad operacional, se multiplicará la primera ecuación por 100 y la segunda por 800, obteniendo

$$sX + 500X + 500Y = 10,000$$

$$sY + 4,000X + 4,000Y = 80,000.$$

Paso 5. Reordenamos y factorizamos algunos términos

$$(s + 500)X + 500Y = 10,000$$

$$4,000X + (s + 4,000)Y = 80,000$$

Paso 6. Solucionamos el sistema con la regla de Cramer

Para X

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\begin{vmatrix} 10,000 & 500 \\ 80,000 & s+4,000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+500 & 500 \\ 4,000 & s+4,000 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{10,000s+40,000,000-40,000,000}{(s+500)(s+4,000)-2,000,000} \\
&= \frac{10,000s}{(s^2+4,500s+2,000,000-2,000,000} \\
&= \frac{10,000s}{s^2+4,500s} \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

Simplificando

$$X = \frac{10,000}{s+4500}$$

Su transformada inversa quedaría

$$x(t) = I_1 = 10,000e^{-4500t}$$

Para Y

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{\begin{vmatrix} s+500 & 10,000 \\ 4,000 & 80,000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+500 & 500 \\ 4,000 & s+4,000 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{80,000s+40,000,000-40,000,000}{(s+500)(s+4,000)-2,000,000} \qquad (5.36) \\
&= \frac{80,000s}{s^2+4,500s+2,000,000-2,000,000} \qquad (5.37) \\
&= \frac{80,000s}{s^2+4,500s} \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

Simplificando

$$Y = \frac{80,000}{s+4500}$$

Su transformada inversa quedaría

$$y(t) = I_2 = 80,000e^{-4500t}$$

Paso 7. Concluimos que las corrientes del circuito en cualquier instante están dadas por

$$I_1 = 10,000e^{-4500t}$$

$$I_2 = 80,000e^{-4500t}$$

Capítulo 6

SERIES, SOLUCIONES DE ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

6.1. Introducción.

1. **Problema** Considere la ecuación diferencial

$$(x^2-9)^2y''+(x-3)y'+3y=0 \tag{6.1}$$

Clasifique los puntos $x=3$ y $x=-3$ como puntos singular regular o irregular.

Solución

La ecuación diferencial se puede reescribir al dividir por el factor $(x^2-9)^2$ como

$$y''+\frac{(x-3)}{(x^2-9)^2}y'+\frac{3}{(x^2-9)^2}=0$$

de donde

$$y''+\frac{(x-3)}{(x-3)^2(x+3)^2}y'+\frac{3}{(x^2-9)^2}=0$$

la cual al simplificar se reduce a

$$y''+\frac{1}{(x-3)(x+3)^2}y'+\frac{3}{(x-3)^2(x+3)^2}=0$$

Comparando con la ecuación diferencial general,

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

$$P(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)^2}$$

y que

$$Q(x) = \frac{3}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

Considerendo primero el punto $x = 3$ se puede ver que,

$$(x-3)P(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$$

es una función analítica en $x = 3$. Por otro lado,

$$(x-3)^2 Q(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$$

también resulta analítica en $x = 3$. Por lo que, podemos concluir que el punto $x = 3$ es un punto singular regular.

Para el punto $x = -3$ se tiene que,

$$(x-(-3))P(x) = (x+3)P(x) = \frac{1}{(x-3)^2(x+3)}$$

es una función que tiene problemas en $x = -3$ por lo que no es analítica en ese valor. Por otro lado,

$$(x+3)^2 Q(x) = \frac{3}{(x-3)(x+3)^2}$$

resulta analítica en $x = -3$.

Se observa que, la primer función no es analítica en $x = -3$ mientras que la segunda si lo es. Como no se cumple para la primera, el punto $x = -3$ es un punto singular irregular.

6.2. Generalidades sobre las series de potencias.

1. **Problema** Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}.$$

Obtenga el intervalo de convergencia utilizando el criterio del cociente.

Solución

Tenemos que $a_n = \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ y que $a_{n+1} = \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{n3^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{x-5}{3}\right| \\
&= \left|\frac{x-5}{3}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{x-5}{3}\right| \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Para que la serie sea convergente se debe tener, $\left|\frac{x-5}{3}\right| < 1$, de donde resolviendo la desigualdad se tiene que el intervalo de convergencia es $2 < x < 8$.

2. **Problema** Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$$

Solución

Para encontrar el radio de convergencia, utilizamos el método de la razón.

Consideramos el término general de la serie:

$$a_n = \frac{2^n x^n}{n}$$

Calculamos la razón de dos términos consecutivos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n x^n}{n}}\right| = \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}\cdot n}{2^n x^n\cdot(n+1)}\right| = \left|\frac{2x\cdot n}{n+1}\right|$$

Es decir,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2x\cdot n}{n+1}\right|$$

Tomando el límite cuando $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x\cdot n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|2x\cdot\frac{n}{n+1}\right| = |2x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = |2x|\cdot 1 = |2x|$$

Para que la serie converja, debemos tener:

$$|2x| < 1$$

De aquí, obtenemos:

$$|x| < \frac{1}{2}$$

es decir, el intervalo de convergencia es $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

6.3. Puntos ordinarios. Solución en serie cerca de los puntos ordinarios.

1. **Problema** Utilice una solución en serie de la forma $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = 2y. \tag{6.3}$$

Solución

Derivando la suma en la forma habitual se tiene,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \tag{6.4}$$

Nótese que se ha omitido el término cero que se ha originado en la derivada, por lo que la suma comienza en $n = 1$ y no en $n = 0$ como originalmente. Sustituyendo en (6.3) se tiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

o bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0 \tag{6.5}$$

Se observa que ambas sumas contienen las mismas potencias en x pero los subíndices de las sumas no son los mismos, la primer suma empieza en $n = 1$ y la segunda en $n = 0$. Entonces para acoplarlas, hacemos en la primer suma el cambio de variable $m = n - 1$ de donde $n = m + 1$, por lo que la primer suma puede reescribirse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n.$$

Nótese que en la última suma se ha hecho el cambio de m por n. Entonces, de (6.5),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0.$$

Juntando ambas sumas, tenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)c_{n+1} - 2c_n\right)x^n = 0$$

Como la suma debe ser cero para todo valor de x, entonces se pide que

$$(n+1)c_{n+1} - 2c_n x^n = 0.$$

Despejando c_{n+1} se obtiene,

$$c_{n+1} = \frac{2}{n+1}c_n \tag{6.6}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, que es la llamada relación de recurrencia de la que se obtienen los coeficientes c_n. A partir de esta se tienen los siguientes coeficientes,

Para $n = 0$,

$$c_1 = \frac{2}{0+1}c_0 = 2c_0$$

Para $n = 1$,

$$c_2 = \frac{2}{1+1}c_1 = \frac{2}{2}2c_0 = \frac{2^2}{2!}c_0$$

Para $n = 2$,

$$c_3 = \frac{2}{2+1}c_2 = \frac{2}{3}\frac{2^2}{2!}c_0 = \frac{2^3}{3!}c_0$$

Para $n = 3$,

$$c_4 = \frac{2}{3+1}c_3 = \frac{2}{3+1}\frac{2^3}{3!}c_0 = \frac{2^4}{4!}c_0$$

Por lo que el término general está dado por

$$c_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}c_0 \tag{6.7}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Por lo tanto,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

$$y = c_0 + \frac{2}{1}c_0 x + \frac{2^2}{2!}c_0 x^2 + \frac{2^3}{3!}c_0 x^3 + \frac{2^4}{4!}c_0 x^4 + \ldots$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{2}{1}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \ldots\right)$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

Comparando con la función exponencial se tiene que,

$$y = c_0 e^{2x}$$

2. **Problema** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - xy' - y = 0,$$

proponiendo una solución en serie de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Solución

Supongamos una solución en forma de serie de potencias:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Calculamos las derivadas de $y(x)$:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

Observe que en las sumas de las derivadas se han omitido los términos que se anulan, así en la primer derivada se omite el término que corresponde a $n = 0$, mientras que en la segunda derivada se han omitido los términos $n = 0$ y $n = 1$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

de donde simplificado se obtiene,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

En la primera y tercer suma, las potencias de inicio de x son las mismas, x^0, pero no la segunda que inicia en x. Por lo tanto, para acoplar las tres sumas, extraemos los términos correspondientes a $n = 2$ y $n = 1$ en la primer y tercer suma respectivamente, por lo que se tiene,

$$a_2(2)(2-1) - a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para la primer suma hacemos $m = n - 2$, de donde $n = m + 2$, por lo que queda como,

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n$$

Observe que se ha hecho el cambio de m a n. Entonces se tiene,

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Juntando las sumas en una sola se tiene,

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n n - a_n\right) x^n = 0.$$

Igualamos los coeficientes a cero:

$$2a_2 - a_0 = 0 \implies a_2 = \frac{a_0}{2}$$

Para $n \geq 1$:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n - a_n = 0$$

de donde se obtiene la relación de recurrencia,

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} a_n$$

de donde finalmente se obtiene,

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} a_n$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Usamos la relación de recurrencia para encontrar los coeficientes a_n:

Para $n = 1$:

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1$$

Para $n = 2$:

$$a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} c_0$$

Para $n = 3$:

$$a_5 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3} c_1$$

La solución general será:

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4 \cdot 2}x^4 + \cdots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 3}x^5 + \cdots\right)$$

6.4. Puntos singulares regulares.

1. **Problema** Resuelva la Ecuación diferencial

$$xy'' + y = 0 \tag{6.8}$$

Solución

Usamos una serie de Frobenius para resolverla, es decir, una serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{6.9}$$

Derivando (6.9) se tiene,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \tag{6.10}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} \tag{6.11}$$

Sustituyendo en (6.8) se tiene,

$$\begin{aligned} x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} &= 0 \\ x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

De la última suma se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} = 0$$

que puede ser reescrita como,

$$r(r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} = 0 \tag{6.13}$$

Note que ambas sumas comienzan en x^0, por eso se ha extraido el término $n = 0$ de la primer suma. Por otro lado, la primer suma se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1+r)(m+1+r-1) c_{m+1} x^{m+1-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1+r)(n+r) c_{n+1} x^{n} \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde se ha hecho el cambio $m = n - 1$ de donde $n = m + 1$ y posteriormente se ha hecho el cambio $m = n$. Por lo tanto de (6.13) se tiene

$$r(r-1)c_0x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1+r)(n+r)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

$$r(r-1)c_0x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1+r)(n+r)c_{n+1} + c_n\right)x^n = 0 \quad (6.15)$$

Se tiene finalmente que,

$$r(r-1) = 0 \quad (6.16)$$

$$(n+1+r)(n+r)c_{n+1} + c_n = 0 \quad (6.17)$$

De la primera ecuación se tiene que $r = 0$ y $r = 1$, mientras que la segunda nos da la relación de recurrencia,

$$c_{n+1} = -\frac{1}{(n+r)(n+r+1)}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Por lo tanto tenemos dos soluciones de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$, una para cada r, y los c_n dados por la relación de recurrencia.

6.5. Ecuaciones de Euler, Legendre, Chebychev, Jacobi, Hermite, Bessel y Laguerre.

1. **Problema** Resuelva la ecuación de Laguerre

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (6.18)$$

con λ una constante, usando una solución en serie.

Solución

Usando el método de Frobenius (el punto $x = 0$ es un punto singuar regular), se propone una solución en serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r} \quad (6.19)$$

de donde se tiene que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(n+r)\,x^{n+r-1} \quad (6.20)$$

y

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \tag{6.21}$$

Sustituyendo en ec. (6.18) se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Para empatar las potencias de x, la suma anterior se reescribe como

$$c_0 r(r-1)x^{r-1} + c_0 r x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

En las dos primeras sumas hacemos el cambio de variable $m = n - 1$ y posteriormente $m \to n$, lo que reduce la expresión anterior a,

$$c_0 r^2 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+r)(n+r+1) x^{n+r}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+r+1) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

que puesta en una sóla suma se reescribe como,

$$c_0 r^2 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(c_{n+1} (n+r)(n+r+1) x^{n+r} +$$
$$+ c_{n+1} (n+r+1) x^{n+r} - c_n (n+r) x^{n+r} + \lambda c_n x^{n+r} \Big) = 0$$

y esto es para toda x, por lo que se tienen las siguientes ecuaciones,

$$c_0 r^2 = 0 \tag{6.22}$$

y

$$c_{n+1} (n+r)(n+r+1) x^{n+r} +$$
$$+ c_{n+1} (n+r+1) x^{n+r} - c_n (n+r) x^{n+r} + \lambda c_n x^{n+r} = 0 \tag{6.23}$$

Pedimos que $c_0 \neq 0$ de donde se obtiene que $r^2 = 0$ (la llamada ecuación índicial) cuya solución es $r = 0$, siendo de multiplicidad 2, y

$$c_{n+1} = \frac{n - \lambda}{(n+1)^2} c_n \tag{6.24}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Algúnos coeficientes son,

$$\begin{aligned}
c_0 &= c_0 \\
c_1 &= -\lambda c_0 \\
c_2 &= -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2!^2}c_0 \\
c_3 &= -\frac{\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)}{3!^2}c_0 \\
c_4 &= -\frac{\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)}{4!^2}c_0 \\
c_5 &= -\frac{\lambda(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)}{5!^2}c_0
\end{aligned}$$

de donde, una solución a la ecuación de Laguerre (6.18) está dada por,

$$y_1(x) = c_0\Bigg(1 - \lambda x - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2!^2}x^2 - \frac{\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)}{3!^2}x^3$$
$$-\frac{\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)}{4!^2}x^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)}{5!^2}x^5 - \ldots\Bigg)$$

Una segunda solución a la ecuación de Laguerre se puede obtener de ([])

$$y_2(x) = y_1 Ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{6.25}$$

la cual no será desarrollada por no ser útil a la presente tésis. Nóte que la función y_1 puede ser reescrita en forma simplificada como (otras expresiones son encontradas en los libros ([])),

$$y_1(x) = c_0\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n}(j-\lambda)}{n!^2}x^n\right) \tag{6.26}$$

pero además si λ resulta ser un entero no negativo la serie infinita termina y se obtienen funciones de tipo polinomio. Considerando $c_0 = 1$ y denotando los polinomios obtenidos por $L_\lambda(x)$, con $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, obtenemos los llamados polinomios de Laguerre, algunos de los cuales se muestran expícitamente a continuación.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
1!L_1(x) &= -x + 1 \\
2!L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\
3!L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\
4!L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \\
5!L_5(x) &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \\
6!L_6(x) &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Capítulo 7

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.1. Operador Transformada de Laplace.

1. **Problema** A partir de la definición encuentre la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ e^t & si \quad t > 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

Solución

De la definición de Transformada de Laplace tenemos,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{7.2}$$

Para este caso, entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^\infty e^{-st} e^t dt$$

Haciendo la primer integral por partes,

$$\int_0^1 e^{-st}tdt = -\left(\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} + 1\right) \tag{7.3}$$

Por otro lado,

$$\int_1^\infty e^{-st}e^t dt = \int_1^\infty e^{-t(s-1)}dt = -\frac{1}{s-1}e^{-t(s-1)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1} \tag{7.4}$$

para $s > 1$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} + 1\right) + \frac{1}{s-1}$$

con $s > 1$.

7.2. Teorema de existencia, linealidad y aplicación del operador.

1. **Problema**. Encuentre la Transformada de Laplace de la función $f(t) = 3cos(2t) - 2sen(3t)$.

   Solución

   Sabemos que $\mathcal{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$ y que $\mathcal{L}\{sen(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$. Además que $\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1\mathcal{L}\{(t)\} + c_2\mathcal{L}\{c_2 g(t)\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{3cos(2t) - 2sen(3t)\} && (7.5)\\ &= 3\mathcal{L}\{cos(2t)\} - 2\mathcal{L}\{sen(3t)\} && (7.6)\\ &= 3\frac{s}{s^2+2^2} - 2\frac{3}{s^2+3^2} && (7.7)\\ &= \frac{3s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+9} && (7.8) \end{aligned}$$

2. **Problema**. Encuentre la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{4t}cos(3t)$

   Solución

   Sabemos por el primer teorema de traslación que $\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = F(s-k)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{4t}cos(3t)\} &= \mathcal{L}\{cos(3t)\} \mid_{s\to s-4} && (7.9)\\ &= \frac{s}{s^2+3^2} \mid_{s\to s-4} && (7.10)\\ &= \frac{s-4}{(s-4)^2+9} && (7.11)\\ &= \frac{s-4}{s^2-8s+25} && (7.12) \end{aligned}$$

donde la línea vertical significa evaluación, es decir, s se sustituye por $s-4$ en la expresión.

3. **Problema**. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t) = e^{4t}u(t-2)$, donde $u(t)$ es la función escalón, en este caso, definida por

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & a \leq t < 0 \\ \\ 1 & t \geq a \end{cases} \tag{7.13}$$

Solución

Sabemos por el segundo teorema de traslación que $\mathcal{L}\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t)\}$. En nuestro problema se tiene que $g(t) = e^{4t}$. Entonces, para poder aplicar el teorema se debe tener $g(t-2) = e^{4(t-2)}$, por lo tanto hay que adaptar la función g al segundo teorema de traslación. Para ello,

$$e^{4t} = e^{4t+0} = e^{4t-8+8} = e^{4(t-2)+8} = e^{4(t-2)}e^{8} \tag{7.14}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{4t}u(t-2)\} = \mathcal{L}\{e^{8}e^{4(t-2)}u(t-2)\} \\ &= \mathcal{L}\{e^{8}e^{4(t-2)}u(t-2)\} = e^{8}e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{e^{-2s+8}}{s-4} \end{aligned} \tag{7.15}$$

7.3. Resolución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

1. **Problema** Escriba la transformada de Laplace de la función $y(t)$ que resulta de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - y = 4cos(t) \tag{7.16}$$

y condiones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Solución.

Aplicando Transformada de Laplace a la ecuación diferencial se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - y\} &= \mathcal{L}\{4cos(2t)\} \\ 2\mathcal{L}\{\frac{d^2y}{dt^2}\} - 3\mathcal{L}\{\frac{dy}{dt}\} - \mathcal{L}\{y\} &= 4\mathcal{L}\{cos(2t)\} \\ 2\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) - Y &= 4\frac{s}{s^2+4} \end{aligned} \tag{7.17}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se tiene,

$$\begin{aligned}
2\left(s^2Y(s) - s + 1\right) - 3\left(sY(s) - 1\right) - Y &= 4\frac{s}{s^2+4} \\
2s^2Y(s) - 2s + 2 - 3sY(s) + 3 - Y &= \frac{4s}{s^2+4} \\
\left(2s^2 - 3s - 1\right)Y(s) - 2s + 5 &= \frac{4s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

de donde despejando $Y(s)$ se tiene finalmente la transformada de Laplace de $y(t)$,

$$Y(s) = \frac{4s}{(2s^2-3s-1)(s^2+4)} + \frac{2s-5}{2s^2-3s-1} \tag{7.18}$$

2. **Problema** Resuelva, usando transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(t),$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Solución

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin(t)\}$$

Usamos las propiedades de la transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Dado que $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Factorizamos $Y(s)$:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s^2+1}$$

Resolvemos para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+3s+2)}$$

Descomponemos $Y(s)$ en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}$$

Usando fracciones parciales, el lado derecho se puede escribir como,

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados por $(s^2+1)(s+1)(s+2)$ se tiene,

$$1 = (As+B)(s+1)(s+2) + C(s^2+1)(s+2) + D(s^2+1)(s+1)$$

de donde desarrollando y agrupando se obtiene,

$$(A+C+D)s^3 + (3A+B+2C+D)s^2 + (2A+3B+C+D)s + 2B+2C+D = 1,$$

lo cual nos da el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} A+C+D &= 0 \\ 3A+B+2C+D &= 0 \\ 2A+3B+C+D &= 0 \\ 2B+2C+D &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos para A, B, C, D y se tiene, $A = -\frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{10}$, $C = \frac{1}{2}$ y $D = -\frac{1}{5}$. Finalmente, aplicamos la transformada inversa de Laplace para encontrar $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{3}{10}s + \frac{1}{10}}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{5}}{s+2}\right\}$$

de donde finalmente,

$$y(t) = -\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t}$$

7.4. Resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

1. **Problema** Considere el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 4y \\ \\ y' = -8x + y \end{array} \right. \tag{7.19}$$

con $x(0) = 1$ y $y(0) = 1$. Halle las funciones $x(t)$ e $y(t)$ que cumplan ambas ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace.

Solución

Aplicando la transformada de Laplace a ambas ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{5x\} - \mathcal{L}\{4y\} \\ \\ \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{-8x\} + \mathcal{L}\{y\} \end{cases} \tag{7.20}$$

de donde,

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 5X(s) - 4Y(s) \\ \\ sY(s) - y(0) = -8X(s) + Y(s) \end{cases} \tag{7.21}$$

Sustituyendo las condiciones inicales se tiene,

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 5X(s) - 4Y(s) \\ \\ sY(s) - 1 = -8X(s) + Y(s) \end{cases} \tag{7.22}$$

que puede ser reescrito finalmente como,

$$\begin{cases} (s-5)X(s) + 4Y(s) = 1 \\ \\ 8X(s) + (s-1)Y(s) = 1 \end{cases} \tag{7.23}$$

el cual resulta ser un sistema de dos ecuaciones lineales (algebraíco) con incognitas $X(s)$ e $Y(s)$.

Resolviendo, por ejemplo, por Cramer, se tiene

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 4 \\ 8 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{s-5}{(s-5)(s-1)-32} = \frac{s-5}{s^2-6s-27} \tag{7.24}$$

De forma análoga,

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 4 \\ 8 & s-1 \end{vmatrix}} = -\frac{s-13}{(s-5)(s-1)-32} = -\frac{s-13}{s^2-6s-27} \tag{7.25}$$

Antitransformado se tiene,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-5}{s^2-6s-27}\} \tag{7.26}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{s-13}{s^2-6s-27}\} \tag{7.27}$$

Aplicando fracciones parciales se tiene que

$$\frac{s-5}{s^2-6s-27} = \frac{s-5}{(s+3)(s-9)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{3}}{s-9} \tag{7.28}$$

$$\frac{s-13}{s^2-6s-27} = \frac{s-13}{(s+3)(s-9} = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} - \frac{\frac{1}{3}}{s-9} \tag{7.29}$$

de donde se tiene que,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-5}{s^2-6s-27}\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-9}\} = \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{9t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{s-13}{s^2-6s-27}\} = -\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-9}\} = -\frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{9t}$$

Por lo tanto la solución al sistema de ecuaciones (7.19) es:

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{9t}$$

$$y(t) = -\frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{9t}$$

2. **Problema** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 3y \end{cases}$$

Solución

Aplicamos la transformada de Laplace a ambas ecuaciones. Recordemos que la transformada de Laplace de una derivada es:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

y

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

donde $X(s)$ y $Y(s)$ son las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

Aplicando la transformada de Laplace al sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = 3X(s) + 4Y(s) \\ sY(s) - y_0 = -4X(s) + 3Y(s) \end{cases}$$

Reorganizando los términos para resolver para $X(s)$ y $Y(s)$:

$$\begin{cases} (s-3)X(s) - 4Y(s) = x_0 \\ 4X(s) + (s-3)Y(s) = y_0 \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales en $X(s)$ y $Y(s)$. Podemos resolverlo usando el método de eliminación o matrices. Usando matrices, tenemos:

$$\begin{pmatrix} s-3 & -4 \\ 4 & s-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema se obtiene multiplicando ambos lados por la inversa de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-3 & -4 \\ 4 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} s-3 & -4 \\ 4 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-3)^2+16} \begin{pmatrix} s-3 & 4 \\ -4 & s-3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-3)^2+16} \begin{pmatrix} s-3 & 4 \\ -4 & s-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da:

$$X(s) = \frac{(s-3)x_0 + 4y_0}{(s-3)^2+16}$$

$$Y(s) = \frac{-4x_0 + (s-3)y_0}{(s-3)^2+16}$$

Finalmente, aplicamos la transformada inversa de Laplace para encontrar $x(t)$ y $y(t)$:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)x_0 + 4y_0}{(s-3)^2+16}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4x_0 + (s-3)y_0}{(s-3)^2+16}\right\}$$

Usando la propiedad de la transformada inversa de Laplace y la tabla de transformadas, obtenemos:

$$x(t) = x_0 e^{3t} \cos(4t) + \frac{y_0}{4} e^{3t} \sin(4t)$$

$$y(t) = -x_0 e^{3t} \sin(4t) + y_0 e^{3t} \cos(4t)$$

Así, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales son:

$$x(t) = x_0 e^{3t} \cos(4t) + \frac{y_0}{4} e^{3t} \sin(4t)$$

$$y(t) = -x_0 e^{3t} \sin(4t) + y_0 e^{3t} \cos(4t)$$