Guía de estudio para el examen extraordinario de Métodos Numéricos

Índice

1 Los métodos numéricos, usos y desarrollo en paralelo con la tecnología de computadoras

1.1 Serie de Taylor.

Desarrolle la serie truncada de Taylor de tercer orden para $f(x) = \ln(x)$ con origen en $x_0 = 1$. Calcule el error relativo en $x_1 = 1.5$.

Solución:

$$s(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

$f(1.5) = 0.4054$

$s(1.5) = 0.4166$

Error = $\frac{|0.4054-0.4166|}{0.4054} = 0.0276$

2 Espacio vectorial de las funciones continuas, polinomios de interpolación y diferencias finitas

2.1 Interpolación. Obtenga el polinomio de interpolación de Lagrange para los siguientes datos:

x	1	4	8	13	18
$f(x)$	1.1	1.5	12.8	15.3	15.5

interpolar para $x = 3$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{(x-4)(x-8)(x-13)(x-18)}{(1-4)(1-8)(1-13)(1-18)}(1.1)+ \\ &\frac{(x-1)(x-8)(x-13)(x-18)}{(4-1)(4-8)(4-13)(4-18)}(1.5)+ \\ &\frac{(x-1)(x-4)(x-13)(x-18)}{(8-1)(8-4)(8-13)(8-18)}(12.8)+ \\ &\frac{(x-1)(x-4)(x-8)(x-18)}{(13-1)(13-4)(13-8)(13-18)}(15.3)+ \\ &\frac{(x-1)(x-4)(x-8)(x-13)}{(18-1)(18-4)(18-8)(18-13)}(15.5) \end{aligned}$$

$f(x) = 0.004043x^4 - 0.1587x^3 + 1.942x^2 - 6.589x + 5.901$

$f(3) = -0.3424369747899192$

2.2 Polinomios de Lagrange. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración, en la siguiente tabla se muestra el cambio de densidad en función de la temperatura cuando la concentración es de 20 %.

T(°C)	0	40	80	100
ρ(T)	1.1977	1.1801	1.1570	1.1451

Calcule el polinomio de Lagrange de grado 3 que aproxima a ρ(T) y con este calcule la densidad a una temperatura de 50°C.

Solución:

Se tiene que

$$L_0(x) = \frac{(40-x)(80-x)(100-x)}{320000}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-100)(x-80)(x)}{96000}$$

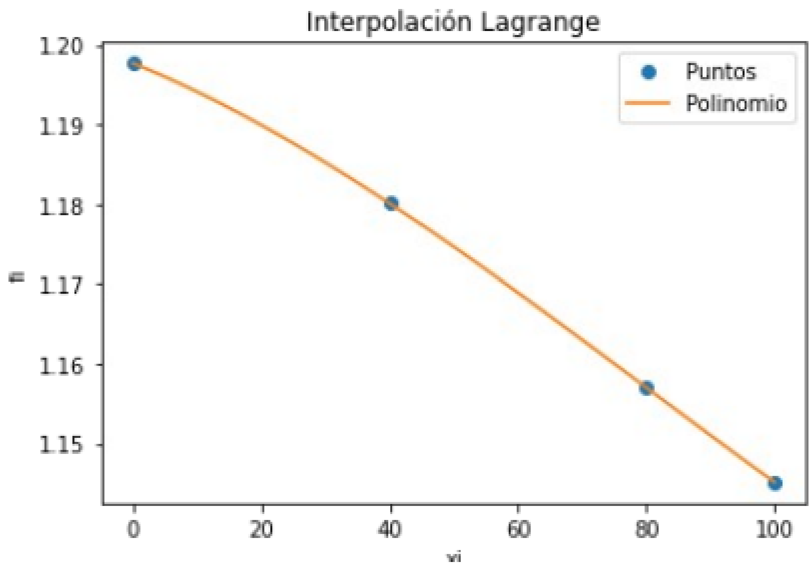
$$L_2(x) = \frac{(x-100)(x-40)x}{64000}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-40)(x-80)}{120000}$$

El polinomio de Lagrange es:

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$P_3(x) = 1.42708 \times 10^{-8}x^3 - 3.43125 \times 10^{-6}x^2 - 0.000325583x + 1.1977$$



2.3 Diferencias divididas. Los valores de una función se encuentran tabulados en la siguiente tabla

x_i	$f(x_i)$
25	20.14
75	24.95
150	31.89
200	36.44

con estos datos construya la tabla de diferencias divididas, utilice la tabla para realizar una aproximación polinomial de Newton (con un polinomio del grado más alto posible) y calcule $f(50)$.

Solución:
La tabla de diferencias divididas es

<table>
<tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>1^{er}orden</th><th>2^{do}orden</th><th>3^{er} orden</th><th>4°orden</th></tr>
<tr><td>25</td><td>20.14</td><td>9.62$\times 10^{-2}$</td><td rowspan="2">-2.9333333$\times 10^{-5}$</td><td rowspan="4">9.75238095$\times 10^{-8}$</td><td rowspan="4">0.0</td></tr>
<tr><td>75</td><td>24.95</td><td>9.253333$\times 10^{-2}$</td></tr>
<tr><td>150</td><td>31.89</td><td>9.10$\times 10^{-2}$</td><td rowspan="2">-1.22666667$\times 10^{-5}$</td></tr>
<tr><td>200</td><td>36.44</td><td>3.64400$\times 10$</td></tr>
</table>

con lo cual se obtiene el siguiente polinomio

$$p(x) = 0.0962x + 9.75238095238039 \times 10^{-8}(x-150.0)(x-75.0)(x-25.0)$$

$$-2.933333 \times 10^{-5}(x-75.0)(x-25.0) + 17.735.$$

Que simplificado es

$p(x) = 9.75238095 \times 10^{-8}x^3 - 5.3714285 \times 10^{-5}x^2 + 0.100779x + 17.6525714$

y $f(50) \approx p(50) = 22.5694$

3 Métodos de resolución de una ecuación algebraica no lineal de una variable

3.1 Ecuaciones no lineales Aplique el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de la función $f(x) = 2^{-x} - 0.1$ usando el valor inicial $x_0 = 3$. ¿Cuál es el valor de x_3 en la tercera iteración?

Solución:
Tomando como valor inicial $x_0 = 3$ y derivada $f'(x) = -2^{-x}\log(2)$, se obtienen las siguientes iteraciónes:

it	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	5.59685	0.120662	-0.0143221
1	14.0218	0.10006	-4.16724e-05
2	2415.14	0.1	0

$x_3 = 2415.14$

3.2 Ecuaciones no lineales. Métodos cerrados. Aplique el método de Bisección para encontrar la primera raíz positiva de la siguiente función:

$$f(x) = x\tan(x) + x$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = 2$ y $x_1 = 2.5$ calcular las tres primeras iteraciónes. **Solución:**
Obtenemos la siguiente tabla de iteraciónes:

it	x_0	x	x_1	$f(x_0)$	$f(x)$	$f(x_1)$
0	2	2.25	2.5	-2.37008	-0.536912	0.632444
1	2.25	2.375	2.5	-0.536912	0.0876875	0.632444
2	2.25	2.3125	2.375	-0.536912	-0.211461	0.0876875

3.3 Método de posición falsa Determinar una de las raíces reales de la función $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ ubicada en el intervalo $[-1, 2]$ utilizando el método de posición falsa. Realice tres iteraciónes del método.

Solución:

Evaluamos la función en algunos puntos para seleccionar x_I y x_D, vemos que:

$f(0) = -2$
$f(1) = 4$
$f(-1) = -18$
$f(2) = 30$

por lo que usamos $x_I = 0$ y $x_D = 1$. Empleando la ecuación

$$x_M = x_D - \frac{(x_D - x_I)f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)},$$

obtenemos las siguientes iteraciónes

iteración	x_I	x_D	x_M	$f(x_M)$
0	0.0	1.0	0.333333	-0.370370
1	0.333333	1.0	0.389831	-0.124648
2	0.389831	1.0	0.408270	-0.043541
3	0.408270	1.0	0.414642	-0.015346

3.4 Método de punto fijo. Calcule cuatro iteraciónes del método de punto fijo para resolver la ecuación $f(x) = e^{-3x} - 5x + 2$, utilice el valor inicial de $x_0 = -0.8$, indique cual es el grado de precisión de la solución en la cuarta iteración.

Solución:
Primero elegimos $g(x)$ como sigue:

$$g(x) = \frac{\exp(-3x) + 2}{5}$$

con lo que se obtiene:
iteración 0 $x_i =$ -0.8 $g(x_i) =$ 2.604635276128321 $f(x_i) =$ 17.023176380641605

iteración 1 $x_i =$ 2.604635276128321 $g(x_i) =$ 0.40008081534146706
$f(x_i) =$ -11.02277230393427

iteración 2 $x_i =$ 0.40008081534146706 $g(x_i) =$ 0.460224239484869
$f(x_i) =$ 0.30071712071700984

iteración 3 $x_i =$ 0.460224239484869 $g(x_i) =$ 0.4502818736875038
$f(x_i) =$ -0.049711828986826134

iteración 4 $x_i =$ 0.4502818736875038 $g(x_i) =$ 0.451804226856646

$f(x_i)$ = 0.007611765845710883

iteración 5 x_i = 0.451804226856646 $g(x_i)$ =0.4515681733154412
$f(x_i)$ = -0.0011802677060241962

3.5 Método de Wegstein. Aproxime una raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$ utilizando el método de Wegstein, calcule cuatro iteraciónes del método empleando un valor inicial de $x_0 = 0$, indique el grado de precisión alcanzado.

Solución. En el método de Wegestein las dos primeras iteraciónes son iguales que en el punto fijo, a partir de ahí usamos que

$$x_{i+1} = q_i g(x_i) + (1 - q_i) x_i$$

donde

$$\omega_i = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$q_i = \frac{1}{1 - \omega_i}$$

elegimos $g(x)$ como

$$g(x) = \exp(-x)$$

Las dos primeras iteraciónes son:

iteración 0 x_i = 0.0 $g(x_i)$ = 1.0 $f(x_i)$ =1.0

iteración: 1 x_i = 1.0 $g(x_i)$ = 0.36787944117144233
$f(x_i)$ = -0.6321205588285577

Después obtenemos:

iteración: 2 x_i = 0.6126998367802821 $g(x_i)$ = 0.5418858889071111
$f(x_i)$ = -0.07081394787317097

iteración: 3 x_i = 0.5638383891610742 $g(x_i)$ = 0.5690207436684126
$f(x_i)$ = 0.005182354507338394

iteración: 4 x_i = 0.5671703584197446 $g(x_i)$ = 0.5671279391773145
$f(x_i)$ = -0.00004.2419242430091764e-05

El grado de precisión para la cuarta iteración es de ~10^{-2}

3.6 Método de la secante. Use el método de la secante para determinar una raíz de la siguiente función

$$f(x) = -2x^6 - 1.5x^4 + 10x + 2$$

Utilice los siguientes valores $x_0 = 1.0$ y $x_1 = 1.0$.

Solución:
Hacemos uso de la siguiente ecuación iterativa

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

iteración 0 xi 0.000000 f(xi) = 2.000000

iteración 1 x_2 = -0.307692 f(xi) = -1.092065

iteración 2 x_3 = -0.158810 f(xi) = 0.410910

iteración 3 x_4= -0.217676 f(xi) = -0.180337

iteración 4 x_5 =-0.192378 f(xi) = 0.074064

iteración 5 x_6-0.202859 f(xi) = -0.031270

iteración 6 x_7 -0.198450 f(xi) = 0.013050

iteración 7 x_8 -0.200293 f(xi) = -0.005472

iteración 8 x_9 -0.199521 f(xi) = 0.002290

iteración 9 x_{10} -0.199844 f(xi) = -0.000959

iteración 10 x_{11} -0.199709 f(xi) = 0.000402

iteración 11 x_{12} -0.199765 f(xi) = -0.000168

iteración 12 x_{13} -0.199741 f(xi) = 0.000070

iteración 13 x_{14} -0.199751 f(xi) = -0.000029

iteración 14 x_{15} -0.199747 f(xi) = 0.000012

iteración 15 x_{16} -0.199749 f(xi) = -0.000005

iteración 16 x_{17} -0.199748 f(xi) = 0.000002 iteración 17 x_{18} -0.199749 f(xi) = -0.000001

iteración 18 x_{19} -0.199748 f(xi) = 0.000000

4 Sistemas de ecuaciones algebraicas

4.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Dado el siguiente sistema, cuál es el valor de $x^{<3>}$ de la tercera iteración usando el método de Jacobi con los valores iniciales $x^{<0>} = \{x_1^{<0>} = 0, x_2^{<0>} = 0\}$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &= 19 \\
4x_1 - 3x_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
x_1^{<k+1>} &= (19 - 5x_2^{<k>})\frac{1}{2} \\
x_2^{<k+1>} &= (1 + 4x_1^{<k>})\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{<1>} &= \{x_1 = 9.500000, x_2 = 0.333333\} \\
x^{<2>} &= \{x_1 = 8.666667, x_2 = 13.000000\} \\
x^{<3>} &= \{x_1 = -23.000000, x_2 = 11.888889\}
\end{aligned}
$$

4.2 Método de Jacobi.Calcule el vector solución $\mathbf{x}^{(3)}$ en el desarrollo del Método de Jacobi para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\
3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4
\end{gathered}
$$

utilice el vector $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$ como primera aproximación.

Solución:

despejar las variables x_i de su respectiva ecuación

$$
\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_3^k) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - (-1)x_2^0 - (1)x_3^0) \\ \frac{1}{a_{22}}(0 - (3)x_1^0 - (2)x_3^0) \\ \frac{1}{a_{33}}(4 - 3x_1^0 - 7x_3^0) \end{bmatrix}
$$

de modo que:
iter: 0 vec. sol: [0. 0. 0.]

iter: 1 vec. sol: [0.33333333 0. 0.58428571]

iter: 2 vec. sol: [0.13857143 -0.36142857 0.44142857]

iter: 3 vec. sol: [0.06571429 -0.21642857 0.67979592]

iter: 4 vec. sol: [0.03459184 -0.25945578 0.64887755]

iter: 5 vec. sol: [0.03055556 -0.23358844 0.68065598]

iter: 6 vec. sol: [0.0285852 -0.2421631 0.67129981]

iter: 7 vec. sol: [0.0288457 -0.2380592 0.6758191]

iter: 8 vec. sol: [0.02870723 -0.23969588 0.67394864]

iter: 9 vec. sol: [0.02878516 -0.23900316 0.67470942]

iter: 10 vec. sol: [0.02876247 -0.23929572 0.67437915]

4.3 Gauss-Jordan. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss-Jordan (reordenar la matriz de ser necesario).

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$

$$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

Solución:
La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -1 & 3 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & -1 & -11 \\ 0 & -3 & -1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

matriz después de la transformación k = 0

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 11.1 & -1.2 & 3 & 24.4 \\ 0 & -1.2 & 10.4 & -1 & -9.8 \\ 0 & -3 & -1 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

matriz después de la transformación k = 1

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 1.891892 & 0.27027 & 8.198198 \\ 0 & 11.1 & -1.2 & 3 & 24.4 \\ 0 & 0 & 10.27027 & -0.675676 & -7.162162 \\ 0 & 0 & -1.324324 & 8.810811 & 21.594595 \end{pmatrix}$$

matriz después de la transformación k = 2

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0-394737 & 9.517544 \\ 0 & 11.1 & 0 & 2.921053 & 23.563158 \\ 0 & 0 & 10.27027 & -0.675676 & -7.162162 \\ 0 & 0 & 0 & 8.723684 & 20.671053 \end{pmatrix}$$

matriz después de la transformación k = 3

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 8.582202 \\ 0 & 11.1 & 0 & 0 & 16.641629 \\ 0 & 0 & 10.27027 & 0 & -5.561127 \\ 0 & 0 & 0 & 8.723684 & 20.671053 \end{pmatrix}$$

normalizando la diagonal se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.85822 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.499246 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.541478 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2.369532 \end{pmatrix}$$

por lo que la solución es $x_1 = -0.85822$, $x_2 = 1.499246$, $x_3 = -0.541478$, $x_4 = 2.369532$

4.4 Método de SOR. Utilice el método de SOR para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -61.5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5 \end{gathered}$$

utilice el vector $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$, y un valor de $\omega = 0.9$

solución:
Para calcular la solución se usa que

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\omega)x_1^k + \omega\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \\ (1-\omega)x_2^k + \omega\frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k) \\ (1-\omega)x_3^k + \omega\frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k) \end{bmatrix}$$

y la solución queda como:

iter: 0 vec. sol: [0. 0. 0.]

iter: 1 vec. sol: (2.43 -8.1315 -2.84373)

iter: 10 vec. sol: (3.76935007 -7.15789486 -3.622291)

5 Integración

5.1 Integrales. Regla de Newton-Cotes. Obtener la siguiente integral usando la regla compuesta de Simpson $\frac{1}{3}$ con $n = 10$.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Solución:

$$h = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	1.01	1.04	1.09	1.17	1.28	1.43	1.63	1.89	2.24	2.71

$$
\begin{aligned}
int = \frac{0.1}{3}(1.0+ \\
&4(1.01+1.09+1.28+1.63+2.24)+ \\
&2(1.04+1.17+1.43+1.89)+ \\
&\;2.71) = 1.46
\end{aligned}
$$

5.2 Integrales. Cuadratura. Obtener la siguiente integral usando la cuadratura Gaussiana con $n = 3$.

$$\int_0^3 \frac{e^x sin(x)}{1+x^2}dx$$

$w_1 = 0.55555555 \quad z_1 = -0.77456669$
$w_2 = 0.88888888 \quad z_2 = 0$
$w_3 = 0.55555555 \quad z_3 = 0.77456669$

Solución:

$$
\begin{aligned}
int = \frac{3-0}{2}[0.5555f\left(\frac{0+3}{2}+\frac{3-0}{2}(-0.7745)\right)+ \\
0.8888f\left(\frac{0+3}{2}+\frac{3-0}{2}(0)\right)+ \\
0.5555f\left(\frac{0+3}{2}+\frac{3-0}{2}(0.7745)\right)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
int = 1.5[&0.5555f\,(0.3381)+ \\
&0.8888f\,(1.5)+ \\
&0.5555f\,(2.6618)] = 2.8631
\end{aligned}
$$

5.3 Método de Gauss-Legendre de 4 puntos. Aproxime el valor del siguiente integral utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre de 4 puntos

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx.$$

Si consideramos que el valor exacto de esta integral es 0.192259 calcule el error porcentual cometido en la aproximación.

Solución:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\bar{x})d\bar{x} \approx c_o f(z_0) + c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + c_3 f(z_3)$$

aplicando el cambio de variable

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx = 0.25 \int_{-1}^{1} (1.25 - 0.25\bar{x})^2 \ln(1.25 - 0.25\bar{x})^2) d\bar{x}$$

Usando los siguientes valores para las c_iy los z_i

$$\begin{array}{rclrcl}
c_0 & = & 0.3478548 & z_0 & = & -0.861136312 \\
c_1 & = & 0.6521452 & z_1 & = & -0.339981044 \\
c_2 & = & 0.6521452 & z_2 & = & 0.339981044 \\
c_3 & = & 0.3478548 & z_3 & = & 0.861136312
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
0.25 \int_{-1}^{1} (1.25 - 0.25\bar{x})^2 \ln(1.25 - 0.25\bar{x})^2) d\bar{x} & \approx & 0.25[0.3478548 f(1.25 - 0.25(-0.861136312)) + \\
& + & 0.6521452 f(f(1.25 - 0.25(-0.339981044)) \\
& + & +0.6521452(f(1.25 - 0.25(0.339981044)) \\
& + & +0.3478548 f(1.25 - 0.25(0.861136312))] \\
& \approx & 0.1938115
\end{array}$$

$$Error_{\%} = \frac{|0.192259 - 0.1938115|(100)}{0.192259} = 0.8\%$$

6 Ecuaciones diferenciales ordinarias

6.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.Resolver la siguiente ecuación diferencial usando el método de Euler modificado con $\delta = 0.2$.

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= -2C \\
C_0(t_0 = 0) &= 1.5 \\
C_n(t_n = 0.4) &= ?
\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
C_1* &= 1.5 + 0.2 f(1.5, 0) = 0.899 \\
C_1 &= 1.5 + 0.2 \left(\frac{f(1.5, 0) + f(0.899, 0.2)}{2} \right) = 1.02 \\
C_2* &= 1.02 + 0.2 f(1.02, 0.2) = 0.612 \\
C_2 &= 1.02 + 0.2 \left(\frac{f(1.02, 0.2) + f(0.612, 0.4)}{2} \right) = 0.6936
\end{aligned}$$

6.2 Runge-Kutta de cuarto orden. Usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar una solución para el siguiente sistema, considere $h = 0.25$, de su solución hasta $x = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x+1-y\\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Solución:
Usando que
$x_{n+1} = x_n + h$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, donde

$k_1 = hf(x_n, y_n)$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

Se obtiene que
$n = 0$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$n = 1$
$k_1 = 0$

$k_2 = 0.03125$

$k_3 = 0.02734$

$k_4 = 0.05566$

$x_1 = 0.25 \quad y_1 = 1.0288$

$n = 2$
$k_1 = 0.5529$

$k_2 = 0.07963$

$k_3 = 0.07659$

$k_4 =$0.09864
$x_2 = 0.5 \quad y_2 = 1.10654$

$n = 3$
$k_1 =$0.098364

$k_2 = 0.117318$

$k_3 = 0.114949$

$k_4 = 0.122126$

$x_3 = 0.75 \quad y_3 = 1.22238$

$n = 4$
$k_1 = 0.1319$

$k_2 = 0.14666$

$k_3 = 0.14482$

$k_4 = 0.15819$

$x_4 = 1.0 \quad y_4 = 1.36789$

7 Ecuaciones diferenciales parciales

7.1 Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. Considera una placa cuadrada con dimensiones 1×1 metros, donde la temperatura en la placa $T(x, y)$ está gobernada por la ecuación de Laplace bidimensional:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Con las siguientes condiciones de contorno de Dirichlet:

- $T(x, 0) = 20^o C$ para $0 \leq x \leq 1$
- $T(x, 1) = 100^o C$ para $0 \leq x \leq 1$
- $T(0, y) = 0^o C$ para $0 \leq y \leq 1$
- $T(1, y) = 50^o C$ para $0 \leq y \leq 1$

Plantea el sistema de ecuaciones utilizando diferencias finitas para aproximar la solución en la región $(x, 0 \leq x \leq 1)$ y $(y, 0 \leq y \leq 1)$, utilizando un tamaño de malla de $h = 0.25$. **Solución:** Si llamamos $P_1, P2, \ldots, P_9$ a los nodos formados en la malla, se obtiene el siguiente sistema de 9×9

$$\begin{aligned}
-4P_1 + P_2 + P_4 &= -20\\
P_1 - 4P_2 + P_3 + P_5 &= -20\\
P_2 - 4P_3 + P_6 &= -70\\
P_1 - 4P_4 + P_5 + P_7 &= 0\\
P_2 + P_4 - 4P_5 + P_6 + P_8 &= 0\\
P_3 + P_5 - 4P_6 + P_9 &= -50\\
P_4 - 4P_7 + P_8 &= -100\\
P_5 + P_7 - 4P_8 + P_9 &= -100\\
P_6 + P_8 - 4P_9 &= -150
\end{aligned}$$