

Fenómenos de transporte aplicado a flujo de fluidos

Traducción del libro Transport Phenomena de Louis Theodore

Traductor Antonio Valiente

Introducción y unidades

Unidades

Las unidades usadas en esta parte del texto serán las del sistema internacional de unidades (SI). Todas las cantidades y las propiedades físicas y químicas se expresarán en ese sistema. Por ejemplo:

Masa en Kg

Fuerza en newtons

Longitud en m

Tiempo en segundos

Temperatura en grados kelvin K

Energía en joules.

Las ecuaciones de transporte son ecuaciones dimensionales y para que sean verdaderas cada término de la ecuación debe estar expresado en unidades consistentes, es decir, la ecuación debe ser dimensionalmente homogénea.

Se han hecho esfuerzos para mantener la consistencia y una notación parecida a la que se usa en los libros de ingeniería.

1.- Las magnitudes escalares se presentan con letras comunes utilizando letras latinas o griegas. Por ejemplo : s , F , Δ , ϕ , etc.

Los vectores se representan con letras latinas negritas, por ejemplo : **a**, **V**, **W**, etc.

3.- Los tensores se representan con letras griegas en negrita.: **ϕ** , **β** , **τ** , etc.

4.- Los valores absolutos de una cantidad escalar y la magnitud de los vectores se designan con la notación: $|-5|$ o $|V|$,

5.- Las cantidades que son únicas o especiales se designarán con * colocada arriba de la letra, por ejemplo: P*.

6.- La notación + colocada arriba de la letra se usa para definir cantidades adimensionales.

7.- Finalmente, el valor promedio de una función se indicará mediante: $\langle T \rangle$, $\langle V \rangle$.

Derivadas del tiempo.

Para evitar confusiones posteriores, definimos las tres derivadas temporales encontradas en el texto.

$$\frac{d}{dt} \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{D}{Dt}$$

Supongamos que un observador está interesado en medir la propiedad (ϕ) en un sistema a través del cual se mueve un fluido. Supongamos que esta propiedad es función de la posición (x,y,z) y del tiempo t.

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

Esta ecuación dice: ϕ es una función de x, y, z, y de t. . La derivada común, $\frac{d\phi}{dt}$ representa la rapidez de cambio de ϕ con respecto al tiempo que medirá un observador que se mueve dentro del sistema con una velocidad que difiere de la del fluido. Esta es una derivada *sin ninguna atadura* y es la que se usa más

frecuentemente en los textos de ingeniería. La derivada parcial $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x,y,z}$ o simplemente

$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ mide la rapidez de cambio de la propiedad con respecto al tiempo cuando el observador está en un punto fijo dentro del sistema. Se debe recordar que la derivada parcial requiere que las demás variables permanezcan constantes durante la diferenciación. La notación $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x,y,z}$ nos indica este hecho, pero se usará raramente.

La derivada de Stokes $\frac{D\phi}{Dt}$ representa la rapidez de cambio de ϕ con respecto al tiempo que un observador mediría si se moviera dentro del sistema con la misma velocidad del fluido. Si los componentes de la velocidad del fluido y del observador son v_x, v_y, v_z en las direcciones, x, y, z entonces $\frac{D\phi}{Dt}$ es representada matemáticamente por:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

En donde:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{y,z,t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x,z,t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{y,x,t}$$

1.4.- Desarrollo de las ecuaciones.

Los fenómenos de transporte tratan de la transferencia de ciertas cantidades (momentum, energía y masa) desde un punto a otro dentro de un sistema o de un sistema a otro. Hay básicamente, tres mecanismos de transporte. Estos son:

1.- radiación.

2.-Convección.

3.-Difusión molecular.

El primer mecanismo, el transporte por radiación, se produce mediante el movimiento ondulatorio. Este mecanismo no se considera en este libro. La transferencia convectiva se lleva a cabo por el simple movimiento de los fluidos. La difusión molecular se debe a la presencia de gradientes. Por ejemplo: la transferencia de momentum se debe a un gradiente de velocidades. La transferencia de energía en la forma de calor se debe a un gradiente de temperaturas y la transferencia de masa a un gradiente de concentraciones..

La difusión molecular está descrita mediante leyes fenomenológicas. Cada una de esas leyes se presentan como el producto de un coeficiente de transporte por un gradiente.

1.- La segunda ley de Newton sirve para definir la viscosidad.

2.- La ley de Fourier define la transferencia de calor por conducción y de allí el coeficiente de transferencia de calor.

3.- La ley de Fick define el transporte molecular de masa y de allí el coeficiente de difusión.

Los coeficientes de transporte se determinan experimentalmente, aunque pueden predecirse teóricamente. Los métodos para evaluar estos coeficientes no se presentan en este libro.

En nuestro universo de estudio el momentum, la energía y la masa se conservan, ya que obedecen a la ley general de la conservación en los sistemas.(Ec. 1.4.1).

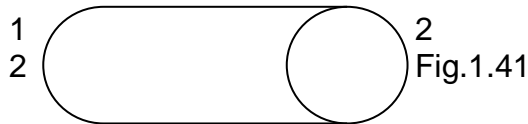
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad entrante} \\ \text{a un sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad saliente} \\ \text{de un sistema} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad generada} \\ \text{en el sistema} \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad acumulada} \\ \text{en el sistema} \end{array} \right\} \quad (1.4.1)$$

Esas ecuaciones se pueden escribir en función del tiempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flujo entrante} \\ \text{a un sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo saliente} \\ \text{de un sistema} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo generado} \\ \text{en un sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo acumulado} \\ \text{en el sistema} \end{array} \right\} \quad (1.4.2)$$

La ley de la conservación puede aplicarse a sistemas microscópico o macroscópicos. Para ilustrar estos métodos presentaremos un ejemplo.

Consideremos un sistema en el cual un fluido fluye a través de un tubo cilíndrico (véase la figura 1.4.1).



Si definimos al sistema como el fluido contenido dentro del tubo entre los puntos 1 y 2 a un tiempo dado. Si estamos interesados en los cambios que ocurren entre la entrada y la salida, la ley de la conservación se aplicará en un nivel macroscópico. Y la ecuación que describirá los cambios en el sistema no se ocupará de las variaciones internas dentro del sistema. Esto es lo que generalmente se hace en los cursos de Operaciones Unitarias.

El acercamiento microscópico se utiliza cuando se desea una información detallada del comportamiento dentro del sistema. Para ello se aplica la ley de la conservación a un elemento diferencial dentro del sistema, la ecuación resultante se expande, via la integración, para describir el comportamiento de todo el sistema,

Tradicionalmente se usan ecuaciones diferenciales para describir el comportamiento de esos sistema. En los años recientes hay una tendencia al uso de esas ecuaciones en forma vectorial, sin embargo el balance alrededor de elemento se ha conservado. Las ecuaciones se desarrollan primeramente en unas coordenadas particulares (generalmente rectangulares) y luego los términos se agrupan para producir una

ecuación más concisa en términos vectoriales. Esta ecuación vectorial se re expande para otros sistemas de coordenadas.

1.5 Condiciones iniciales y condiciones a la frontera.

Para describir el sistema mediante ecuaciones diferenciales se debe resolver estas para obtener una descripción de la presión, temperatura, composición, etc. para ello es necesario especificar las condiciones iniciales y las condiciones a la frontera. Esta información se obtiene a partir de las condiciones físicas de éste. El número de condiciones a la frontera (BC) que debe especificarse es la suma de la derivada de más alto orden para cada variable en la ecuación diferencial. El número de condiciones iniciales (IC) que deben especificarse es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación diferencial. Esta condición se aplica sólo si el tiempo es una variable..

Por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{d^2 v_y}{dz^2} = 0$$

Requiere de 2 condiciones a la frontera .

La ecuación.

$$\frac{dT}{dt} = 0, t = \text{tiempo}$$

Necesita una condición inicial. Y finalmente la ecuación:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}$$

Necesita una condición inicial y dos condiciones a la frontera.

1.6 Solución de las ecuaciones.

Para resolver problemas de fenómenos de transporte se requiere primeramente transformar el problema en una ecuación matemática. La solución de la ecuación completa el trabajo. El procedimiento puede ser análogo al siguiente.

- 1.- Dibujar un diagrama que represente al sistema.
- 2.- Enliste todas las variables pertinentes en el diagrama.
- 3.- Seleccione el sistema de coordenadas más conveniente.
- 4.- Obtenga la ecuación matemática que describa al sistema. Esta información puede obtenerse a partir de las ecuaciones generales de transporte.
- 5.- especifique las condiciones a la frontera y las condiciones iniciales.
- 6.- Resuelva la ecuación.
- 7.- Compruebe que la solución satisfaga las condiciones

Se dijo que la combinación de las ecuaciones de la conservación con las leyes fenomenológicas llevan a unas ecuaciones diferenciales que pueden resolverse si se especifican las condiciones a la frontera y las condiciones iniciales. Esto lleva a la solución, sin embargo, en la práctica se presentan dos dificultades.

- 1.- hay un conocimiento insuficiente de los coeficientes que aparecen en la ecuación.
- 2.- La complejidad de las ecuaciones diferenciales y de sus condiciones iniciales y a la frontera impiden su solución.

A veces las soluciones pueden obtenerse mediante:

- 1.- Intuición.
- 2.- Métodos gráficos.
- 3.- Métodos analíticos.
- 4.- Métodos analógicos.

5.-Métodos numéricos.

Algunas soluciones pueden obtenerse casi inmediatamente mediante la inspección de la ecuación o por la intuición en algunos ejemplos. Sin embargo, la mayoría de las ecuaciones diferenciales que se obtienen se pueden obtener mediante procedimientos analíticos. Que incluyen:

- 1.-Separación de variables.
- 2.-Series de Fourier.
- 3.-Funciones Bessel.
- 4.-Transformadas de Laplace.
- 5.-Función error.

Con las modernas computadoras se pueden obtener las soluciones de problemas más complejos.

Introducción al análisis vectorial

2.1.- Introducción

El análisis vectorial se considera en la actualidad esencial en la educación de un ingeniero. Es una herramienta valiosa ya que permite convertir ecuaciones largas y complicadas en formas compactas. En este capítulo se desarrollarán los operadores y operaciones vectoriales en coordenadas, rectangulares, cilíndricas y esféricas.

2.2.- definiciones

Escalares

Un escalar es una cantidad que tiene magnitud y signo pero no dirección. Ejemplos de cantidades escalares son:

Longitud, área, volumen, masa, densidad, tiempo, temperatura, energía, números reales.

Se dice que dos escalares son iguales si ambos tienen la misma magnitud y signo. Vamos a representar las magnitudes escalares con letras comunes.

Por ejemplo: s , F , ϕ

Vectores

Un vector es una cantidad que posee magnitud y dirección. Entre los ejemplos de vectores tenemos:

Velocidad, aceleración, fuerza, momentum.

Representaremos a los vectores en este libro con letras en negrita, por ejemplo: \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{A} .

Tensores

Definiremos a un tensor como una cantidad que puede especificarse en términos de n cantidades escalares. Los tensores se representan con letras griegas en negrita. Por ejemplo: \mathbf{T}

Los escalares, los vectores y los tensores son llamados a veces como “tensores” de cierto rango. Estos “tensores” pueden especificarse en términos de cantidades escalares de n (n =rango). Un tensor de rango cero es un escalar que requiere una (n^0) cantidad de escalares para definirlo. Un vector es un tensor de rango uno (n^1) ya que requiere de tres cantidades escalares para definirlo. Un tensor de rango dos, es un tensor que requiere (n^2) nueve cantidades escalares para definirlo.

Representación de vectores.

Un vector puede ser representado en forma pictórica por una línea y una flecha (Fig. 2.2.1). El punto O es el origen del vector. La línea OP y la flecha especifican la dirección del vector \mathbf{v} . La longitud de la línea OP es una medida de la magnitud del vector \mathbf{v} .

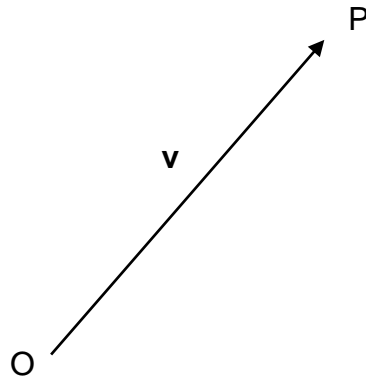


Fig.2.2.1

Dos vectores cuya magnitud o longitud y dirección son iguales se consideran como iguales independientemente del punto del espacio en que estén colocados. De acuerdo con esta definición, los dos vectores de la figura 2.2.2 son iguales, es decir $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

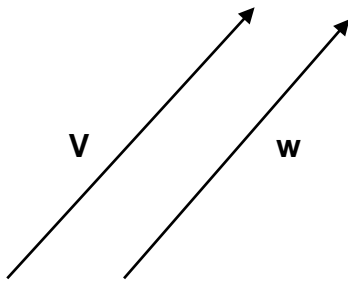


Fig. 2.2.2

Podemos, por lo tanto mover a los vectores en el espacio siempre que su dirección y magnitud se conserven. Si dos vectores tienen la misma longitud pero sus direcciones son opuestas se dice que uno es el negativo del otro. En la Fig 2.2.3 , $\mathbf{v} = -\mathbf{w}$ y \mathbf{w} puede representarse por $-\mathbf{v}$.

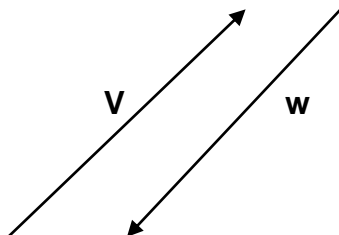


Fig.2.2.3

2.3. Álgebra vectorial

2.4. Las operaciones con vectores con frecuencia siguen las mismas reglas que el álgebra de escalares.

Adición

La adición de vectores se define por medio de la regla del paralelogramo. Si se toman los vectores \mathbf{v} , \mathbf{w} de la figura 2.3.1 y tomando en cuenta que los vectores se pueden mover en el espacio, la suma de \mathbf{v} y \mathbf{w} es definida por otro vector \mathbf{u} que está representado por la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores y que tienen el mismo origen que \mathbf{v} y \mathbf{w} (véase la Fig. 2.3.2).

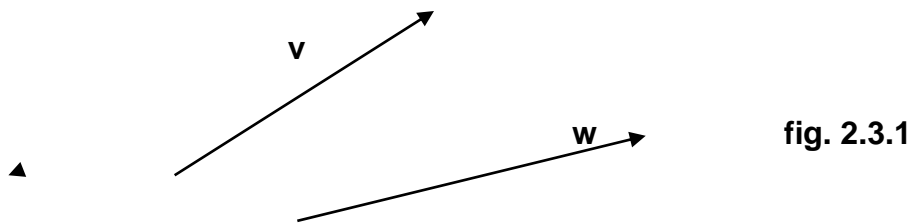


fig. 2.3.1

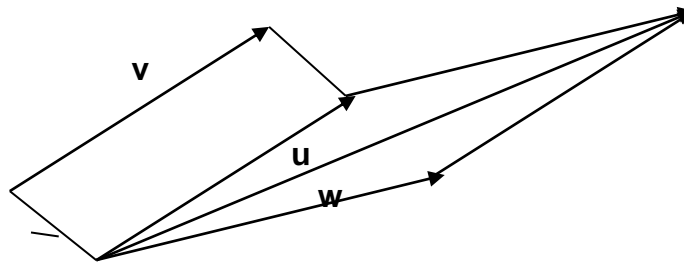


Fig.2.3.2

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$$

En forma alternativa , u puede generarse posicionando el origen de v al final de W y construyendo entonces un vector del origen de w al punto final de v. Este método se presenta en la Fig. 2.3.3. cada uno de estos procesos puede aplicarse para la adición de más de dos vectores..

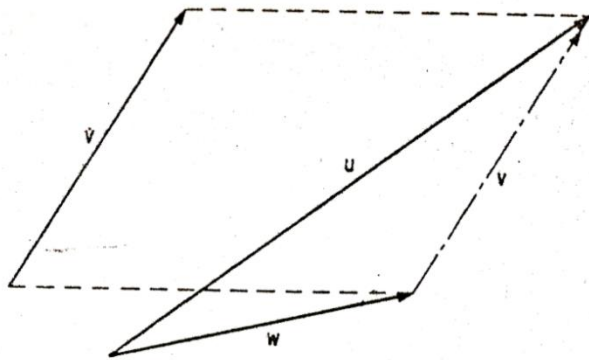


Fig. 2.3.3.

Resta o sustracción

Los vectores pueden también restarse uno de otro ya que satisfacen la ley conmutativa de la adición, por ejemplo :

$$\mathbf{V} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (2.3.2)$$

La diferencia de dos vectores \mathbf{v} , \mathbf{w} puede escribirse como:

$$\mathbf{V} - \mathbf{w}$$

$$\mathbf{V} + (-\mathbf{w}) \quad (2.3.3)$$

La sustracción de dos vectores puede entonces ser descrita en términos de una operación de adición (véase la Fig. 2.3.4). El vector resultante es \mathbf{z} .

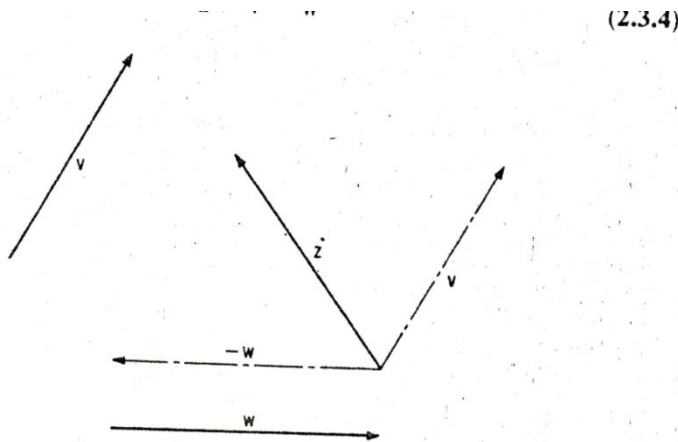


Fig. 2.3.4.

Componentes de los vectores

El desarrollo que hemos hecho hasta ahora no menciona ningún sistema particular de coordenadas. Sin embargo, un vector puede ser representado en forma más conveniente con referencia a un sistema dado de coordenadas y así representarse por medio de una ecuación. En la figura 2.3.5 se presenta un sistema ortogonal de coordenadas que gira hacia la mano derecha. La ortogonalidad requiere que los tres ejes sean mutuamente perpendiculares. Un sistema con giro hacia la mano derecha o

que gira en la dirección de las manecillas de un reloj es aquel que rotará de la misma manera que un tornillo al moverse del eje 1 al 2 a través de los ángulos formados entre los ejes.

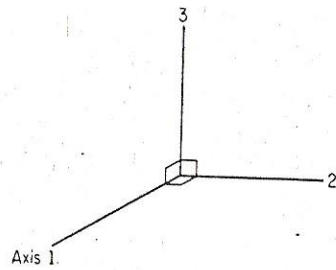
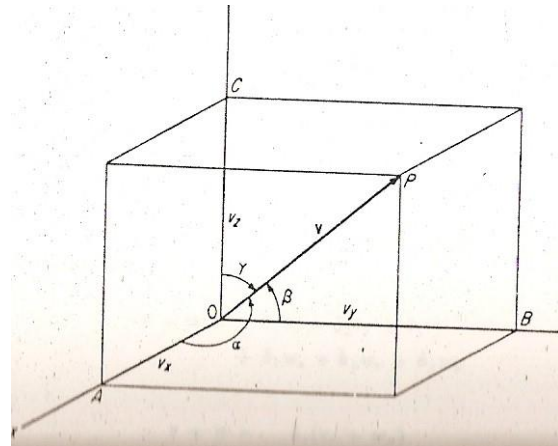


Fig. 2.3.5.



En este libro todos los sistemas que se manejen serán ortogonales y con giro a la derecha. En la figura 2.3.6 se representa el vector \mathbf{v} usando coordenadas rectangulares, El origen del vector es el punto O y está localizado en el origen del sistema de coordenadas. El punto final de \mathbf{v} es P. Para definir un vector se requiere especificar la magnitud y la dirección.

El vector \mathbf{v} de la figura 2.3.6 puede especificarse mediante:

1.- $|\mathbf{v}|$, la magnitud del vector.

Figura 2.3.6

2.- α , el ángulo formado por AOP

3. β , el ángulo formado por BOP

4.- γ , el ángulo formado por COP.

O por medio de:

1. V_x , la proyección de \mathbf{v} sobre el eje x .

2. V_y , la proyección de \mathbf{v} sobre el eje y .

3. V_z , la proyección de \mathbf{v} sobre el eje z .

Tome en cuenta que v_x, v_y, v_z son escalares no vectores, ya que un vector nunca puede ser escalar.

$$\mathbf{v} \neq v_x + v_y + v_z \quad (2.3.5)$$

Para poder representar a \mathbf{v} en forma de una ecuación que contenga a v_x, v_y, v_z se emplean tres vectores unitarios $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, , \mathbf{y}, \mathbf{z} . Estos vectores unitarios tienen la magnitud de uno y están dirigidos en sus ejes x, y, z . Ver figura 2.3.7.

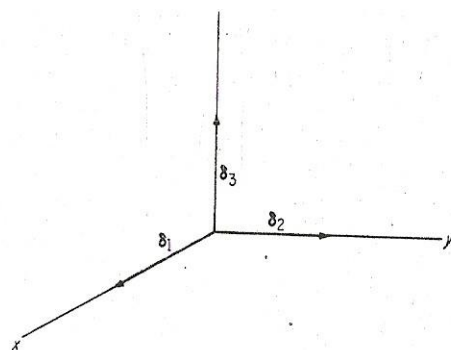


Fig. 2.3.7.

La cantidad $\delta_1 v_x$ es un vector y está definido como un componente de un vector con magnitud v_x ($|\delta_1 v_x| = v_x$) y direccionado a lo largo de eje x. Con esta definición y de acuerdo con la ley del paralelogramo , se puede expresar el vector v en función de sus componente. Veáse las figuras 2.3.7 y 2.3.8.

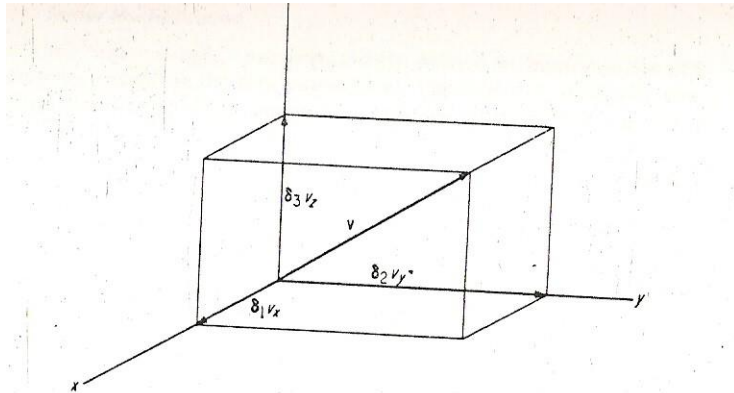


Fig. 2.3.8.

$$\mathbf{v} = \delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z \quad (2.3.6)$$

Cualquier vector puede ser representado de la misma manera: Por ejemplo:

$$\mathbf{w} = \delta_1 w_x + \delta_2 w_y + \delta_3 w_z \quad (2.3.7)$$

En la mayoría de los caso emplearemos las coordenadas rectangulares en el desarrollo de los vectores.

La aplicación de la ley del paralelogramo se presento con anterioridad en esta sección, de acuerdo con esa ley , la adición y la sustracción de los vectores también puede llevarse a cabo en la forma de componentes.

Es decir, la edición de \mathbf{v} , y \mathbf{w} puede representarse como:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z + \delta_1 w_x + \delta_2 w_y + \delta_3 w_z$$

Y por lo tanto

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \delta_1 (v_x + w_x) + \delta_2 (v_y + w_y) + \delta_3 (v_z + w_z) \quad (2.3.8)$$

Ejemplo 1

Dos fuerzas F_1 y F_2 se aplican a la unidad de masa. Calcule la fuerza resultante F_3 que actúa sobre la masa si:

$$F_1 = \delta_1 10 + 20\delta_2 + 30\delta_3$$

$$F_2 = -10\delta_1 + 20\delta_2 + 10\delta_3$$

Respuesta

$$F_1 + F_2 = F_3 = 10\delta_1 + 20\delta_2 + 30\delta_3 - 10\delta_1 + 20\delta_2 + 10\delta_3$$

$$F_3 = (0)\delta_1 + 40\delta_2 + 40\delta_3 = 40(\delta_2 + \delta_3)$$

La sustracción de vectores se representa por:

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z - (\delta_1 w_x + \delta_2 w_y + \delta_3 w_z) = \delta_1 (v_x - w_x) + \delta_2 (v_y - w_y) + \delta_3 (v_z - w_z) \quad (2.3.9)$$

Ejemplo 2.

La velocidad de una partícula A se describe mediante la ecuación

$$\mathbf{v}_A = 2\delta_1 + 9\delta_2 - 13\delta_3 \text{ mientras que la de la partícula B está dada por}$$

$$\mathbf{v}_B = 5\delta_1 + 7\delta_2 - 10\delta_3 .$$

Calcule la velocidad resultante \mathbf{v}_R de la partícula A relativa a la de la partícula B.

Respuesta.

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B$$

$$= 2\delta_1 + 9\delta_2 - 13\delta_3 - (5\delta_1 + 7\delta_2 - 10\delta_3) = -3\delta_1 + 2\delta_2 - 3\delta_3$$

El procedimiento especificado en las ecuaciones (2.3.8) y 2.3.9 puede extender a más de dos vectores.

Multiplicación de vectores

Sin saberlo, pero convenientemente ya hemos definido la multiplicación de un vector por un escalar en la sección previa. El término $\delta_1 v_x$ contiene obviamente un vector y un escalar y el ejemplo de la multiplicación de un vector δ_1 por un escalar v_x . Específicamente se define el producto de un vector \mathbf{v} por un escalar s como el vector $s\mathbf{v}$ cuya dirección es ya sea la misma o la opuesta a la de \mathbf{v} dependiendo de si s es positiva o negativa) y cuya magnitud o longitud es s veces la de $|\mathbf{v}|$. Los dos vectores que se presentan en la figura 2.4.1 son paralelos y tienen la misma dirección.

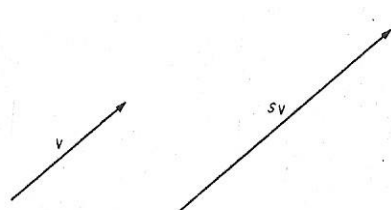


Fig. 2.4.1.

vector sv is twice that of v .

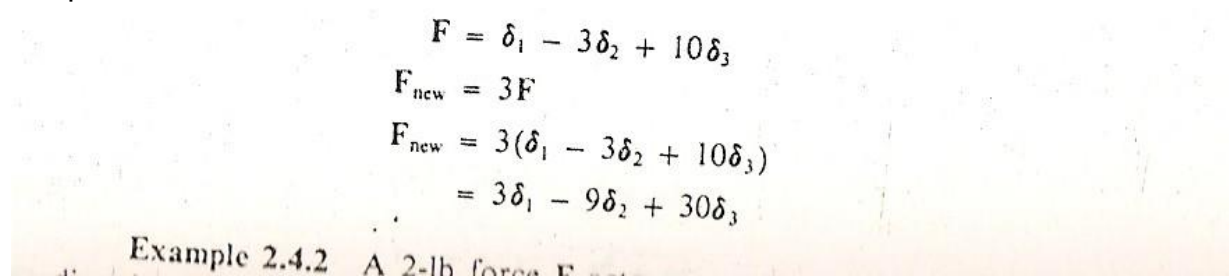
Si la longitud del vector $s\mathbf{v}$ es la doble del \mathbf{v} , entonces $s = 2$. El vector $s\mathbf{v}$ puede representarse por medio de :

$$s\mathbf{v} = s(\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z) = \delta_1 s v_x + \delta_2 s v_y + \delta_3 s v_z \quad (2.4.1)$$

Ejemplo 4 .

La fuerza que actúa sobre una partícula es $\mathbf{F} = \delta_1 - 3\delta_2 + 10\delta_3$. Si la fuerza se triplica calcule la nueva fuerza.

Respuesta.



$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \delta_1 - 3\delta_2 + 10\delta_3 \\ \mathbf{F}_{\text{new}} &= 3\mathbf{F} \\ \mathbf{F}_{\text{new}} &= 3(\delta_1 - 3\delta_2 + 10\delta_3) \\ &= 3\delta_1 - 9\delta_2 + 30\delta_3 \end{aligned}$$

Example 2.4.2 A 2-lb force \mathbf{F}

Ejemplo 5

Una fuerza \mathbf{F} de 2 kg actúan sobre una masa de 16.1 kg. Encuentre la dirección y la magnitud de la aceleración resultante si:

$$\mathbf{F} = -2\delta_1$$

Respuesta.

La primera ley de newton indica que:

$$\mathbf{F} = \frac{m}{g_c} \mathbf{a}$$

En donde \mathbf{F} es el vector fuerza en kg fuerza; \mathbf{a} el vector aceleración en m / s^2

M es la masa en kilogramos y g_c el factor de conversión $9.81 \text{ N} / \text{kg fuerza}$.

Rearreglando la ecuación anterior :

$$\mathbf{a} = \frac{g_c}{m} \mathbf{F} = \frac{9.81}{16.1} (-2\delta_1) = -1.2186\delta_1 \text{ m} / \text{s}^2$$

La aceleración tiene la misma dirección que la fuerza (negativa en la dirección z).

Producto punto

Existen otros dos tipos de multiplicación vectorial. El primero es el escalar o producto punto entre dos vectores. Esta operación se indica por medio de un punto entre dos vectores. Por definición, es un escalar igual al producto de las longitudes o magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2.4.2)$$

Se puede, mediante esta definición, obtener el producto punto de varias combinaciones de vectores unitarios.

El producto punto de $\delta_1 \cdot \delta_1$ será:

$$\delta_1 \cdot \delta_1 = |\delta_1||\delta_1| \cos(\delta_1, \delta_1)$$

Pero $|\delta_1| = 1$; $\cos(\delta_1, \delta_1) = \cos(0^\circ) = 1$

Por lo tanto $\delta_1 \cdot \delta_1 = (1)(1)(1) = 1$

Como $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí, se puede deducir que:

$$\delta_1 \cdot \delta_1 = 1$$

$$\delta_2 \cdot \delta_2 = 1$$

$$\delta_3 \cdot \delta_3 = 1 \quad (2.4.3)$$

Además se puede demostrar que:

$$\delta_1 \cdot \delta_2 = \delta_2 \cdot \delta_1 = 0$$

$$\delta_1 \cdot \delta_3 = \delta_3 \cdot \delta_1 = 0$$

$$\delta_2 \cdot \delta_3 = \delta_3 \cdot \delta_2 = 0 \quad (2.4.4)$$

El producto punto de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$ se puede entonces representar por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z) \cdot (\delta_1 w_x + \delta_2 w_y + \delta_3 w_z) \\ &= (\delta_1 v_x) \cdot (\delta_1 w_x) + (\delta_1 v_x) \cdot (\delta_2 w_y) + (\delta_1 v_x) \cdot (\delta_3 w_z) \\ &\quad + (\delta_2 v_y) \cdot (\delta_1 w_x) + (\delta_2 v_y) \cdot (\delta_2 w_y) + (\delta_2 v_y) \cdot (\delta_3 w_z) \\ &\quad + (\delta_3 v_z) \cdot (\delta_1 w_x) + (\delta_3 v_z) \cdot (\delta_2 w_y) + (\delta_3 v_z) \cdot (\delta_3 w_z) \end{aligned}$$

Rearreglando la ecuación anterior y aplicando las ecuaciones (2.4-3) y (2.4.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (\delta_1 \cdot \delta_1) v_x w_x + (\delta_1 \cdot \delta_2) v_x w_y + (\delta_1 \cdot \delta_3) v_x w_z \\ &\quad + (\delta_2 \cdot \delta_1) v_y w_x + (\delta_2 \cdot \delta_2) v_y w_y + (\delta_2 \cdot \delta_3) v_y w_z \\ &\quad + (\delta_3 \cdot \delta_1) v_z w_x + (\delta_3 \cdot \delta_2) v_z w_y + (\delta_3 \cdot \delta_3) v_z w_z \end{aligned}$$

De manera que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \quad (2.4.5)$$

Si el producto de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es igual a cero, al menos debe cumplirse alguna de las siguientes condiciones.:

- 1.- $|\mathbf{v}|=0$
- 2.- $|\mathbf{w}| = 0$
- 3.- $|\mathbf{v}|, |\mathbf{w}| = 0$
- 4.- \mathbf{v} y \mathbf{w} son perpendiculares.

Si $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2$$

En en forma de sus componentes:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

De manera que $|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Y por lo tanto:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \quad (2.4.6)$$

El coseno del ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} también puede obtenerse a partir de sus

Introduction to Vector Analysis

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} \\ &= \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} \quad (2.4.7) \end{aligned}$$

componentes.

Este tipo de multiplicación de vectores tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, si una **fuerza** \mathbf{F} (vector) desplaza la unidad de masa una distancia \mathbf{S} (la que es un vector ya que tiene dirección) , el trabajo requerido es el producto de la magnitud del desplazamiento y de la componente de la fuerza en esa dirección (véase la Fig. 2.4.2) Este trabajo W está dado por la ecuación:

$$W = |\mathbf{s}||\mathbf{F}| \cos(\theta) \quad (2.4.8)$$

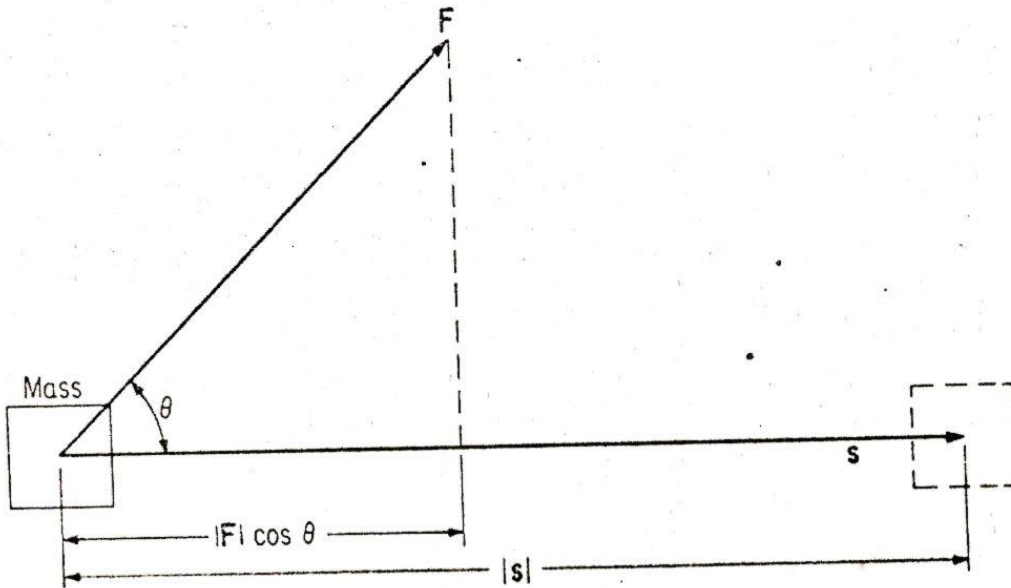


Fig.2.4.2

Sin embargo, la ecuación 82.4.8) se reduce simplemente al producto punto de dos vectores.

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (2.4.9)$$

Ejemplo 6

Calcule lo siguiente a partir del ejemplo 2.3.1

a.- $|F_1|$

b.- $|F_2|$

c.- $F_1 \cdot F_2$

d).- El ángulo entre F_1 y F_2 .

Solution:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$(a) \quad |\mathbf{F}_1| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 30^2} \\ = \sqrt{1400}$$

$$(b) \quad |\mathbf{F}_2| = \sqrt{0^2 + 40^2 + 40^2} \\ = \sqrt{3200}$$

$$(c) \quad \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = (10\delta_1 + 20\delta_2 + 30\delta_3) \cdot (-10\delta_1 + 20\delta_2 + 10\delta_3) \\ = -100 + 400 + 300 \\ = 600$$

$$(d) \quad \cos(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \frac{\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2}{|\mathbf{F}_1| |\mathbf{F}_2|} \\ = \frac{600}{\sqrt{1400} \sqrt{600}} \\ = .653$$

El ángulo entre \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 es: de 49.2°

Ejemplo 7.

Una fuerza \mathbf{F} se desplaza por un sistema s . Calcule el trabajo efectuado sobre el sistema si:

$$\mathbf{F} = 100(\delta_1 + \delta_3); \text{kg fuerza}$$

$$\mathbf{s} = 10\delta_2; \text{m}$$

Respuesta.

Por definición, el trabajo \mathbf{W} que se hace sobre un sistema es el producto punto del vector fuerza \mathbf{F} sobre el vector del desplazamiento \mathbf{s} .

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (F_x\delta_1 + F_y\delta_2 + F_z\delta_3) \cdot (s_x\delta_1 + s_y\delta_2 + s_z\delta_3) = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$

Del enunciado del problema se deduce que:

(2.4.9)

$$F_x = 0$$

$$F_y = 100$$

$$F_z = 100$$

$$s_x = 0$$

$$s_y = 10$$

$$s_z = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{W} = (0)(0) + (10)(100) + (100)(0) = 1000 \text{ kg-m.}$$

Producto cruz

El tercer tipo de multiplicación vectorial es el producto cruz. La operación se indica por una \times entre los dos vectores. Si \mathbf{v} y \mathbf{w} son dos vectores, entonces por definición

$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es un vector \mathbf{u} cuya longitud o magnitud es el producto de las longitudes o magnitudes de \mathbf{v} y \mathbf{w} y del seno del ángulo entre ellos y cuya dirección es perpendicular al plano de \mathbf{v} y \mathbf{w} y dirigida de manera que un tornillo con rosca derecha avance de \mathbf{v} hacia \mathbf{w} a través del menor ángulo entre estos vectores que avanzan en la dirección \mathbf{u} - La magnitud del producto cruz es el área del paralelogramo formado por \mathbf{v} y \mathbf{w} . Véase la figura 2.4.3.

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\text{sen}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2.4.10)$$

EL vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es igual en magnitud pero opuesto directamente a $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ de acuerdo con la definición del producto cruz. Por lo tanto:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (2.4.11)$$

Vamos ahora a obtener el producto cruz de varias combinaciones de los vectores unitarios. La magnitud del producto cruz $\delta_1 \times \delta_2$ es 1:

$$|\delta_1 \times \delta_2| = |\delta_1||\delta_2|\text{sen}(\delta_1, \delta_2) = (1)(1)(1) = 1 \quad (2.4.12)$$

La definición del producto cruz de vectores indica que el vector resultante está dirigido a lo largo del eje z positivo. Por ello:

$$\delta_1 \times \delta_2 = \delta_3 \quad (2-4-13)$$

El procedimiento anterior puede extenderse a las otras combinaciones de vectores unitarios

$$\begin{aligned} \delta_1 \times \delta_2 &= \delta_3 \\ \delta_2 \times \delta_1 &= -\delta_3 \\ \delta_1 \times \delta_3 &= -\delta_2 \\ \delta_3 \times \delta_1 &= \delta_2 \\ \delta_3 \times \delta_2 &= -\delta_1 \end{aligned}$$

$$\delta_2 \times \delta_3 = \delta_1 \quad (2.4.14)$$

Y además:

$$\delta_1 \times \delta_1 = \mathbf{0}$$

$$\delta_2 \times \delta_2 = \mathbf{0}$$

$$\delta_3 \times \delta_3 = \mathbf{0} \quad (2-4-15)$$

Ahora podemos obtener el producto cruz de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ en forma de componentes:

... in component form:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (v_x \delta_1 + v_y \delta_2 + v_z \delta_3) \times (w_x \delta_1 + w_y \delta_2 + w_z \delta_3) \\ &= \overbrace{(\delta_1 \times \delta_1)}^0 (v_x w_x) + \overbrace{(\delta_1 \times \delta_2)}^{\delta_3} (v_x w_y) + \overbrace{(\delta_1 \times \delta_3)}^{-\delta_2} (v_x w_z) \\ &\quad + \overbrace{(\delta_2 \times \delta_1)}^{-\delta_3} (v_y w_x) + \overbrace{(\delta_2 \times \delta_2)}^0 (v_y w_y) + \overbrace{(\delta_2 \times \delta_3)}^{\delta_1} (v_y w_z) \\ &\quad + \overbrace{(\delta_3 \times \delta_1)}^{\delta_2} (v_z w_x) + \overbrace{(\delta_3 \times \delta_2)}^{-\delta_1} (v_z w_y) + \overbrace{(\delta_3 \times \delta_3)}^0 (v_z w_z) \\ &= \delta_1 (v_y w_z - v_z w_y) \\ &\quad + \delta_2 (v_z w_x - v_x w_z) \\ &\quad + \delta_3 (v_x w_y - v_y w_x) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

El resultado anterior puede representarse como un determinante:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (2.4.17)$$

Al menos una de las siguientes afirmaciones debe ser cierta si $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$

- 1.- $|\mathbf{v}| = 0$
- 2.- $|\mathbf{w}| = 0$
- 3.- $|\mathbf{v}|, |\mathbf{w}| = 0$
- 4.- \mathbf{v} y \mathbf{w} son paralelos

Ejemplo 8.

Si $\mathbf{v} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ y $\mathbf{w} = \delta_1 - 3\delta_2 - \delta_3$ calcule lo siguiente:

- a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$
- b) $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$
- c) $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$
- d) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w})$
- e) El área del paralelogramo formado por \mathbf{v} y \mathbf{w} .

Respuesta

- (a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$
- (b) $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$
- (c) $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$
- (d) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w})$
- (e) The area of the parallelogram formed by \mathbf{v} and \mathbf{w} .

Solution:

$$(a) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \delta_1(2) + \delta_2(2) + \delta_3(-4)$$

$$(b) \quad \mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ = \delta_1(-2) + \delta_2(-2) + \delta_3(4)$$

$$(c) \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$$

$$(d) \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \delta_1(2) + \delta_2(-2) \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} = \delta_1(2) + \delta_2(4) + \delta_3(2)$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \delta_1(-4) + \delta_2(-4) + \delta_3(8)$$

(e) The area is given by (c), i.e. $\sqrt{24}$

El producto punto tiene varias aplicaciones. Por ejemplo: si \mathbf{v} es la velocidad lineal de una partícula que rota con una velocidad angular \mathbf{V} en relación con un eje fijo, (véase figura 2.4.4) entonces:

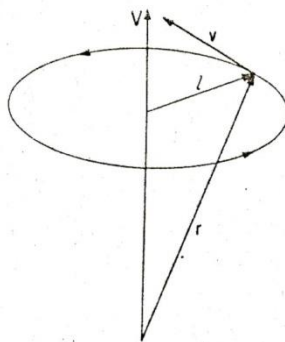


Fig. 2.4.4.

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{V}| l$$

$$|v| = |\mathbf{V}| |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{r}, \mathbf{V})$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \times \mathbf{r} \quad (2.4.18)$$

en donde \mathbf{r} es el vector de desplazamiento de la partícula desde cualquier punto sobre el eje de rotación y \mathbf{V} es definido como un vector paralelo al eje de rotación.

Otro ejemplo de aplicación es el momento \mathbf{M} generado por una fuerza \mathbf{F} aplicada en el punto P . El producto de la fuerza por la longitud perpendicular l desde el punto es definida como el momento (véase fig. 2.4.5). Esto puede ser representado por:

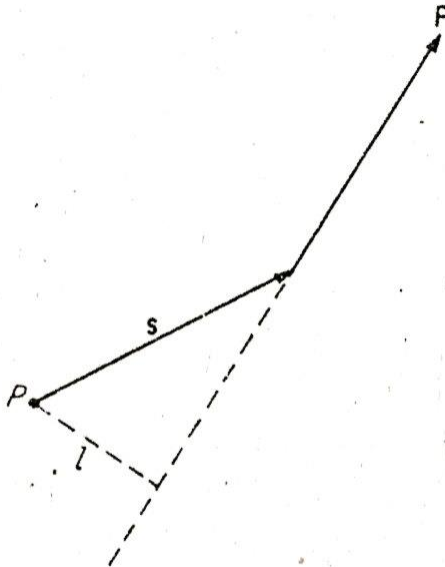


Fig. 2.4.5.

$$|\mathbf{M}| = l |\mathbf{F}|$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{s}| \sin(\mathbf{s}, \mathbf{F}) |\mathbf{F}|$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (2.4.19)$$

El vector \mathbf{M} o vector de momento está direccionado hacia afuera y perpendicular al plano de esta hoja.

2.5.- Diferenciación de vectores.

En esta sección se presentaran cuatro operaciones vectoriales que son derivadas de un operador diferencial vectorial.

Un operador se define como el término que opera sobre una cantidad vectorial o escalar. Cada operación vectorial diferencial contiene un operador definido como un gradiente y simbolizado por ∇ o por **grad.**

Gradiente

Si se define un escalar ϕ que sea función de la posición tal como:

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad (2.5.1)$$

Por medio de las reglas de la diferenciación se encuentra que:

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz \quad (2.5.2)$$

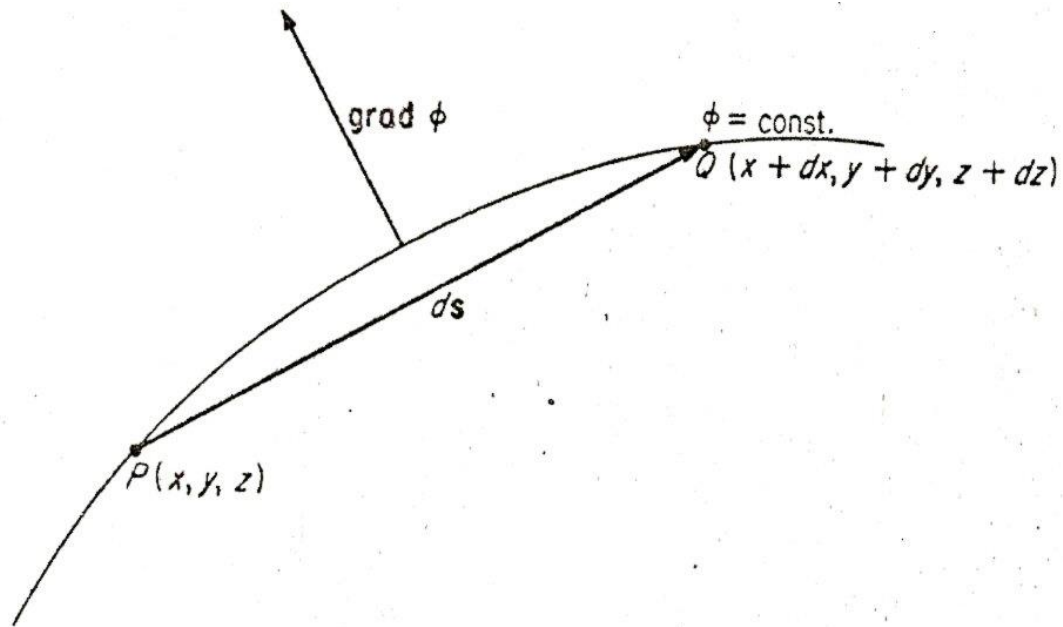


Fig. 2.5.1.

La superficie en la cual ϕ es constante se muestra en la figura 2.5.1.

Por ejemplo, si ϕ representa la temperatura de una esfera sólida cuya temperatura superficial es constante, entonces la superficie externa de la esfera es una superficie de ϕ constante. Los puntos P y Q son adyacentes y están sobre esa superficie separados por una distancia diferencial (la distancia implica dirección). Se puede definir ds como un vector diferencial de posición con su origen en P y su final en Q . Este vector puede ser representado por:

$$ds = \delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz \quad (2.5.3)$$

Los componentes son diferenciales porque el vector es diferencial.

Por medio de la ecuación (2.5.4) definiremos al gradiente, el cual es un vector representado con el símbolo ∇ o por **grad**.

$$\text{grad} = \delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.5.4)$$

Si el gradiente opera sobre el escalar ϕ se obtendrá:

$$\mathbf{grad} \phi = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.5.5)$$

Que es también un vector.

Ahora vamos a determinar la magnitud y dirección de este operador vectorial.

Si sustraemos ϕ_P de ϕ_Q y recordando que la distancia entre ellos es diferencial se obtiene:

$$\phi_P - \phi_Q = d\phi$$

Pero $d\phi = 0$ ya que los puntos ϕ_P y ϕ_Q está localizados sobre una superficie de ϕ constante. Por ello:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi = 0 \quad (2.5.6)$$

Sin embargo, a partir de las ecuaciones (2.5.3) y (2.5.5) se tiene que:

$$\mathbf{grad} \phi \cdot ds = \left(\delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (\delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (2.5.7)$$

Note que el lado izquierdo de la ecuación de la ecuación (2.5.6) es simplemente la ecuación (2.5.7), por lo que:

$$\mathbf{grad} \phi \cdot ds = 0 \quad (2.5.8)$$

Este producto punto representa esencialmente el cambio en ϕ al moverse un ds en la superficie. Se puede concluir a partir de (2.5.8) que el $\mathbf{grad} \phi$ es perpendicular a la superficie de ϕ constante.

Ahora podemos representar el vector diferencial de posición dn que es perpendicular a la superficie de ϕ constante (véase la figura 2.5.2) y que se extiende desde la

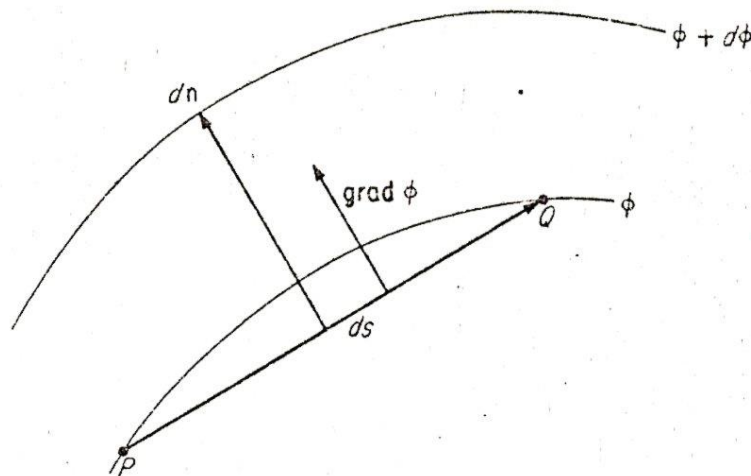


Fig. 2.5.2.

superficie de ϕ a la de $\phi + d\phi$.

$$dn = \delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz \quad (2.5.9)$$

Los componentes del vector son diferenciales ya que dn es también diferencial en magnitud.

Combinando las ecuaciones (2.5.5) y la (2.5.9) tendremos:

$$\mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{n} = \left(\delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (\delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi$$

Debe hacerse notar que este producto punto no es cero, sino que representa el cambio en ϕ al cambiar un $d\mathbf{n}$ desde la superficie ϕ a la superficie $\phi+d\phi$.

De acuerdo con la definición del producto punto.

$$d\phi = \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{n} = |\mathbf{grad} \phi| |d\mathbf{n}| \cos(\mathbf{grad} \phi, d\mathbf{n}) = |\mathbf{grad} \phi| |d\mathbf{n}| \quad (2.5.10)$$

Rearreglando la ecuación (2.5.10) se obtiene:

$$|\mathbf{grad} \phi| = \frac{d\phi}{|d\mathbf{n}|} \quad (2.5.11)$$

A partir de la ecuación anterior (2.5.11) se puede concluir que la magnitud del vector $\mathbf{grad} \phi$ es la rapidez del cambio de ϕ con respecto a un desplazamiento perpendicular desde la superficie de ϕ constante.

Ejemplo 9

Evalúe el gradiente de la temperatura T si :

$$T = 100x + 50xyz^2$$

También calcule la temperatura y el gradiente de temperatura en el punto (1,0,1)

Respuesta:

La Divergencia

$$\text{grad } T = \delta_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial T}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \frac{\partial T}{\partial x} &= \delta_1 \left[\frac{\partial(100x + 50xyz^2)}{\partial x} \right]_{y,z} \\ &= \delta_1(100 + 50yz^2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \frac{\partial T}{\partial y} &= \delta_2 \left[\frac{\partial(100x + 50xyz^2)}{\partial y} \right]_{x,z} \\ &= \delta_2 50xz^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta_3 \frac{\partial T}{\partial z} &= \delta_3 \left[\frac{\partial(100x + 50xyz^2)}{\partial z} \right]_{x,y} \\ &= \delta_3 100xyz \end{aligned} \quad (4)$$

Substituting equations (2)-(4) into equation (1) yields

$$\begin{aligned} \text{grad } T &= \delta_1(100 + 50yz^2) + \delta_2(50xz^2) + \delta_3(100xyz) \\ (\text{grad } T)_{1,0,1} &= \delta_1(100 + 50(0)(1)^2) + \delta_2(50(1)(1)^2) + \delta_3(100(1)(0)(1)) \\ &= 100\delta_1 + 50\delta_2 \\ T_{1,0,1} &= 100(1) + 50(1)(0)(1)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

La Divergencia

El producto punto de un gradiente por un vector \mathbf{V} es un escalar. Esa operación recibe el nombre de divergencia del vector y se indica como:

$\nabla \cdot \mathbf{v}$ o $\text{div } \mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.5.12)$$

Esta operación tiene varias aplicaciones. La divergencia del vector velocidad es una medida del flujo que cruza una superficie y también igual a la rapidez del cambio de la densidad del sistema con respecto al tiempo.

Ejemplo 2.5.2

La densidad ρ y la velocidad \mathbf{v} de un sistema son función de su posición. Demuestre que :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Respuesta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z \\ \rho \mathbf{v} &= \delta_1 (\rho v_x) + \delta_2 (\rho v_y) + \delta_3 (\rho v_z) \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \cdot (\delta_1 \rho v_x + \delta_2 \rho v_y + \delta_3 \rho v_z) \\ &= \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Remembering that

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

and

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &\quad + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ &\quad + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{aligned}$$

But

(1)

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

y

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = (\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z) \cdot \left(\delta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

$$= \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (3)$$

Substituting equations (2) and (3) in equation (1) gives

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

The result of this operation has "split" the position variables ρ and \mathbf{v} .

Curl

El producto cruz del gradiente por un vector \mathbf{v} está definido como el rotacional o Curl de un vector. Esta operación se indica por medio de la notación:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{v}:$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} &= \text{curl } \mathbf{v} \\
&= \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z) \\
&= \delta_1 \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
&\quad + \delta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
&\quad + \delta_3 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

The curl of \mathbf{v} may also be expressed in determinant form:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{2.5.14}$$

Example 2.5.3 The velocity vector of ...

Ejemplo 10

El vector velocidad de un sólido rígido que rota está dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \times \mathbf{r} \tag{2.4.18}$$

en donde \mathbf{V} = el vector de la velocidad angular constante y

$$\mathbf{r} = \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z$$

Evalúe el rotacional de \mathbf{v} .

Respuesta

$$\text{curl o rotacional } \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r}) \tag{1}$$

Defining

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= (\delta_1 V_x + \delta_2 V_y + \delta_3 V_z) \\
\mathbf{V} \times \mathbf{r} &= (\delta_1 V_x + \delta_2 V_y + \delta_3 V_z) \times (\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z) \\
&= \delta_1 (V_y z - V_z y) \\
&\quad + \delta_2 (V_z x - V_x z) \\
&\quad + \delta_3 (V_x y - V_y x)
\end{aligned} \tag{2}$$

Substituting (2) in (1) yields

$$\begin{aligned}
\text{curl } \mathbf{v} &= \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\delta_1 [V_y z - V_z y] \\
&\quad + \delta_2 [V_z x - V_x z] + \delta_3 [V_x y - V_y x]) \\
&= \delta_1 2V_x + \delta_2 2V_y + \delta_3 2V_z \\
&= 2(\delta_1 V_x + \delta_2 V_y + \delta_3 V_z) \\
&= 2\mathbf{V}
\end{aligned} \tag{3}$$

Es importante hacer notar que el rotacional (como su nombre lo indica) de una velocidad es una medida de la rotación del vector velocidad. Se puede concluir que:

Rotacional $v=0$ para un movimiento irrotacional.

Operador de Laplace o Laplaciano

Finalmente evaluaremos el producto punto del gradiente consigo mismo. Esta operación es denominada como laplaciano y es representado por:

$$\nabla^2$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2-5.16)$$

Si un vector puede representarse en términos del gradiente de una función escalar. Como por ejemplo:

$$v = \mathbf{grad} \phi = \nabla \phi$$

Entonces la divergencia del vector se reduce a:

$$\nabla \cdot v = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad (2.5.17)$$

Ejemplo 11

La densidad de un sistema está definida por:

$$\rho = 60 + 0.002 x y + 0.001 y z^2$$

Evalue:

$$\nabla^2 \rho$$

Respuesta:

Solution:

$$\nabla^2 \rho = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (60 + .002 xy + .001 yz^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0.002 y$$

re

Por lo tanto:

$$\nabla^2 \rho = 0 + 0 + 0.002y = 0.002y$$

El operador de Laplace sobre el vector \mathbf{v} da:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 (\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z)$$

Los vectores unitarios, solamente, en coordenadas rectangulares pueden sacarse del operador de manera que :

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \delta_1 \nabla^2 v_x + \delta_2 \nabla^2 v_y + \delta_3 \nabla^2 v_z \quad (2.5.18)$$

También se puede examinar el producto cruz del gradiente con respecto a si mismo. Este es un operador vectorial y está representado por $\nabla \times \nabla$. Si este operador trabaja sobre un escalar ϕ entonces :

$$\nabla \times \nabla \phi = \text{rotacional del gradiente de } \phi \quad (2.5.19)$$

Ejemplo 12

Compruebe que el rotacional del gradiente de ϕ es cero

Respuesta:

$\nabla \times \nabla \phi = \text{rotacional del gradiente de } \phi$

$$\nabla \phi = \delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \delta_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \\ &\quad + \delta_2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \\ &\quad + \delta_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \\ &= \delta_1(0) + \delta_2(0) + \delta_3(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Integración de vectores

En esta sección se presentan algunas de las reglas sobre la integración de vectores y se revisarán las integrales de línea, de superficie y de volumen.

Integral de línea

Las integrales de línea son un buen punto de partida para presentar la integración de

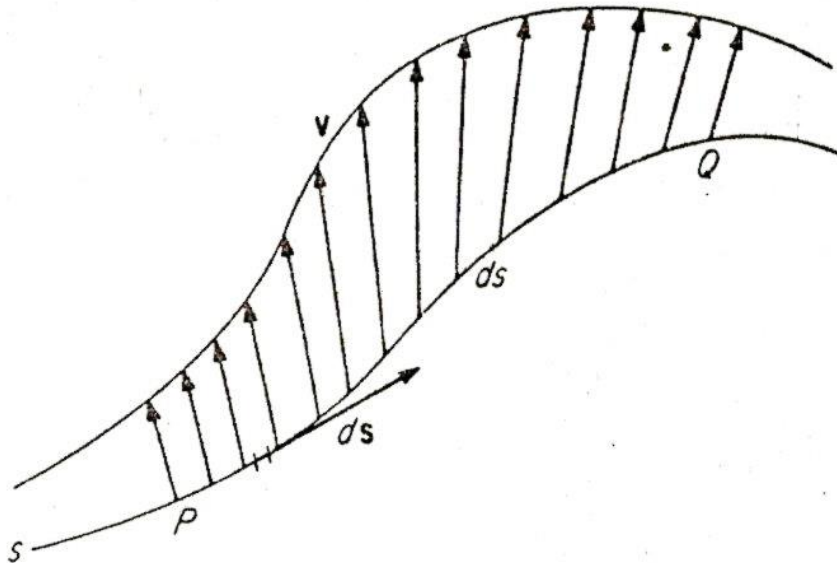


Fig. 2.6.1.

vectores. Consideremos por ejemplo el sistema presentado en la figura 2.6.1.

El vector \mathbf{v} varía en magnitud y dirección en cada punto de la curva \mathbf{s} entre los puntos P y Q. El origen de \mathbf{v} define el paso de la curva \mathbf{s} . Por definición:

$$\int_s \mathbf{v} ds = \delta_1 \int_s v_x ds + \delta_2 \int_s v_y ds + \delta_3 \int_s v_z ds \quad (2.6.1)$$

Y para los límites PQ

$$\int_P^Q \mathbf{v} ds = \delta_1 \int_P^Q v_x ds + \delta_2 \int_P^Q v_y ds + \delta_3 \int_P^Q v_z ds$$

Esta operación Es solamente valida para los vectores unitarios en coordenadas rectangulares. Así que ds se refiere a la magnitud de la longitud ds en cualquier punto a lo largo Del paso PQ. Se define $d\mathbf{s}$ como el vector que tiene una magnitud igual a ds y una dirección que es tangencial a la línea en ds . Entonces el vector $d\mathbf{s}$ es:

$$d\mathbf{s} = \delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz \quad (2.6.3)$$

El producto punto de \mathbf{v} y $d\mathbf{s}$ puede ser evaluado en cada ds . Como una integral representa la suma de los términos diferenciales entonces:

$$\int_P^Q (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) \quad (2.6.4)$$

Calcula las contribuciones de cada $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de P Q. Si se aplica la definición del producto punto a la ecuación (2.6.4) entonces:

$$\int_P^Q (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \int_P^Q |\mathbf{v}| |d\mathbf{s}| \cos(\mathbf{v}, d\mathbf{s}) \quad (2.6.5)$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_P^Q (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) &= \int_P^Q [(\delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z) \cdot (\delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz)] \\ &= \int_P^Q (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \quad (2.6.6) \end{aligned}$$

Nótese que \mathbf{v} y $d\mathbf{s}$ no son necesariamente perpendiculares.

Vamos ahora a evaluar el trabajo W requerido para mover la unidad de masa desde el

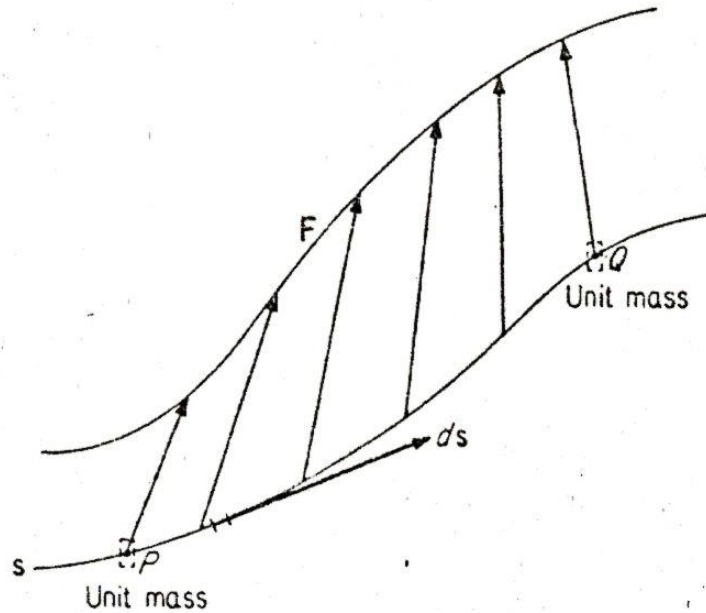


Fig. 2.6.2.

punto P hasta el Q a lo largo del trayecto s (véase la figura 2.6.2).

Se demostró en la sección 2.4 que el trabajo puede ser representado por el producto punto de la fuerza F y del vector del desplazamiento s :

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (2.4.9)$$

Si la fuerza varía a lo largo del trayecto , como se muestra en la figura (2.6.2), el trabajo requerido para desplazarse un ds está dadp por:

$$W_{ds} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6.7)$$

El trabajo total se obtendrá integrado la ecuación (2.6.7) a lo largo de P Q.

$$W = \int_P^Q (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) \quad (2.6.8)$$

La fuerza aplicada que actúa sobre La unidad de masa puede en algunos casos reemplazarse por El gradiente de una cantidad escalar ϕ , por ejemplo $\mathbf{F} = \mathbf{grad} \phi$.

En donde F es una fuerza conservativa. Por ejemplo, \mathbf{F} puede estar haciendo trabajo contra la gravedad. En tales casos se puede demostrar que ϕ es la energía potencial de la unidad de masa y entonces la ecuación (2.6.8) se convierte en:

$$W = \int_P^Q (\mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{s}) = \int_P^Q |\mathbf{grad} \phi| [d\mathbf{s}] \cos(\mathbf{grad} \phi, d\mathbf{s}) \quad (2.6.9)$$

Y también:

$$W = \int_P^Q \left(\delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (\delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz)$$

$$= \int_P^Q \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) \quad (2.6.10)$$

Sin embargo, el integrando de la ecuación (2.6.10) es $d\phi$, así que la ecuación anterior se reduce a:

$$W = \int_P^Q d\phi = \phi_Q - \phi_P \quad (2.6.11)$$

Así que, el trabajo se obtiene a expensas de La energía potencial que se ejerce sobre la unidad de masa. Este resultado está acorde con la primera ley de la termodinámica. Note que este trabajo o cambio en la energía potencial es independiente de la forma en que se mueva de P a Q, ya que si variara con el camino seguido se podría construir una máquina de movimiento perpetuo de primer orden. Se puede, por lo tanto, concluir que:

$$\oint (\mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{s}) = 0 \quad (2.6.12)$$

Em donde \oint representa una integral alrededor de um circuito cerrado.

Ejemplo 13

Calcule El trabajo requerido para mover La unidad de masa Del punto (1,0,0) hasta El punto (2,1,1). El trabajo se efectúa contra la fuerza de gravedad que está dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{32}{\sqrt{2}} \delta_2 - \frac{32}{\sqrt{2}} \delta_3$$

Respuesta

Por definición $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

Y

$$W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}; P = (1,0,0) \text{ and } Q = (2,1,1)$$

$$\mathbf{F} = \frac{32}{\sqrt{2}} \delta_2 - \frac{32}{\sqrt{2}} \delta_3$$

$$d\mathbf{s} = \delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{32}{\sqrt{2}} \delta_2 - \frac{32}{\sqrt{2}} \delta_3 \right) \cdot (\delta_1 dx + \delta_2 dy + \delta_3 dz)$$

$$= \frac{32}{\sqrt{2}} dy - \frac{32}{\sqrt{2}} dz$$

$$W = \int_P^Q \left(\frac{32}{\sqrt{2}} dy - \frac{32}{\sqrt{2}} dz \right)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \frac{32}{\sqrt{2}} dy - \int_{z=0}^{z=1} \frac{32}{\sqrt{2}} dz$$

$$= \frac{32}{\sqrt{2}} - \frac{32}{\sqrt{2}}$$

$$= 0$$

Ya que $W=0$, el vector de desplazamiento \mathbf{s} debe ser perpendicular a el vector de la fuerza gravitatoria \mathbf{F} .

Alternativamente, \mathbf{F} puede ser representado por el **grad** de ϕ , en donde:

$$\phi = \frac{32}{\sqrt{2}}y - \frac{32}{\sqrt{2}}z$$

El trabajo está dado por:

$$W = \phi(1,0,0) - \phi(2,1,1)$$

$$\phi(1,0,0) = 0$$

$$\phi(2,1,1) = \frac{32}{\sqrt{2}} - \frac{32}{\sqrt{2}} = 0$$

Por lo tanto $W = 0$

Integrales de superficie

La integración de un vector \mathbf{v} sobre una superficie con área curvada f se presenta en la ecuación (2.6.13) para coordenadas rectangulares.

$$\iint_f \mathbf{v} \, df = \delta_1 \iint_f v_x \, df + \delta_2 \iint_f v_y \, df + \delta_3 \iint_f v_z \, df \quad (2.6.13)$$

Vamos a emplear esto con una aplicación práctica, Un ejemplo simple es el cálculo del caudal de flujo Q de un fluido que cruza una superficie plana f (véase la figura 2.6.3). El fluido fluye con una velocidad constante \mathbf{v} en f . La magnitud de la velocidad es $|\mathbf{v}|$ y forma un ángulo θ con la normal \mathbf{n} de f . Las unidades del caudal Q son m^3/s .

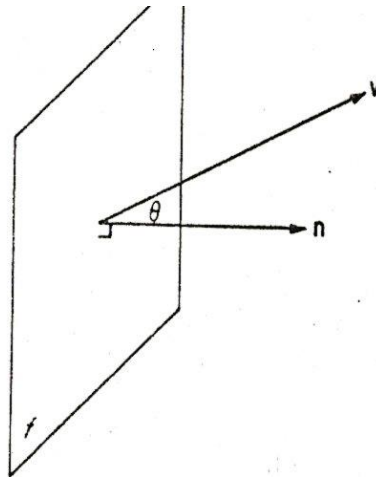


Fig. 2.6.3.

Las unidades de v son m/s y las de la superficie f de m^2 .

El flujo volumétrico está dado por:

$$Q = |\mathbf{v}| f \cos\theta = [\mathbf{v}] f \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \quad (2.6.14)$$

Pero empleando La ecuación (2.6.14) El flujo es simplemente $Q = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})$ (2.6.15)

En donde \mathbf{f} está definida como un vector área que tiene la magnitud f y la dirección de \mathbf{n} . Una situación más general es la que se presenta en la figura 2.6.4. En ella la velocidad \mathbf{v} es una variable que se conoce en cada punto de la superficie f . Como la velocidades una variable , se debe calcular primero el flujo volumétrico en una diferencial $d\mathbf{f}$.

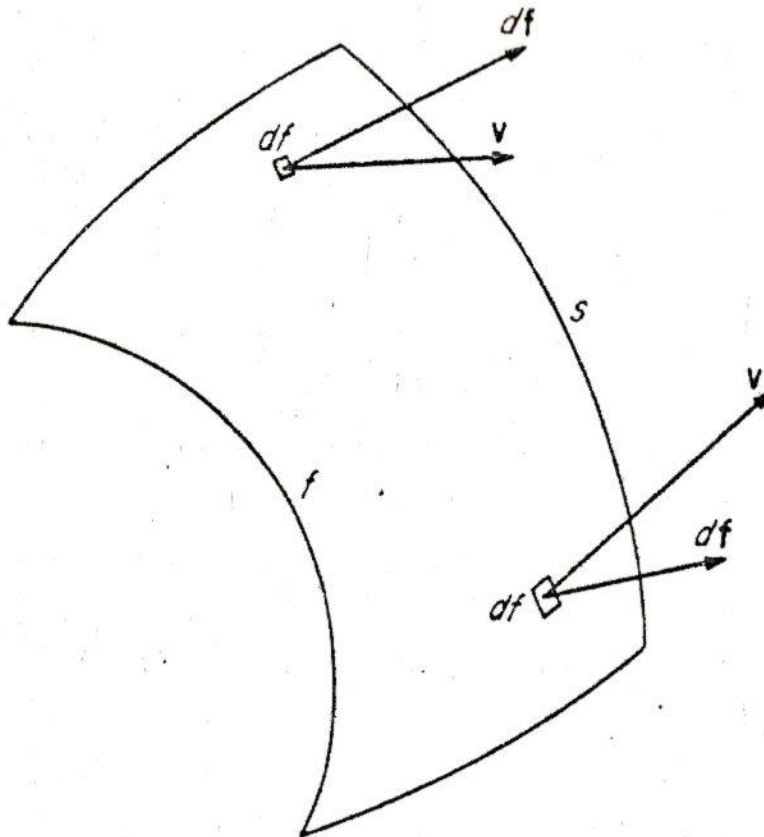


Fig. 2.6.4.

$$Q_{df} = (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) \quad (2.6.16)$$

En la ecuación (2.16.16) se representa el flujo volumétrico Q en un punto de f , la suma de todos los flujos a través de f está dada por:

$$Q = \iint_f (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) \quad (2.6.17)$$

En donde Q es el flujo volumétrico o caudal total del fluido que cruza la superficie f . Si f es una superficie cerrada que rodea a un sistema de volumen \mathcal{V} , la ecuación (2.6.17) representa el flujo volumétrico neto que sale del sistema (ver figura 2.6.5).

$$Q = \iint_f (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) \quad (2.6.18)$$

Se debe hacer notar que $d\mathbf{f}$ se considera positivo si está direccionado hacia afuera del elemento volumétrico. Q en la ecuación (2.6.18) es por lo tanto el flujo neto o caudal que sale del sistema.

Ejemplo 2.6.2

La velocidad y el vector del área en una cierta posición del espacio están dados por:

$$\mathbf{V} = 4\delta_1 - 6\delta_2 + 10\delta_3 \quad ; \quad \mathbf{f} = -\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

Calcule el flujo volumétrico que cruza el área f . Comente los resultados.

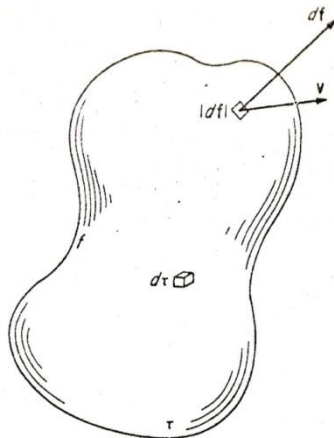


Fig. 2.6.5.

Solution:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \\ &= (4\delta_1 - 6\delta_2 + 10\delta_3) \cdot (-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \\ &= -4 - 6 + 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se puede decir que \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{f} es decir la velocidad fluye paralela a la superficie abierta f y no a través

del área.

Ejemplo 2.6.3

La velocidad de un fluido en un cubo unitario ($0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$) está dada por

$$\mathbf{V} = 10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3 \quad \text{en m/s}$$

Evalúe el flujo volumétrico del fluido que sale del cubo, si x, y, z tienen un metro de largo.

Respuesta:

Por definición.

$$Q = \iint_f (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f})$$

La solución de este problema requiere de La integración sobre las seis superficies del cubo (Fig. 2.6.6).

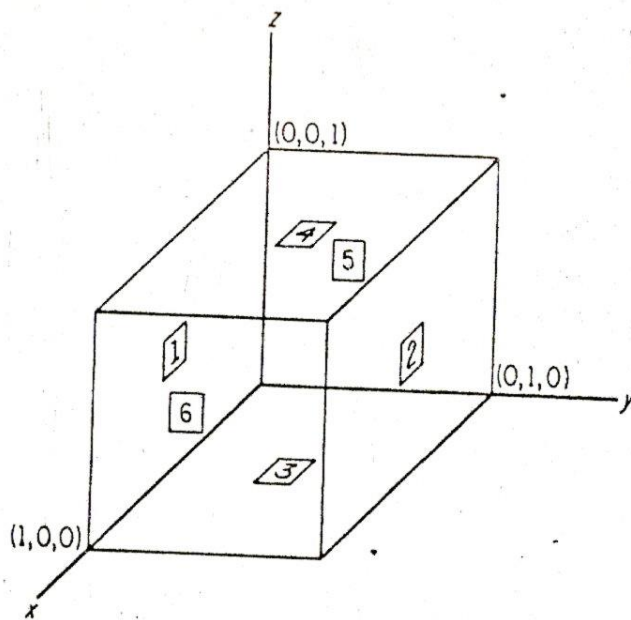


Fig. 2.6.6.

Surface (1)

Surface (1)

xz plane at $y = 0$

$$df = -\delta_2 dx dz$$

$$\begin{aligned} Q_{x,0,z} &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=1} (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (-\delta_2 dx dz) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Surface (2)

xz plane at $y = 1$

$$df = \delta_2 dx dz$$

$$\begin{aligned} Q_{x,1,z} &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=1} (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (\delta_2 dx dz) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Surface (3)

xy plane at $z = 0$

$$df = -\delta_3 dx dy$$

$$\begin{aligned} Q_{x,y,0} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (-\delta_3 dx dy) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Surface (4)

xy plane at $z = 1$

$$d\mathbf{f} = \delta_3 dx dy$$

$$\begin{aligned} Q_{x,y,1} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (\delta_3 dx dy) \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (-5x) dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 (-5x) dx \\ &= -2.5x^2 \Big|_0^1 = -2.5 \end{aligned}$$

Surface (5)

yz plane at $x = 0$

$$d\mathbf{f} = -\delta_1 dy dz$$

$$\begin{aligned} Q_{0,y,z} &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (-\delta_1 dy dz) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Surface (6)

yz plane at $x = 1$

$$d\mathbf{f} = \delta_1 dy dz$$

$$\begin{aligned} Q_{1,y,z} &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (10xy\delta_1 - 5xz^2\delta_3) \cdot (\delta_1 dy dz) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (10y) dy dz \\ &= \int_0^1 10y dy \\ &= \frac{10y^2}{2} \Big|_0^1 = 5 \end{aligned}$$

$$Q_{\text{neto}} = \Sigma Q = -2.5 + 5 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

Integración de vectores

También es posible definir la integración de vectores. La integración del vector \mathbf{v} que actúa en el volumen τ es:

$$\iiint_{\tau} \mathbf{v} d\tau = \delta_1 \iiint_{\tau} v_x d\tau + \delta_2 \iiint_{\tau} v_y d\tau + \delta_3 \iiint_{\tau} v_z d\tau \quad (2.6.19)$$

Para coordenadas rectangulares.

Vamos a presentar dos aplicaciones que requiere de la integración de vectores. Si ρ es la densidad (kg / m^3) de un fluido incompresible contenido en el volumen τ , la masa del fluido M contenida en ese volumen es:

Si ρ es variable en el volumen τ entonces:

$$M = \iiint_{\tau} \rho d\tau \quad (2.6.30)$$

La ecuación anterior sólo se emplea con fluidos compresibles.

Si \mathbf{F} es un vector constante que representa la fuerza por unidad de masa en el volumen, entonces la fuerza actuando sobre el volumen τ está dada por:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{F} \tau$$

En esa ecuación las unidades son:

$$\mathbf{F} = \text{newton}$$

$$\mathbf{F} = \text{newton} / \text{kg}$$

$$\tau = \text{m}^3$$

$$\rho = \text{kg} / \text{m}^3$$

Si ρ y \mathbf{F} varían de punto a punto en el volumen τ , entonces:

$\mathbf{F}_{d\tau} = \rho \mathbf{F} d\tau$ si la fuerza actúa sobre el elemento $d\tau$. La fuerza total que actúa sobre todo el volumen τ será:

$$\mathbf{F} = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau \quad (2.6.21)$$

En donde ρ y \mathbf{F} son los valores locales en cada $d\tau$.

Ejemplo 14

Si la densidad de un fluido en el cubo del ejemplo 2.6.3 está dada por

$$\rho = 60 + 0.002xy + 0.001yz^2 \quad \text{en lb/ft}^3$$

Compute la masa del fluido dentro del cubo.

Respuesta.

Ya que la densidad del fluido dentro del cubo varía con x , y , z la densidad debe integrarse sobre el volumen total para obtener la masa total.

Teorema de la divergencia de Gauss

Este teorema establece que si τ es el volumen encerrado por una superficie f y \mathbf{v} es un vector función de la posición con derivadas continuas entonces:

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau = \iint_f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, df = \oiint_f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Ejemplo 15

Verificar el teorema de Gauss recalculando el flujo volumétrico del ejemplo del cubo.

$$\mathbf{v} = 10xy\boldsymbol{\delta}_1 - 5xz^2\boldsymbol{\delta}_3$$

Respuesta

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (10xy\boldsymbol{\delta}_1 - 5xz^2\boldsymbol{\delta}_3) = \frac{\partial 10xy}{\partial x} - \frac{\partial 5xz^2}{\partial z} = 10y - 10xz$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (10y - 10xz) \, dx dy dz \\ &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \left(10y - \frac{10x^2z}{2} \right) dy dz = \int_{z=0}^1 \left(\frac{10y^2}{2} - \frac{10x^2z}{2} \right) dz \end{aligned}$$

$$Q = \left(\frac{10y^2z}{2} - \frac{10x^2z^2}{4} \right) \Big|_0^1 = 5 - 2.5 = 2.5 \frac{m^3}{s}$$

Ejemplo 16

Una superficie cerrada con área f y volumen τ contiene un vector de posición \mathbf{s} ($\mathbf{s} = \delta_1x + \delta_2y + \delta_3z$) definido dentro de su dominio. Evalúe $\oint_f \mathbf{s} \cdot d\mathbf{f}$ en términos del volumen τ .

Respuesta.

Por El teorema de Gauss

$$\oint_f \mathbf{s} \cdot d\mathbf{f} = \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{s}) d\tau$$

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\delta_1x + \delta_2y + \delta_3z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint_{\tau} 3d\tau = 3\tau$$

Por lo tanto :

$$\oint_f \mathbf{s} \cdot d\mathbf{f} = 3\tau$$

2.7.- Transformación de coordenadas.

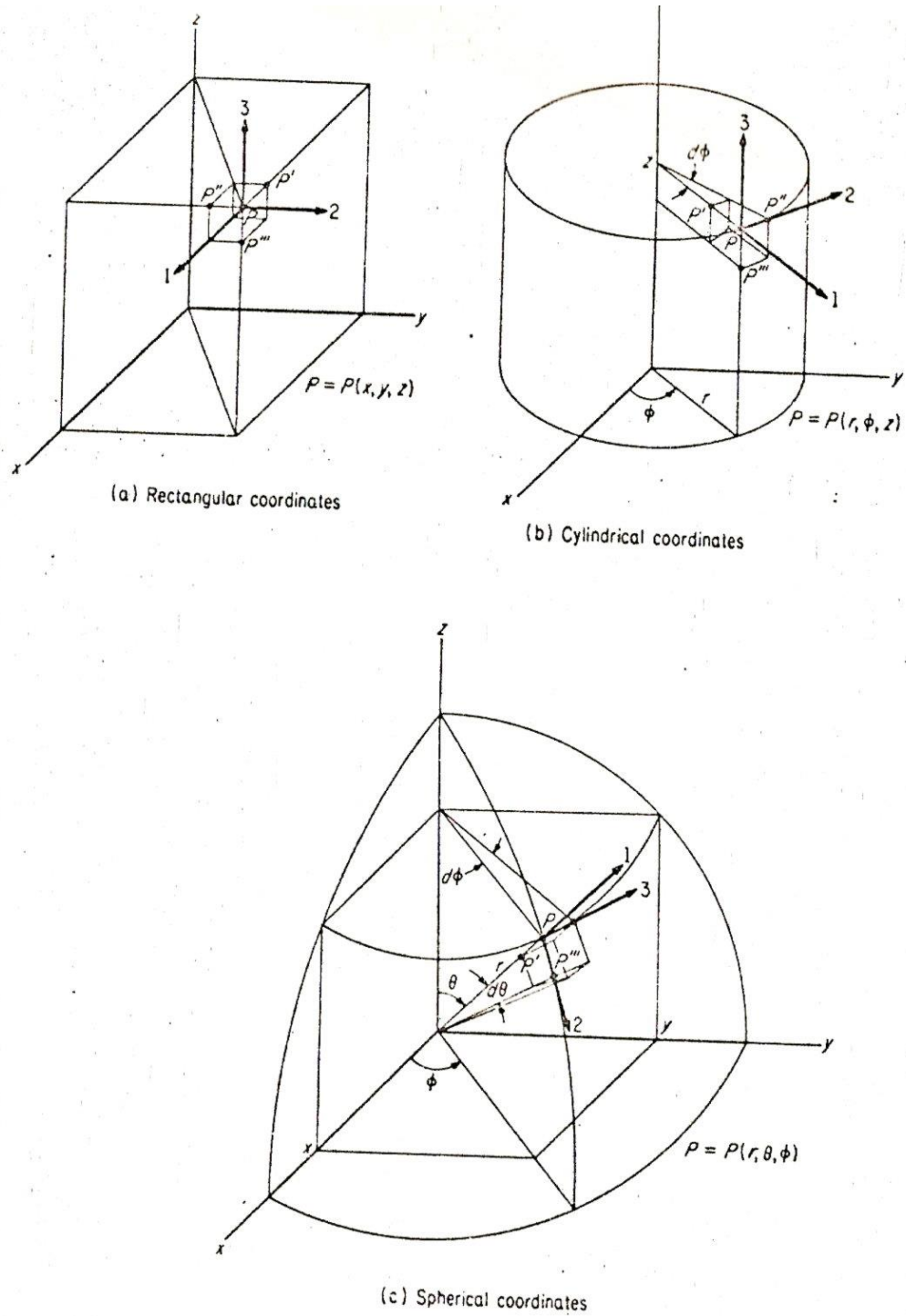


Fig. 2.7.1.

La localización de un punto en el espacio puede ser definida en varios sistemas de coordenadas. Hasta ahora nos hemos restringido al uso de coordenadas rectangulares. Sin embargo, muchas aplicaciones ingenieriles requieren de otro tipo de coordenadas. Por ello vamos a desarrollar los operadores vectoriales en coordenadas

rectangulares, esféricas y cilíndricas. Estas coordenadas se representan en la figura 2.7.1.

Coordenadas rectangulares

El punto P en la figura (2.7.1(a)) está definido en coordenadas rectangulares mediante x, y, z . Las diferenciales en x, y, z están dadas por:

$$ds_1 = PP' = dx$$

$$ds_2 = PP'' = dy$$

$$ds_3 = PP''' = dz \quad (2.7.1)$$

Cualquier longitud diferencial ds en estas coordenadas está dada por:

$$(ds)^2 = (PP')^2 + (PP'')^2 + (PP''')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.7.2)$$

Coordenadas esféricas

El punto P es descrito en coordenadas esféricas por r, Θ y ϕ en la figura 2.7.1 ©. Se puede demostrar que:

$$X = r \cos \Theta \cos \phi$$

$$Y = r \cos \Theta \sin \phi$$

$$Z = r \sin \Theta \quad (2.7.10)$$

Los ejes ortogonales de mano derecha para este sistema de coordenadas son 1,2,3 con vectores unitarios $\delta_r, \delta_\theta, \delta_\phi$ y las longitudes diferenciales en las direcciones r, Θ y ϕ son:

$$ds_1 = PP' = dr$$

$$ds_2 = PP'' = r d\theta$$

$$ds_3 = PP''' = r \sin \theta d\phi \quad (2.7.11)$$

Las ecuaciones de las longitudes diferenciales toman la forma de :

$$(ds)^2 = (PP')^2 + (PP'')^2 + (PP''')^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 \quad (2.7.12)$$

El elemento diferencial del área sobre la superficie curva es:

$$df = (PP'')(PP''') = (rd\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.7.13)$$

Mientras que el elemento de volumen es:

$$d\tau = (PP')(PP'')(PP''') = (dr)(rd\theta)(r \operatorname{sen}\theta d\phi) = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \quad (2.7.14)$$

Ejemplo 17

Evalúe El área de superficial A de una esfera de radio a .

Respuesta:

$$df = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$A = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} df = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta \right] d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta$$

$$A = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta = 2\pi r^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2\pi r^2(1 + 1) = 4\pi r^2$$

Por lo tanto , en una superficie esférica de radio a $A = 4 \pi a^2$.

Un sistema general de coordenadas

Supongamos un sistema generalizado de coordenadas que pueda aplicarse a todos los sistemas de coordenadas incluyendo las rectangulares, las cilíndricas y las esféricas. Para ello tomaremos en cuenta el sistema generalizado de coordenadas presentado en la figura 2.7.2. Los tres ejes 1,2,3 son perpendiculares entre si en el punto P y forman un conjunto de coordenadas dirigidas hacia el lado derecho.

La superficie α representa valores constantes de coordenadas en el eje 1. Las superficies β , γ representan valores constantes de las coordenadas sobre los ejes 2 y 3 respectivamente. La intersección de β y γ define al eje 1. La intersección de α , γ y de α , β forma los ejes 2 y 3. Los vectores unitarios para este sistema son δ_1 , δ_2 , δ_3 . Las longitudes diferenciales a lo largo de los ejes 1,2,3 son ds_1 , ds_2 , ds_3 . Si nos movemos un ds_1 a lo largo del eje 1, el valor de α cambia diferencialmente por un $d\alpha$. Este cambio en $d\alpha$ es proporcional a ds_1 . Se puede representar esto en forma de una ecuación introduciendo el coeficiente de transformación h_1 y tendremos así:

$$d\alpha = h_1 ds_1 \text{ y por lo tanto } d\beta = h_2 ds_2 \text{ y } d\gamma = h_3 ds_3 \quad (2.7.15)$$

Los coeficientes de transformación h_1 , h_2 , h_3 se puede considerar como constantes de proporcionalidad que dependen del sistema de coordenadas. El valor de h_1 , h_2 , h_3 se evalúan en los tres sistemas de coordenadas sustituyendo las ecuaciones (2.7.1), (2.7.6) y (2.7.11) en la ecuación (2.7.15).

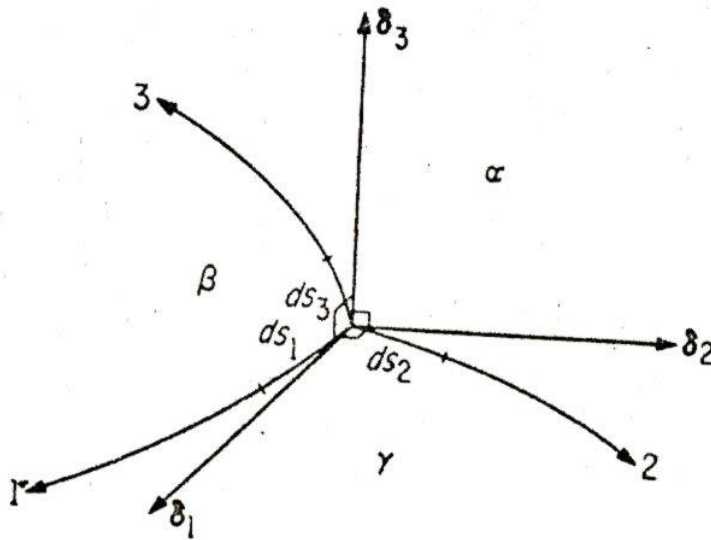


Fig. 2.7.2.

Para las coordenadas cartesianas:

$$h_1=1, h_2=1, h_3=1 \quad (2.7.16)$$

Para las coordenadas cilíndricas se tiene que:

$$h_1=1, h_2=1/r, h_3=1 \quad (2.7.17)$$

Para las coordenadas esféricas:

$$h_1=1, h_2=1/r, h_3=1/(r \sin \theta) \quad (2.7.18)$$

Los resultados anteriores se encuentran tabulados en La tabla (2.7.1)

TABLE 2.7.1
Right-Handed Orthogonal Coordinate Systems

General	Rectangular	Cylindrical	Spherical
α	x	r	r
β	y	ϕ	θ
γ	z	z	ϕ
$d\alpha$	dx	dr	dr
$d\beta$	dy	$r d\phi$	$r d\theta$
$d\gamma$	dz	dz	$d\phi$
ds_1	dx	dr	dr
ds_2	dy	$r d\phi$	$r d\theta$
ds_3	dz	dz	$r \sin \theta d\phi$
h_1	1	1	1
h_2	1	$1/r$	$1/r$
h_3	1	1	$1/r \sin \theta$
δ_1	δ_1	δ_r	δ_r
δ_2	δ_2	δ_ϕ	δ_θ
δ_3	δ_3	δ_z	δ_ϕ
v_1	v_x	v_r	v_r
v_2	v_y	v_ϕ	v_θ
v_3	v_z	v_z	v_ϕ

Ahora se pueden extender esos resultados a los operadores vectoriales descritos en la sección 2.5-. El gradiente F , la divergencia de V , y el $\nabla^2 F$ se presentan sin demostrarlos para el sistema de coordenadas de la figura 2.7.2. F es un escalar y el vector v tiene los componentes v_1, v_2, v_3 .

vector v has components $v_1, v_2,$ and v_3 .

$$\text{grad } \phi = \delta_1 h_1 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \delta_2 h_2 \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \delta_3 h_3 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \quad (2.7.19)$$

$$\text{div } v = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_1}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_2}{h_1 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_3}{h_1 h_2} \right) \right] \quad (2.7.20)$$

$$\begin{aligned} \text{curl } v = & \delta_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_3}{h_3} \right) \right] \\ & + \delta_2 h_1 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_3}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_1}{h_1} \right) \right] \\ & + \delta_3 h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_1}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_2}{h_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

$$\nabla^2 F = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right) \right] \quad (2.7.22)$$

We also showed earlier

$$ds^2 = \left(\frac{d\alpha}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{h_3} \right)^2 \quad (2.7.23)$$

$$df = \left(\frac{d\beta}{h_2} \right) + \left(\frac{d\gamma}{h_3} \right) \quad (2.7.24)$$

$$d\tau = \left(\frac{d\alpha}{h_1} \right) \left(\frac{d\beta}{h_2} \right) \left(\frac{d\gamma}{h_3} \right) \quad (2.7.25)$$

Los resultados de la tabla (2.7.1) se aplican a las ecuaciones (2.7.19) hasta (2.7.25) y se presentan en las tablas 2.7.2 a 2.7.4 para los tres sistemas de coordenadas.

TABLE 2.7.2
Rectangular Coordinate System

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$	(1)
$df_x = dy dz$	(2)
$d\tau = dx dy dz$	(3)
$\text{grad } F = \delta_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial F}{\partial z}$	(4)
$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	(5)
$\text{curl } \mathbf{v} = \delta_1 \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \delta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \delta_3 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$	(6)
$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	(7)

TABLE 2.7.3
Cylindrical Coordinate System

$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\phi)^2 + (dz)^2$	(1)
$df = r d\phi dz$	(2)
$d\tau = r dr d\phi dz$	(3)
$\text{grad } F = \delta_r \frac{\partial F}{\partial r} + \delta_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \delta_z \frac{\partial F}{\partial z}$	(4)
$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	(5)
$\text{curl } \mathbf{v} = \delta_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] + \delta_\phi \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$	(6)
$\quad + \delta_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right]$	(6)
$\nabla^2 F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	(7)

TABLE 2.7.4
Spherical Coordinate System

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 \quad (1)$$

$$df = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2)$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (3)$$

$$\text{grad } F = \delta_r \frac{\partial F}{\partial r} + \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad (4)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{v} = & \frac{\delta_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \delta_\theta \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \delta_\phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad (7)$$

Ejemplo 18

Un vector fuerza F está definido en coordenadas cilíndricas por:

$$\mathbf{F} = \delta_r \left(\frac{2 \cos \phi}{r^2} \right) + \delta_\phi \left(\frac{\text{sen } \phi}{r^3} \right)$$

Evalúe

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{F}$$

Respuesta:

$$F_r = \frac{2 \cos \phi}{r^2} = F_r(r, \phi)$$

$$F_\phi = \frac{\text{sen } \phi}{r^3} = F_\phi(r, \phi)$$

$$F_z = 0$$

Si se aplica La ecuación (5) en la tabla 2.7.3, se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2 \cos \phi}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sin \phi}{r^3} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left(-\frac{4 \cos \phi}{r^3} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \phi}{r^3} \right) = -\frac{\cos \phi}{r^4} + \frac{\cos \phi}{r^4} = -3 \frac{\cos \phi}{r^4}$$

Para evaluar el rotacional de F se aplicará la ecuación (6) de la Tabla 2.7.3:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \delta_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right] + \delta_\phi \left[\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right] + \delta_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right] \\ &= \delta_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \phi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{2 \cos \phi}{r^3} \right) \right] \\ &= \delta_z \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{2 \sin \phi}{r^3} \right) - \frac{1}{r} \left(-\frac{2 \sin \phi}{r^3} \right) \right] \\ &= \delta_z \left[-\frac{2 \sin \phi}{r^4} + \frac{2 \sin \phi}{r^4} \right] \\ &= \delta_z (0) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 20

Demuestre mediante la sustitución que la función densidad $\rho = \frac{\cos \theta}{r^2}$ obedece La ecuación de Laplace $\nabla^2 \rho = 0$ en coordenadas esféricas.

Respuesta. Se puede aplicar la ecuación (7) de la Tabla 2.7.4. Como ρ no es una función de ϕ el último término de $\nabla^2 \rho = 0$ no necesita ser evaluado.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \right] + 0 = 0 \\ &= \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-\frac{2}{r^3} \right) \right] + \frac{1}{r^4 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [-\sin^2 \theta] \\ &= \frac{2 \cos \theta}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^4 \sin \theta} (-2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{2 \cos \theta}{r^4} - \frac{2 \cos \theta}{r^4} = 0 \end{aligned}$$

Valores promedio de las funciones

En esta sección se introduce el concepto de valor promedio de una función. Si el término F es una función de la posición y del tiempo ,

$$F = F(x, y, z, t) , \text{ o } F = F(r, \phi, z, t) , \text{ o } F = F(r, \theta, \phi, t) \quad (2.8.1)$$

El valor promedio de F se definirá como $\langle F \rangle$. La ecuación empleada para calcular $\langle F \rangle$ sobre los intervalos de tiempo , una línea, una superficie o un volumen se define más abajo.

El valor promedio de F sobre un intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$ está definido por:

$$\langle F \rangle = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F dt}{\int_{t_0}^{t_1} dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F dt}{t_1 - t_0} \quad (2.8.2)$$

Ejemplo 21

La velocidad de una partícula en un flujo turbulento durante El intervalo de tiempo $0 < t < 3/2$ está dado por:

$$|v| = 17.1 + 1.2 \text{ sen } t$$

Determine La velocidad promedio de La partícula durante ese intervalo.

Respuesta

Sea $\langle |v| \rangle$ el valor promedio de $|v|$. Entonces:

$$\langle |v| \rangle = \frac{\int_0^{3/2} |v| dt}{\int_0^{3/2} dt} = \frac{\int_0^{3/2} (17.1 + 1.2 \text{ sen } t) dt}{\int_0^{3/2} dt} = \frac{[17.1 t - 1.2 \cos t]_0^{3/2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{17.1 \left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 - 2}{\frac{3\pi}{2}} = 17.355$$

El valor promedio de F sobre una línea curva s de longitud l es:

$$\langle F \rangle = \frac{\int_s F ds}{\int_s ds} = \frac{\int_s F ds}{l} \quad (2.8.3)$$

El valor medio de F sobre la superficie f con área A es:

$$\langle F \rangle = \frac{\iint_f F df}{\iint_f df} = \frac{\iint_f F df}{A} \quad (2.8.4)$$

Finalmente, el promedio del valor de F en el volumen τ está dado por:

$$\langle F \rangle = \frac{\iiint_{\tau} F d\tau}{\iiint_{\tau} d\tau} = \frac{\iiint_{\tau} F d\tau}{V} \quad (2.8.5)$$

Generalmente el valor promedio de una función de F dependiente de § está dado por:

$$\langle F \rangle = \frac{\int F d\§}{\int d\§}$$

Ejemplo 22

La velocidad de un fluido en un cilindro horizontal de radio R se representa en coordenadas cilíndricas por la ecuación:

$$v = \delta_z 100 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]; \text{ en m/s}$$

Calcule la velocidad promedio del fluido que se mueve dentro del cilindro..

Respuesta.

Basándonos en el enunciado del problema

$$v = 100 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

La velocidad v_z varia en el área seccional del cilindro f . Un elemento diferencial en esta sección transversal del área estará dado por:

$$df = (r)(dr)(d\phi)$$

Por definición:

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\iint_f v_z df}{\iint_f df} \\ \langle v_z \rangle &= \frac{\iint_f v_z df}{\iint_f df} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \left[100 - 100 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi} = 2\pi \frac{\int_0^R \left[100r - 100 \frac{r^3}{R^2} \right] dr}{\pi R^2} \\ &= 2\pi \frac{\left[50r^2 - \frac{25r^4}{R^2} \right]_0^R}{\pi R^2} = 2\pi \frac{(50R^2 - 25R^2)}{\pi R^2} = 50 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Ejemplo 23

Calcule la densidad promedio del fluido descrito en el ejemplo 2.6.5.

Respuesta. La densidad promedio está definida por:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\iiint_{\tau} \rho d\tau}{\iiint_{\tau} d\tau}$$

$$d\tau = dx dy dz$$

$$\rho = 60 + 0.002xy + 0.001yz^2$$

Así que.

$$\langle \rho \rangle = \frac{\iiint_0^l (60 + 0.002xy + 0.001yz^2) dx dy dz}{\iiint_0^l dx dy dz} = \frac{60.000667}{1} = 60.000667 \frac{lb}{ft^3}$$

Note que este resultado podría haber sido obtenido a partir de la solución del ejemplo 2.6.5.

Ejemplo 24

La temperatura T en una esfera sólida de radio a está dada por $T = 100 r^2$. Obtenga la temperatura promedio de la esfera.

Respuesta

$$\langle T \rangle = \frac{\iiint_{\tau} T d\tau}{\iiint_{\tau} d\tau}$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$T = 100 r^2$$

Los límites de la integración deben ser cuidadosamente escogidos para asegurar que $d\tau$ llene todo el elemento de volumen.

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a (100r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 20a^5 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi \frac{a^3}{3}}$$

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} 40a^5 d\phi}{4\pi \frac{a^3}{3}} = \frac{80\pi a^5}{4\pi \frac{a^3}{3}} = 60a^2$$

2.9. Tensores

Un tensor de rango dos está definido como un tensor y está representado en un sistema dado de coordenadas por n^2 componentes escalares, en donde n es el número de coordenadas en el sistema. Cada componente escalar se caracteriza por dos subíndices , i , j , cada uno de los cuales puede asumir el valor $1,2,\dots,n$. por lo tanto, un tensor tiene nueve componentes en un sistema de tres coordenadas. El tensor τ está representado por:

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{2,3} \\ \tau_{3,1} & \tau_{3,2} & \tau_{3,3} \end{pmatrix} \quad (2.9.1)$$

Hablando con propiedad El signo de igualdad de la ecuación (2.9.1) no es válido. Esta y las otras ecuaciones de tensores que se emplearán debe leerse como que τ es descrito por los siguientes componentes escalares. Además , debe notarse que la ecuación (2.9.1) no es un determinante. La ecuación (2.9.1) se reduce a la ecuación (2.9.2) en coordenadas rectangulares.

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} \tau_{x,x} & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \tau_{y,y} & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \tau_{z,z} \end{pmatrix} \quad (2.9.2)$$

Consideremos por ejemplo , una cantidad Δ que mide el cambio de la velocidad con la posición en coordenadas rectangulares. El vector velocidad se definió previamente como:

$$\mathbf{v} = \delta_1 v_x + \delta_2 v_y + \delta_3 v_z$$

El cambio en la velocidad con respecto a la posición está dado por las derivadas de los componentes v_x , v_y , v_z con respecto a las variables de posición , x , y , z .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dx} \\ \frac{dv_x}{dy} \\ \frac{dv_x}{dz} \end{array} \right\} \text{change in } v_x \text{ with } x, y, \text{ and } z$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dv_y}{dx} \\ \frac{dv_y}{dy} \\ \frac{dv_y}{dz} \end{array} \right\} \text{change in } v_y \text{ with } x, y, \text{ and } z$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dv_z}{dx} \\ \frac{dv_z}{dy} \\ \frac{dv_z}{dz} \end{array} \right\} \text{change in } v_z \text{ with } x, y, \text{ and } z$$

La cantidad Δ ES un tensor, y está representada en términos de sus nueve componentes escalares en la ecuación (2.9.3).

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dx} & \frac{dv_y}{dx} & \frac{dv_z}{dx} \\ \frac{dv_x}{dy} & \frac{dv_y}{dy} & \frac{dv_z}{dy} \\ \frac{dv_x}{dz} & \frac{dv_y}{dz} & \frac{dv_z}{dz} \end{pmatrix} \quad (2.9.3)$$

El producto del vector \mathbf{v} por el vector \mathbf{w} es también un tensor. Este tensor se representa sin ningún signo de multiplicación entre los vectores

\mathbf{vw}

Los componentes de este tensor en coordenadas rectangulares están dados por:

$$\mathbf{vw} = \begin{pmatrix} v_x w_x & v_x w_y & v_x w_z \\ v_y w_x & v_y w_y & v_y w_z \\ v_z w_x & v_z w_y & v_z w_z \end{pmatrix} \quad (2.9.4)$$

Los teoremas de Stokes y de Gauss que se revisaron en la sección 2.6 involucran operaciones vectoriales. El teorema de Gauss (Ecuación 2.6.23) puede extenderse a las operaciones escalares y tensoriales.

$$\oint_f \phi df = \iiint_\tau \nabla \phi d\tau \quad (2.9.5)$$

$$\oint_f \mathbf{vw} \cdot d\mathbf{f} = \iiint_\tau (\nabla \cdot \mathbf{vw}) d\tau \quad (2.9.6)$$

$$\oint_f \Delta \cdot d\mathbf{f} = \iiint_\tau (\nabla \cdot \Delta) d\tau \quad (2.9.7)$$

Por definición el producto punto de un tensor y un vector (ecuaciones (2.9.6) y (2.9.7)) son un vector.

Transferencia de momento

El momento de un sistema está definido como:

Momento = masa x velocidad

Las unidades del momento serán por lo tanto kgm/s o lb ft /sec.

La velocidad de transferencia de momento es:

Velocidad de transferencia de momento = momento / s . Y las unidades serán:

Velocidad de transferencia de momento = kg m /s^2 o lb ft/sec^2

La constante llamada g_c es igual a :

$$g_c = 9.81 \frac{N}{kg} = 9.81 \frac{kgm}{s^2 kg}$$

En el sistema inglés

$$g_c = 32.2 \frac{lb ft}{sec^2 lb}$$

Así que dividiendo entre g_c obtendremos:

$$\text{Velocidad del momento} = \frac{\frac{kg m}{s^2}}{\frac{kg m}{s^2 kg}} = \overline{kg} \quad , \text{ también } \overline{lb} \quad (3.2.1)$$

Se puede concluir a partir del análisis efectuado que la fuerza es equivalente a la velocidad o rapidez con que se transfiere el momento.

Ley de la viscosidad de Newton

Consideremos un fluido que está confinado entre dos placas horizontales e infinitas separadas por una distancia h . El flujo es a régimen permanente y solamente en la

70

Momentum Transfer

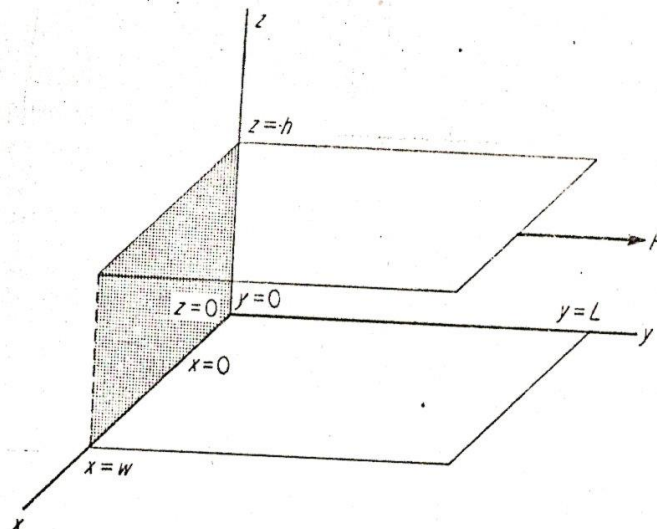


Fig. 3.2.1.

dirección y. parte del sistema es el presentado en la figura 3.2.1.

Se aplica sobre este sistema una fuerza F , la cual se ejerce sobre la placa superior a $z = h$ para mantenerla en movimiento con una velocidad $v_y = V_h$. Si el fluido tiene una densidad constante y el flujo es isotérmico y laminar, se obtendrá un gradiente lineal de velocidad en la representación bidimensional de la figura 3.2.2. Se ha demostrado experimentalmente que se requiere aplicar una fuerza por unidad de área F/A para mantener la placa superior en movimiento con la velocidad V_h .

$$\frac{F}{A} \propto \frac{V_h}{h}$$

En una forma más general se puede escribir:

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\Delta v_y}{\Delta z} \quad (3.2.2)$$

La diferencia Δ puede sustituirse aplicando la ecuación (3.2.2) a un ancho diferencial dz :

$$\frac{F}{A} \propto \frac{dv_y}{dz} \quad (3.2.3)$$

Si se sustituye el signo de proporcionalidad \propto por una constante $-\mu$ la ecuación quedaría como:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{dv_y}{dz}$$

El término μ ha sido definido como el coeficiente de la viscosidad, o simplemente la viscosidad del fluido. El término F/A es el esfuerzo cortante, ya que F se ejerce paralelamente a la dirección del movimiento. Esta fuerza aplicada por unidad de área se designa como τ_{zy} .

$$\tau_{zy} = -\mu \frac{dv_y}{dz} \quad (3.2.4)$$

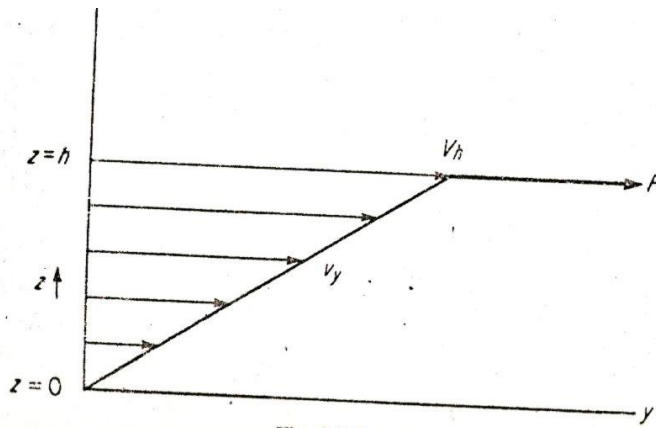


Fig. 3.2.2.

Un fluido cuyo esfuerzo cortante es descrito por la ecuación (3.2.4) se define como fluido newtoniano.

La fuerza aplicada a $z=h$ da como resultado una velocidad V_h a $z=h$. El fluido en ese punto posee momento debido a esa velocidad. Al decrecer z decrece el momento del fluido ya que la velocidad disminuye. Se ha mostrado que la fuerza aplicada a un fluido es equivalente al momento que recibe, parte de ese momento se transfiere a una rapidez específica hacia la capa de fluido que está debajo de él. Este momento mantiene la velocidad del fluido en ese punto y es entonces transportado al fluido más lento que está debajo de él y así sucesivamente. Esta transferencia de momento se lleva a cabo en la dirección z . Podemos entonces decir que al aplicar una fuerza en la dirección positiva y produce una transferencia de momento en la dirección z , por eso se coloca el primer subíndice en τ_{zy} como recordatorio de este hecho. El subíndice y indica la dirección del movimiento. El signo negativo en la ecuación (3.2.4) indica que el momento se transfiere en la dirección z negativa debido a un gradiente positivo de velocidad. Este mecanismo de transferencia de momento es conocido como difusión molecular. El análisis anterior se ha presentado para un sistema simple, por lo general, un fluido en movimiento posee tres componentes de velocidad con tres gradientes correspondientes de velocidad en un sistema de coordenadas. En este caso se obtienen 9 términos de esfuerzo cortante en cada punto descrito por coordenadas rectangulares. Estos nueve escalares se pueden representar mediante un tensor del esfuerzo cortante.

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} \tau_{x,x} & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \tau_{y,y} & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \tau_{z,z} \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

La fuerza por unidad de área τ es equivalente a la velocidad a la que se transfiere el momento por unidad de área, por lo tanto, el tensor del esfuerzo cortante τ y sus componentes están definidos también como un flux de momento.

Si vamos de nuevo al componente τ_{zy} del esfuerzo cortante y dividimos la ecuación (3.2.4) por g_c entonces obtenemos:

$$\tau_{zy} = -\frac{\mu}{gc} \frac{dv_y}{dz} \quad (3.2.6)$$

Si τ_{zy} tiene las unidades de $\frac{kg}{m^2}$ o de $\frac{lb}{ft^2}$, la viscosidad μ tendrá las unidades de $\frac{kg}{m \cdot s}$ o de $\frac{lb}{ft \cdot sec}$.

Un término que se empleará muy frecuentemente es el de la viscosidad cinemática ν la que está definida como el cociente de la viscosidad a la densidad del fluido.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Las unidades de ν son $\frac{m^2}{s}$ o $\frac{ft^2}{sec}$.

Todos los componentes del tensor de esfuerzo cortante τ para un fluido newtoniano puede ser expresados en términos de la viscosidad del fluido y del gradiente de velocidades, esto se presenta, aunque no se deriva, en la tabla 3.2.1 para las coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Las ecuaciones son aplicable a todos los fluidos no newtonianos si: el sistema es isotérmico, el flujo es laminar, el

TABLE 3.2.1
Shear-Stress Components

Component	Rectangular Coordinates	Cylindrical Coordinates	Spherical Coordinates
τ_{11}	$\tau_{xx} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right]$	$\tau_{rr} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right]$	$\tau_{rr} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right]$
τ_{12}	$\tau_{xy} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$	$\tau_{r\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \right]$	$\tau_{r\theta} = -\frac{\mu}{gc} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right]$
τ_{13}	$\tau_{xz} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$	$\tau_{rz} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$	$\tau_{r\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]$
τ_{21}	$\tau_{yx} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$	$\tau_{\phi r} = -\frac{\mu}{gc} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \right]$	$\tau_{\theta r} = -\frac{\mu}{gc} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right]$
τ_{22}	$\tau_{yy} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right]$	$\tau_{\phi\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) \right]$	$\tau_{\theta\theta} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right]$
τ_{23}	$\tau_{yz} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$	$\tau_{\phi z} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \right]$	$\tau_{\theta\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \right]$
τ_{31}	$\tau_{zx} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$	$\tau_{zr} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$	$\tau_{\phi r} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]$
τ_{32}	$\tau_{zy} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$	$\tau_{z\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \right]$	$\tau_{\theta\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \right]$
τ_{33}	$\tau_{zz} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]$	$\tau_{zz} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]$	$\tau_{\phi\phi} = -\frac{\mu}{gc} \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \right]$

fluido tiene una densidad constante.

Ejemplo 3.2.1

Un fluido de viscosidad μ fluye en la dirección y entre dos placas horizontales paralelas e infinitas. El perfil de velocidades del fluido está dado por:

$$v_y = V \left(\frac{z}{h} - z^2 \right) \text{ en donde } V \text{ y } h \text{ son constantes.}$$

Calcule el esfuerzo cortante en la superficie $Z = 0$ en términos de μ , V , h .

Respuesta

Este problema se resuelve usando coordenadas rectangulares. Se debe hacer notar que v_x y v_z son iguales a cero y que v_y es sólo función de z . A partir de la tabla 3.2.1.

$$\tau_{zy} = -\frac{\mu}{gc} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = -\frac{\mu}{gc} \frac{dv_y}{dz}$$

Ya que v_y solo depende de z .

$$v_y = V \left(\frac{z}{h} - z^2 \right)$$

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{V}{h} - 2Vz$$

$$-\mu \frac{dv_y}{dz} = 2\mu Vz - \frac{V\mu}{h}$$

El esfuerzo cortante en la superficie $z=0$ es:

$$\tau_{zy} \Big|_{z=0} = \frac{\mu}{gc} \left[2v(0) - \frac{V}{h} \right] = -\mu \frac{V}{gch}$$

Fluidos no newtonianos

Los fluidos que no obedecen la ecuación de la viscosidad de Newton son llamados fluidos no- newtonianos y existen varios tipos de estos. La ecuación del esfuerzo cortante equivalente a la ecuación (3.2.6) para los fluidos no newtonianos más comunes está dada por la ecuación de la ley de las potencias.

$$\tau_{zy} = -\frac{K}{gc} \left(\frac{dv_y}{dz} \right)^n \quad (3.2.7)$$

El parámetro K es el número de consistencia y puede en casos especiales ser igual a μ . El exponente n es el índice de comportamiento del fluido y es un número real que generalmente tiene un valor diferente a la unidad. La ecuación 3.2.7 puede ser escrita en términos de la viscosidad aparente μ_a para los fluidos no newtonianos.

$$\frac{\mu_a}{gc} = -\frac{\tau_{zy}}{\left(\frac{dv_y}{dz}\right)}$$

$$\text{O } \mu_a = K \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^{n-1} \quad (3.2.8)$$

Para evitar el problema que se suscita cuando el gradiente de velocidades es negativo , la ecuación 3.2.7 se puede reescribir como:

$$\tau_{zy} = -\frac{K}{gc} \frac{dv_y}{dx} \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^{n-1} \quad (3.2.9)$$

Una curva típica que muestra el comportamiento de un fluido no newtoniano es la que se presenta en la figura 3.2.3. Debido a la naturaleza exponencial del esfuerzo cortante en este tipo de fluidos no newtonianos , se puede obtener una línea recta en una gráfica log- log.

$$\tau_{zy} = -\frac{K}{gc} \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^n \quad (3.2.7)$$

$$\log \tau_{zy} = -\log \left(\frac{K}{gc}\right) + n \log \left(\frac{dv_y}{dz}\right)$$

Se puede ver que un fluido newtoniano dará una pendiente de 1 en coordenadas log-log, mientras que la pendiente de un fluido no newtoniano diferirá de la unidad.

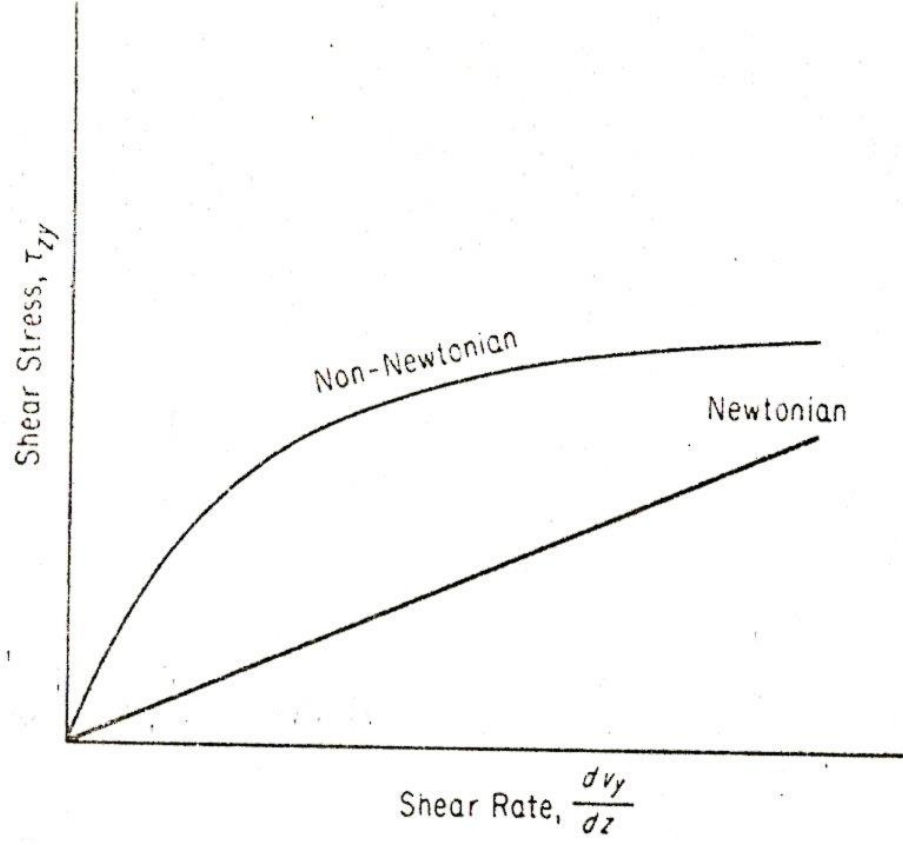


Fig. 3.2.3.

Ecuación de continuidad

La ecuación de la continuidad describe la variación de la densidad con la posición y el tiempo en un fluido estacionario o en movimiento. La ecuación de la continuidad se desarrolla aplicando la ley de la conservación de la masa a un elemento fijo de volumen para un fluido que tiene un solo componente y una sola fase. Consideremos por ejemplo, un elemento finito de volumen τ con superficie f (véase la figura 3.3.1) a través de la cual un fluido que tiene un solo componente y una sola fase se mueve. El vector

76

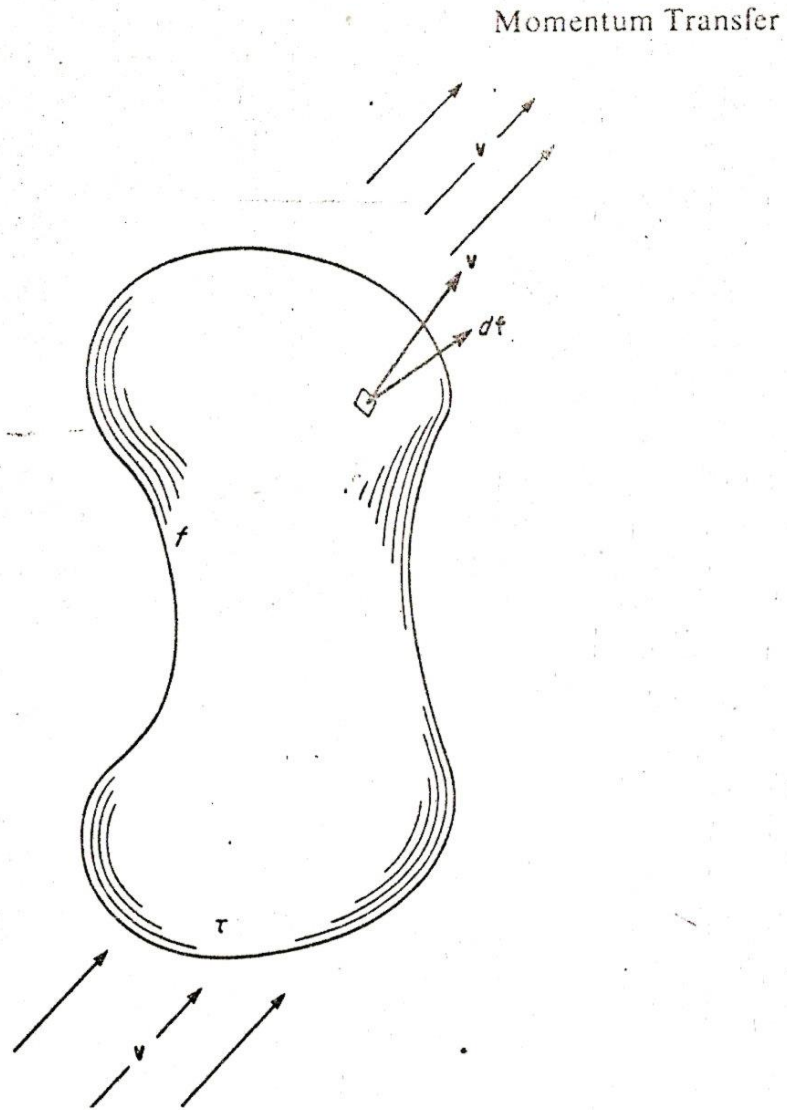


Fig. 3.3.1.

velocidad v y la densidad del fluido ρ están definidos en cada punto del sistema incluida la superficie. La ley de la conservación de la masa para este volumen será:

$$\{Masa\ entrante\} - \{masa\ saliente\} + \left\{ \begin{matrix} masa \\ generada \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} masa \\ acumulada \end{matrix} \right\}$$

Esta ecuación puede también escribirse en términos de un flujo.

$$\left\{ \begin{matrix} velocidad \\ a\ la\ que\ entra \\ la\ masa\ en\ el\ sistema \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} velocidad \\ a\ la\ que\ sale \\ la\ masa\ en\ el\ sistema \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} velocidad \\ a\ la\ que\ se \\ genera\ la\ masa \\ en\ el\ sistema \end{matrix} \right\} \\ = \left\{ \begin{matrix} velocidad \\ a\ la\ que\ se \\ acumula\ masa \\ en\ el\ sistema \end{matrix} \right\} \quad (3.3.1)$$

Procederemos ahora a evaluar los términos de la ecuación (3.3.1)

Los términos de velocidad entrante y velocidad saliente representan el flujo neto de masa en el sistema. El flujo de masa que escapa por una diferencial de área df está dado por:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.3.2)$$

El vector velocidad en ese punto es \mathbf{v} y $d\mathbf{f}$ es la diferencial positiva del área vector perpendicular a la superficie y dirigido hacia afuera del volumen. Las unidades de la ecuación (3.3.2) son m^3/s si \mathbf{v} está dada en m/s y f en m^2 . Si se multiplica la ecuación anterior por la densidad del fluido ρ en kg/m^3 se obtiene:

$$\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.3.3)$$

que tiene las unidades de kg/s . Ese término representa la masa que fluye o flujo másico saliente de df . Si se integra la ecuación (3.3.3) sobre toda la superficie se obtendrá el flujo neto saliente del sistema.

$$+ \oint_f \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

El flujo neto que entra al sistema estará dado por :

$$- \oint_f \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.3.4)$$

El término de generación de la masa en el volumen τ se produce si hay una reacción química o nuclear. Si no hay reacción el término vale cero.

El término de la masa acumulada mide los cambios dentro del sistema. Si $d\tau$ (m^3) es un elemento diferencial del volumen τ entonces:

$\rho d\tau$ representa los kilogramos contenido en $d\tau$. Ella velocidad de cambio de cualquier cantidad con respecto al tiempo en un punto dado del espacio está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

La rapidez del cambio de la masa en $d\tau$ es entonces:

$$\frac{\partial(\rho d\tau)}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau \quad (3.3.5)$$

La rapidez del cambio de la masa en τ se obtiene integrando la ecuación (3.3.5) a través de todo el volumen.

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau \quad (3.3.6)$$

El termino anterior es positivo si la masa se acumula y negativo si desaparece la masa en el sistema.

Sustituyendo las ecuaciones (3.3.4) y (3.3.6) en la ecuación (3.3.1) da:

$$-\oint_f \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \iiint_{\tau} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau \quad (3.3.7)$$

Esta ecuación no es dimensionalmente consistente. El lado izquierdo de la ecuación se puede convertir en una integral de volumen aplicando el teorema de Gauss.

$$-\oint_f \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) d\tau$$

Entonces la ecuación (3.3.7) se convierte en:

$$\iiint_{\tau} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) d\tau + \iiint_{\tau} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau = 0 \quad (3.3.8)$$

Se puede demostrar que la suma de los integrandos de los términos de la ecuación (3.3.8) son cero si ρ , v y sus derivadas son continuos en τ .

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3.9)$$

Esta es una de las formas de la ecuación de la continuidad y mide la rapidez de cambio de la densidad con respecto al tiempo en un punto fijo del sistema. La ecuación anterior puede ser escrita en una forma distinta ya que:

$$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v \quad (3.3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3.10) en la ecuación (3.3.9) nos da:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3.11)$$

La derivada de Stokes se define como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Que también se puede representar por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

La ecuación (3.3.11) puede entonces reescribirse como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3.12)$$

Esta es una segunda forma de presentar la ecuación de la continuidad la que mide la rapidez de cambio de la densidad en un fluido no estacionario moviéndose con un velocidad \mathbf{v} . Ambas ecuaciones (3.3.9) y (3.3.12) se reducen a :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3.13)$$

para un sistema en el cual la densidad del fluido es constante.

Por conveniencia desde ahora consideraremos densidad constante como incompresibilidad. Un fluido incompresible es aquel que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La ecuación de la continuidad ha sido desarrollada en forma vectorial es por lo tanto, independiente de las coordenadas empleadas. Se puede expandir la ecuación vectorial (3.3.9) y (3.3.13) en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Los resultados se presentan en las tablas (3.3.1) y (3.3.2).

TABLE 3.3.1
Equation of Continuity for Compressible Fluids; Eq. (3.3.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$$

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1)$$

Cylindrical coordinates (r, ϕ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2)$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (3)$$

TABLE 3.3.2
Equation of Continuity for Incompressible Fluids; Eq. (3.3.13)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Cylindrical coordinates (r, ϕ, z) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Ejemplo 3.3.1

La velocidad de un fluido incompresible en un sistema a régimen permanente está dirigida a lo largo del eje y en coordenadas rectangulares. Demuestre que la velocidad no es función de y.

Respuesta.

Para un fluido incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

A partir de La ecuación (1) de La Tabla 3.3.2

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Se puede concluir a partir del enunciado del problema que:

$v_x = 0$, $v_z = 0$ por lo tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{ya que } v_x = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ya que } v_z = 0$$

Entonces resulta que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Si v_y es una función de y entonces $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ no puede ser igual a cero. Se concluye que la velocidad no es una función de y.

Ejemplo 3.3.2

El perfil de velocidad de un fluido está dado por:

$$\mathbf{v} = x^2 z \delta_1 - 12z \delta_2 - xz^2 \delta_3$$

¿Es el fluido incompresible?

Respuesta

A partir de La ecuación (1) de la tabla 3.3.2

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ (1) debería ser cero si El fluido fuera incompresible.. A partir de los datos:

$v_x = x^2 z$; $v_y = -12z$, $v_z = -xz^2$ y además:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2xz$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -2xz$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2xz - 2xz = 0$$

Por lo tanto el fluido es incompresible.

Ecuación de la transferencia de momento

Vamos a derivar la ecuación de la transferencia de momento, también llamada la ecuación de movimiento en forma vectorial. Esta ecuación diferencial describe la distribución de la velocidad y la presión en un fluido en movimiento y se deriva, a partir de la definición de momento y aplicando un balance de fuerzas y la segunda ley de Newton a un elemento finito de volumen.

Consideremos un elemento finito de volumen τ con una superficie f tal como el de la figura 3.3.1 a través de la cual se mueve un fluido.

76

Momentum Transfer

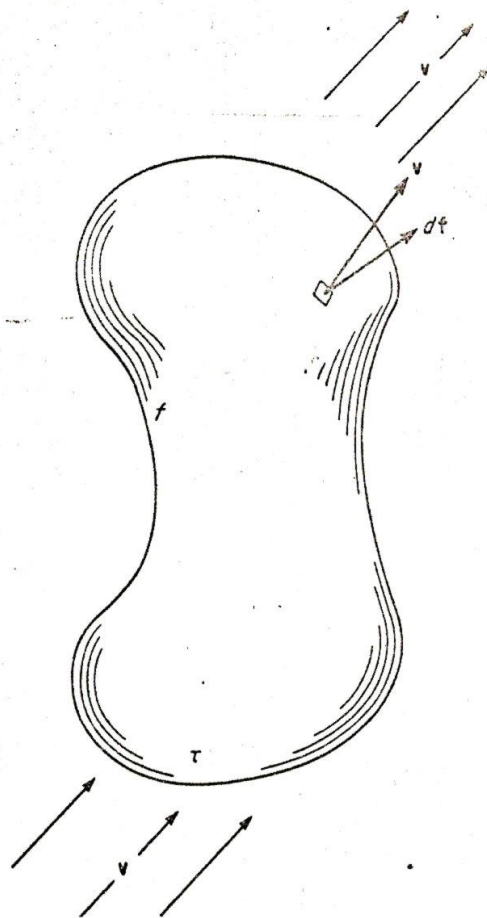


Fig. 3.3.1.

Este elemento de volumen está fijo en el espacio. En cada punto del elemento , incluyendo en la superficie existe una velocidad , densidad , presión y esfuerzo cortante. Aplicando la ley de la conservación del momento a ese volumen da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{entrada de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la convección} \\ (1) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{salida de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la convección.} \\ (2) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{entrada de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la difusión} \\ \text{molecular.} \\ (3) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{salida de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la difusión} \\ \text{molecular.} \\ (4) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{externas} \\ \text{ejercidas sobre} \\ \text{el fluido.} \\ (5) \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{momento.} \\ (6) \end{array} \right\} \quad (3.4.1)$$

La ecuación anterior enumera la rapidez de momento y las fuerzas que actúan sobre un fluido en movimiento en el volumen τ y en el tiempo t . Cada uno de los término se expresara en forma de kg fuerza para que la ecuación sea dimensionalmente consistente..

Los términos (1) y (2) indican el flujo neto de momento entrante al sistema por convección. Esto puede representarse por:

$-\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ (3.3.3) que representa el flujo neto de masa saliente del sistema en df . El momento de un fluido en movimiento se define como el producto de la velocidad por la masa . La rapidez de momento está dada por el producto de la velocidad por el flujo másico., por lo tanto :

$-\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f})$ o simplemente $-\rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ (3.4.2) Es la rapidez de momento entrante al sistema en df . El lado izquierdo de este producto punto es un tensor, aunque La ecuación (3.4.2) está en forma vectorial. Si se integra (3.4.2) sobre toda la superficie f se obtiene el flujo neto de momento que fluye en el sistema.

$$-\iint_f \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.4.3)$$

Si dividimos entre gc se puede convertir esto en kg fuerza.

$$-\frac{1}{gc} \iint_f \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.4.3)$$

Los términos (3) y (4) representan la difusión molecular de momento. Este mecanismo se debe a la presencia de gradientes de velocidades en la superficie del elemento de volumen y a que el fluido tiene viscosidad. Este mecanismo se describe en términos del esfuerzo cortante y se representa mediante un tensor. Si τ en $\frac{kg}{m^2}$ Es el tensor del esfuerzo cortante que describe las fuerzas viscosas en el sistema entonces:

$$-\tau \cdot d\mathbf{f}$$

Es la fuerza que actúa sobre el sistema en $d\mathbf{f}$ debido a τ . Esta fuerza es equivalente a un término de rapidez de momento. El signo negativo se debe al flujo que entra al sistema. Si se integra el término a lo largo de toda la superficie se obtiene la fuerza neta que actúa sobre el elemento debida a la difusión molecular.

$$-\oint_f \tau \cdot d\mathbf{f} \quad (3.4.5)$$

El término (5) se debe a las fuerzas externas que se ejercen sobre el fluido, pueden haber dos tipos de estas fuerzas, unas de ellas son las de superficie y las otras las volumétricas.

- a) Las fuerzas superficiales están siempre presentes debidas a la presión externa ejercida sobre la superficie del volumen. Esta presión es una cantidad escalar. La fuerza que es un vector se ejerce sobre una diferencial de superficie $d\mathbf{f}$.

$$-p \, d\mathbf{f}$$

Y la fuerza total ejercida sobre la superficie es:

$$-\oint_f p \, d\mathbf{f} \quad (3.4.6)$$

En donde el signo negativo indica que la fuerza ejercida sobre el fluido es directamente opuesta a f .

- b) Fuerza volumétricas. También sobre el fluido se ejerce fuerzas volumétricas. Si

F es la fuerza ejercida por unidad de masa, ρF es la fuerza por unidad de volumen. La fuerza volumétrica que actúa sobre una diferencial del volumen $d\tau$ está dada por:

$$\rho F \, d\tau \quad (3.4.7)$$

Si integramos (3.4.7) sobre el volumen total se obtiene la fuerza del cuerpo.

$$\iiint_{\tau} \rho F \, d\tau \quad (3.4.8)$$

El término (6) mide la rapidez de acumulación del momento en el volumen debido a los términos (1),(2),(3),(4),y (5). Si el producto de la masa por la velocidad es el momento

del fluido, el producto de la densidad por la velocidad es el momento por unidad de volumen. Por lo tanto el momento contenido en una diferencial de volumen $d\tau$ es:

$$\rho v d\tau \quad (3.4.9)$$

la rapidez con la que se acumula el momento en $d\tau$ es la derivada de la ecuación(3.4.9) con respecto al tiempo en un punto dado del sistema en el cual se localiza $d\tau$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) d\tau \quad (3.4.10)$$

Si se divide la ecuación (3.4.10) entre gc y se integra se obtiene la rapidez total de acumulación de masa en el volumen τ .

$$\frac{1}{gc} \iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau \quad (3.4.11)$$

Sustituyendo los términos obtenidos (3.4.4),(3.4.5),(3.4.6),(3.4.8) y (3.4.11) en la ecuación (3.4.1) da:

$$-\frac{1}{gc} \oiint_f \rho v v \cdot d\mathbf{f} - \oiint_f \tau \cdot d\mathbf{f} - \oiint_f p d\mathbf{f} + \iiint_{\tau} \rho F d\tau = \frac{1}{gc} \iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau \quad (3.4.12)$$

La ecuación anterior no es geoméricamente consistente. Las tres integrales de superficie se pueden convertir en integrales de volumen aplicando el teorema de Gauss.

$$\frac{1}{gc} \oiint_f \rho v v \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{gc} \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \rho v v) d\tau$$

$$\oiint_f \tau \cdot d\mathbf{f} = \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \tau) d\tau$$

$\oiint_f p d\mathbf{f} = \iiint_{\tau} \nabla p d\tau$ La ecuación (3.4.12) se convierte en:

$$-\frac{1}{gc} \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \rho v v) d\tau - \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \tau) d\tau - \iiint_{\tau} \nabla p d\tau + \iiint_{\tau} \rho F d\tau = \frac{1}{gc} \iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau \quad (3.4.13)$$

Debe hacerse notar que τ es el elemento de volumen y τ es el vector del esfuerzo cortante. La ecuación anterior se puede poner en forma diferencial si las funciones son continuas a través de todo el volumen .

$$-\frac{1}{gc} (\nabla \cdot \rho v v) - (\nabla \cdot \tau) - (\nabla p) + \rho F = \frac{1}{gc} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \quad (3.4.14)$$

Esta es una de las formas en que puede presentarse la ecuación de transferencia de momento. La ecuación (3.4.14) es una ecuación vectorial, a pesar de la presencia de tensores, y cada uno de los términos tiene las unidades de kg fuerza por unidad de volumen de fluido. El lado derecho de la ecuación representa la rapidez de acumulación de momento que un observador mediría en un punto fijo del sistema. Este término también puede escribirse como: $\frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ si el fluido tiene la densidad constante.

El término $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ mide la rapidez de cambio de la velocidad en un punto fijo en el espacio. La ecuación (3.4.14) puede ser reescrita en otra forma diferente. Se puede demostrar que:

$$\frac{1}{gc} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{1}{gc} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{gc} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3.4.15)$$

El lado derecho de La ecuación (3.4.15) puede también ponerse en forma de la derivadas de Stokes.

$$\frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{gc} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\rho}{gc} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (3.4.16)$$

Entonces la ecuación (3.4.14) se convierte en : $-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho F = \frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} +$

$\frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ (3.4.18) El lado derecho de La ecuación de movimiento en la ecuación (3.4.18) representa la rapidez del cambio de la velocidad con el tiempo que mediría un observador que se moviera a la misma velocidad que el fluido. la ecuación vectorial (3.4.17) se puede expandir a coordenadas

TABLE 3.4.1

The Equation of Motion; Eq. (3.4.17)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathcal{F}$$

Expansion in Rectangular Coordinates

x-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_x \end{aligned} \quad (1)$$

y-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_y \end{aligned} \quad (2)$$

z-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_z \end{aligned} \quad (3)$$

rectangulares, cilíndricas y esféricas y los resultados se presentan en las tablas 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.3.

TABLE 3.4.2

The Equation of Motion; Eq. (3.4.17)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (v \cdot \nabla)v = -\nabla p - (\nabla \cdot \tau) + \rho \mathcal{F}$$

Expansion in Cylindrical Coordinates

r-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_r \end{aligned} \quad (1)$$

 ϕ -component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_\phi \end{aligned} \quad (2)$$

z-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho \mathcal{F}_z \end{aligned} \quad (3)$$

TABLE 3.4.3
The Equation of Motion; Eq. (3.4.17)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathcal{F}$$

Expansion in Spherical Coordinates

r-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} \\ - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) \\ + \rho \mathcal{F}_r \quad (1) \end{aligned}$$

θ-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) \\ + \rho \mathcal{F}_\theta \quad (2) \end{aligned}$$

φ-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) \\ + \rho \mathcal{F}_\phi \quad (3) \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento puede escribirse todavía en otra forma. Si el fluido es newtoniano los componentes del tensor del esfuerzo cortante pueden reemplazarse por la ley de Newton de la viscosidad. Además, si se supone que la viscosidad y la densidad son constantes después de algunos desarrollos y manipulaciones con la ecuación (3.4.17) se obtiene:

$$\frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho F = \frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3.4.19)$$

La única fuerza significativa que se ejerce sobre el cuerpo es la de la gravedad. La

TABLE 3.4.5

The Equation of Motion; Eq. (3.4.20)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \frac{\mathbf{g}}{g_c}$$

Expansion in Cylindrical Coordinates

r-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\phi \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{rv_r\} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{g_r}{g_c} \end{aligned} \quad (1)$$

ϕ -component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{rv_\phi\} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{g_\phi}{g_c} \end{aligned} \quad (2)$$

z-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{g_z}{g_c} \end{aligned} \quad (3)$$

fuerza externa F se puede reemplazar por la fuerza debida a la gravedad \mathbf{g}/g_c . El vector \mathbf{g} está definido como el vector de la aceleración de la gravedad y tiene una magnitud a la aceleración de la gravedad y está dirigido hacia el centro de la Tierra. F y \mathbf{g}/g_c tienen las unidades de kgfuerza/kg. Utilizando estas definiciones y sustituyendo en la ecuación (3.4.19) se obtiene:

$$\frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \frac{\mathbf{g}}{g_c} F = \frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\rho}{g_c} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (3.4.20)$$

La ecuación (3.4.20) es la llamada ecuación de Navier–Stokes.

La ecuación de Navier-Stokes se puede poner expandida en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Los resultados de esas operaciones aparecen en las tablas 3.4.4, 3.4.4 y 3.4.5.

TABLE 3.4.4
The Equation of Motion; Eq. (3.4.20)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \frac{\mathbf{g}}{g_c}$$

Expansion in Rectangular Coordinates

x-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{g_c} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{g_x}{g_c} \end{aligned} \quad (1)$$

y-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{g_c} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{g_y}{g_c} \end{aligned} \quad (2)$$

z-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{g_c} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{g_z}{g_c} \end{aligned} \quad (3)$$

Momentum Transfer

TABLE 3.4.6
The Equation of Motion; Eq. (3.4.20)

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \frac{\mathbf{g}}{g_c}$$

Expansion in Spherical Coordinates

r-component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho \frac{g_r}{g_c} \end{aligned} \quad (1)$$

θ -component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho \frac{g_\theta}{g_c} \end{aligned} \quad (2)$$

ϕ -component:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g_c} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ + \frac{\mu}{g_c} \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho \frac{g_\phi}{g_c} \end{aligned} \quad (3)$$

N.B.: In the above equations,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Se

pueden hacer varias

simplificaciones a la ecuación (3.4.20) , lo que genera varias aplicaciones interesantes:

La ecuación de Euler

La ecuación de Euler se basa en la suposición de que $\nabla \cdot \tau = 0$. Con ello la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$-\nabla p + \rho \frac{\mathbf{g}}{gc} = \frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{gc} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3.4.21)$$

La ecuación de Euler puede aplicarse a fluidos con viscosidad igual a cero.

La ecuación de Bernoulli

Algunos vectores pueden representarse mediante el gradiente de una cantidad escalar, el vector \mathbf{g}/gc es un ejemplo. Se puede demostrar que:

$$\rho \frac{\mathbf{g}}{gc} = -\nabla \left(\rho \frac{\mathbf{g}}{gc} z \right) \quad (3.4.22)$$

En donde:

$$g = |\mathbf{g}|$$

Z= coordenada de posición vertical. Con esto la ecuación (3.4.21) se convierte en:

$$-\nabla \left(p + \rho \frac{\mathbf{g}}{gc} z \right) = \frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{gc} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Se mostró en el problema 2.11 que:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{gradiente } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rotacional } \mathbf{v}$$

Asi que:

$$-\nabla p + \rho \frac{\mathbf{g}}{gc} = \frac{\rho}{gc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2gc} \nabla v^2 - \frac{\rho}{gc} \mathbf{v} \times \text{rotacional } \mathbf{v}$$

Si se rearrregla esta ecuación se obtiene:

$$-\nabla \left(p + \rho \frac{\mathbf{g}}{gc} z + \frac{\rho v^2}{2gc} \right) = \frac{\rho}{gc} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rotacional } \mathbf{v} \right)$$

Si el flujo es irrotacional.

Rotacional $\mathbf{v} = 0$

A régimen permanente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Entonces la ecuación anterior se reduce a :

$$-\nabla \left(p + \rho \frac{g}{gc} z + \frac{\rho v^2}{2gc} \right) = 0 \quad (3.4.23)$$

A partir de la ecuación (3.4.23) se puede concluir que:

$$\left(p + \rho \frac{g}{gc} z + \frac{\rho v^2}{2gc} \right) = \text{constante} \quad (3.4.24)$$

Esta es una de las formas de la ecuación de Bernoulli , la que es aplicable si:

- 1.- El fluido es inviscible ($\mu=0$).
- 2.-El flujo es irrotacional.
- 3.- El sistema está en régimen continuo.

Movimiento irrotacional

Una aplicación interesante es el flujo irrotacional de los fluidos incompresibles. Se mostró en el ejemplo 2.5.5 que el **curl grad ϕ** es siempre cero.<si el flujo es irrotacional, **curl $\mathbf{v} = \mathbf{0}$** . Si esto acontece el vector \mathbf{v} puede representarse por el gradiente de una cantidad escalar, digamos ϕ . Por lo tanto:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (3.4.25)$$

Para un fluido incompresible,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3.13)$$

Sustituyendo la ecuación (3.4.25) en la ecuación (3.3.13) nos da:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4.26)$$

Que es la ecuación de Laplace o ecuación del potencial del flujo.

Hidroestática

El vector velocidad, sus componentes y derivadas , es siempre cero en estas aplicaciones. La ecuación (3.4.20) se reduce a:

$$-\nabla p + \rho \frac{g}{gc} = 0$$

O en forma de sus componentes:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{g}{gc} = 0$$

Notese que g es directamente opuesta a la dirección positiva de las z.

Ya que p sólo es función de z se puede escribir:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \frac{g}{gc} \quad \gamma$$

$$p = -\rho \frac{g}{gc} z + \text{constante} \quad (3.4.27)$$

Esta es la ecuación que describe la presión hidrostática en un sistema.

Si $p = p_h$ a $z = h$ la ecuación (3.4.27) se convierte en:

$$p - p_h = \rho \frac{g}{gc} (h - z) \quad (3.4.28)$$

Presión dinámica

Por lo general es necesario observar los cambios de la presión que sufre un fluido por el sólo hecho de moverse. El término p^* se define por:

$$p^* = p + \rho \frac{g}{gc} z \quad (3.4.29)$$

La presión hidrostática está dada por:

$$p^* = p - p_h$$

El término p^* es por lo tanto , la diferencia entre la presión de la ecuación de estado p y la presión hidrostática p_h . Para un fluido estacionario, p es simplemente p_h y por lo tanto:

$$(p^*)_{v=0} = 0$$

Para un fluido en movimiento la presión de la ecuación de estado p tiene otro valor distinto al de p_h . Por lo tanto p^* puede ser visto como la presión dinámica del sistema la cual sólo es función del movimiento del fluido. Se puede finalizar diciendo que cualquier cambio en p^* en un fluido es una medida del cambio en la presión debido al movimiento.

Ya hemos reemplazado $\rho \frac{g}{g_c}$ en la ecuación de Navier –Stokes con

$$-\nabla \left(\rho \frac{g}{g_c} z \right) \quad (3.4.31)$$

El término $-\nabla p + \rho \frac{g}{g_c}$ puede ser reescrito como:

$$-\nabla \left(p + \rho \frac{g}{g_c} z \right) \quad (3.4.32)$$

Sustituyendo la ecuación (3.4.29) en la ecuación (3.4.32) se obtiene: $-\nabla p^*$ y la ecuación de Navier –Stokes se convierte en:

$$\frac{\mu}{g_c} \nabla^2 v - \nabla p^* = \frac{\rho}{g_c} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] \quad (3.4.33)$$

La expansión de esta ecuación en sus componentes puede hacerse con facilidad. El término gravitacional en las Tablas 3.4.4, 3.4.5 y 3.4.6 se absorbe dentro del término de la presión p^* que reemplaza a p . Este es un término conveniente para trabajar con él y se usará repetidamente en las aplicaciones..

3.5.-Condiciones a frontera y condiciones iniciales

Para poder resolver los problemas que se plantearan es necesario hacer integraciones. Las constantes de integración deben especificarse antes de obtener una solución completa, estas constantes se obtienen por lo general a partir de las condiciones a la frontera o de las condiciones iniciales o de ambas..

Las condiciones más comunes encontradas en los problemas de transferencia de momento son;

- 1.- Se especifica la velocidad de un fluido sobre una superficie. Se supone que no hay deslizamiento sobre la pared. Si la pared del sólido es estacionaria la velocidad del fluido es cero, si se está moviendo el fluido en ese punto se moverá a la misma velocidad.
- 2.- Se especifican los gradientes de velocidad o de momento en una de las fronteras del sistema.
- 3.- Las velocidades en cada uno de los lados de la interfase entre fluidos son iguales.
- 4.- El flux de momento a cada lado de la interfase entre dos fluidos es igual. Se debe especificar el gradiente de velocidades en cada lado de la interfase.
- 5.- A veces se da el valor de la velocidad al tiempo cero.

Para los ejercicios que aparecen a continuación se aconseja:

- 1.- Leer con cuidado el enunciado del problema.
- 2.- Describir al sistema por las coordenadas apropiadas: rectangulares, cilíndricas, esféricas.
- 3.- Hacer un bosquejo o diagrama del sistema.
- 4.- Obtenga la ecuación diferencial a partir de las tablas que mejor convenga al sistema.
- 5.- Establezca las condiciones a la frontera y las condiciones iniciales del problema.
- 6.- Resuelva la o las ecuaciones sujetándolas a las condiciones iniciales o a la frontera.
- 7.- Revise y compruebe la solución para ver si satisface las condiciones.
- 8.- Analice los resultados.

Ejemplo 3.6.1

Un fluido fluye entre la región comprendida entre dos placas horizontales, infinitas y paralelas separadas por una distancia h . El flujo se da solamente en la dirección y . Parte del sistema ha sido descrito en la figura 3.2.1. Se aplica una fuerza lo suficientemente grande a la placa superior para que esta se mueva a la velocidad V_n . Calcule lo siguiente:

- a) El perfil de velocidades.
- b) La caída de presión por unidad de longitud en la dirección y . Por ejemplo dp^*/dy .
- c) La velocidad máxima.
- d) La velocidad promedio.
- e) El flujo volumétrico.

Respuesta.

Se resolverá el sistema usando las coordenadas rectangulares. La ecuación apropiada se puede obtener a partir de la tabla 3.4.4. El vector velocidad se puede expresar en función de sus componentes:

70

Momentum Transfer

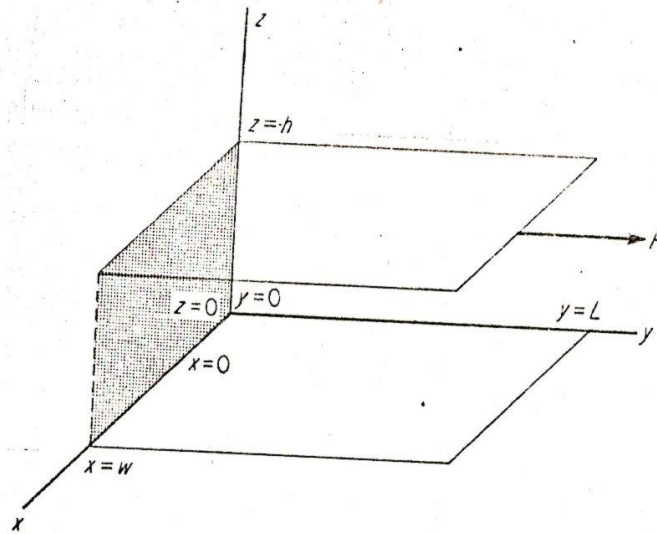


Fig. 3.2.1.

$$\mathbf{V} = v(\dot{v}_x, \dot{v}_y, v_z)$$

Como el flujo es unidimensional $v_x = 0$; $v_z = 0$, $v_y \neq 0$

Los términos v_x , v_z y todas sus derivadas son cero. Generalmente cada componente es una función del tiempo y de la posición. En este caso:

$$V_y = v_y(x, y, z, t)$$

A partir de la ecuación (1) de la tabla 3. 3.2 se concluye que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \text{ porque } v_y \text{ no es una función de } y.$$

Basándonos en la física se puede concluir que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \text{ ya que } v_y \text{ no es una función de } x$$

Basándonos en el enunciado del problema $\frac{\partial v_y}{\partial t}=0$ y es razonable concluir que v_y solo varia con z , es decir $v_y = v_y(z)$, esto significa que $\frac{\partial v_y}{\partial z} \neq 0$ y quizás que $\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \neq 0$.

Ahora examinaremos la ecuación del movimiento en las coordenadas rectangulares en la tabla 3.4.4. El procedimiento general es examinar cada uno de los términos de la ecuación y determinar si es o no cero. Se retienen de esa manera los términos que no dan cero y que describen a la ecuación diferencial. Se puede observar que todos los términos en la ecuación (1) y (3) incluyendo a $\frac{\partial p^*}{\partial x}$ y $\frac{\partial p^*}{\partial z}$ son cero. La ecuación resultante es:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{\mu}{gc} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

Como $\frac{\partial p^*}{\partial x}$ y $\frac{\partial p^*}{\partial z}$ son cero, p^* es una constante o una función de y , si reemplazamos las derivadas parciales por derivadas totales se obtiene que:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{dp^*}{dy}$$

Siguiendo el mismo procedimiento en el lado derecho de la ecuación y ya que v_y es solo función de z .

$$\frac{dp^*}{dy} = \frac{\mu}{gc} \frac{d^2 v_y}{dz^2} \quad (1)$$

El lado izquierdo de (1) es o una constante o una función de y . El lado derecho es una constante o una función de z . Ya que una función de y no puede ser igual a una de z se concluye que:

$$\frac{dp^*}{dy} = \frac{\mu}{gc} \frac{d^2 v_y}{dz^2} = \text{constante}$$

La ecuación anterior nos informa que el gradiente de presión $\frac{dp^*}{dy}$ es una constante, quizás cero. Integrando una vez se obtiene:

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{g_c z}{\mu} \frac{dp^*}{dy} + B$$

Integrando de nuevo:

$$v_y = \frac{g_c z^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} + Bz + A \quad (2)$$

Las condiciones a la frontera son:

$$(1) \quad v_y = 0 \quad \text{a} \quad z=0; \quad (2) \quad v_y = V_h \quad \text{a} \quad z=h$$

Sustituyendo la condición 1 en la ecuación (2) nos da:

$$0 = 0 + 0 + A \quad ; \quad A = 0$$

Sustituyendo la condición 2 en (2) se obtiene:

$$V_h = Bh + \frac{g_c h^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy}$$

$$B = \frac{V_h}{h} - \frac{g_c h}{2\mu} \frac{dp^*}{dy}$$

Por lo tanto:

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{g_c h z}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} + \frac{g_c z^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} = V_h \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{g_c z}{2\mu} (h - z) \frac{dp^*}{dy}$$

Ya que el fluido no se mueve en relación a los puntos fijos en ambas placas. $\frac{dp^*}{dy} = 0$ y por ello $v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right)$

Es importante ahora verificar que la solución anterior satisface la ecuación diferencial y las condiciones a la frontera.

La velocidad máxima se da a $z = h$. El punto donde se produce la velocidad media está en $z = h/2$ y por ello:

$$\langle v_y \rangle = \frac{V_h}{2}$$

El flujo volumétrico está dado por la suma de todos los productos de la velocidad local y el área diferencial.

$$Q = \int_{x=0}^w \int_{z=0}^h v_y dz dx = w \int_0^h v_y dz = w \left(\frac{V_h h}{2} \right)$$

Ejemplo 3.6.2

Vuelva a resolver El ejemplo 3.6.1 suponiendo que tanto La placa superior como La inferior se mueven. La velocidad en la placa superior sigue siendo V_h mientras que en la placa inferior la velocidad es: V_o .

Respuesta

El problema es similar al anterior lo que cambian son las condiciones a la frontera. La ecuación diferencial empleada es la misma.

Condición a la frontera 1

$$v_y = V_0 \quad \text{a } z = 0$$

Condición a la frontera 2

$$v_y = V_h \quad z = h$$

La solución de la ecuación diferencial toma la forma de.

$$v_y = \frac{g_c z^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} * Bz + A$$

Como $dp^*/dy = 0$ se puede escribir que:

$$v_y = Bz + A$$

Si se aplican las condiciones a la frontera 1 entonces.

$$V_0 = B(0) + A \quad ; \quad A = V_0$$

Con la condición 2 tenemos que:

$$V_h = Bh + A = Bh + V_0$$

Por lo tanto: $B = (V_h - V_0)/h$

Y

$$v_y = (V_h - V_0) \left(\frac{z}{h} \right) + V_0$$

Se puede demostrar fácilmente que:

$$\langle v_y \rangle = \frac{V_h + V_0}{2}$$

Y que:

$$Q = \left(\frac{V_h + V_0}{2} \right) hw$$

Ejemplo 3.6.3

Rehaga el ejemplo 3.6.1 si ambas placas están estacionarias y un flujo volumétrico constante Q pasa a través del área marcada en la figura 3.2.1. Además, calcule la relación de la velocidad media a la máxima.

Respuesta

La ecuación diferencial que se aplica en este caso es la misma que en los problemas anteriores ya que:

$$v_y = 0, \quad v_x = v_x(z), \quad v_z = 0$$

Por lo tanto: $v_y = \frac{g_c}{2\mu} z^2 \frac{dp^*}{dy} + Bz + A$ (1)

En este caso: $\frac{dp^*}{dy} \neq 0$

Y La condición a la frontera (1) es : $v_y = 0$ a $z = 0$

La condición a la frontera (2) es: $v_y = 0$ a $z = h$

Sustituyendo la condición a la frontera (1) en la ecuación (1) da:

$$0 = \frac{g_c(0)^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} + B(0) + A \quad ; \quad A = 0$$

Con la condición a la frontera (2)

$$0 = \frac{g_c h^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} + Bh + A$$

$$B = -\frac{g_c h}{2\mu} \frac{dp^*}{dy}$$

Por lo tanto:

$$v_y = -\frac{g_c}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} (zh - z^2) \quad (2)$$

La $\frac{dp^*}{dy}$ como debía de esperarse una constante de signo negativo , es decir la caída de presión decrece en la dirección del movimiento. El flujo volumétrico está dado por:

$$Q = \int_{x=0}^w \int_{z=0}^h v_y dz dx = -\frac{g_c w}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} \int_0^h (zh - z^2) dz$$

$$Q = -\frac{g_c w}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} \left[\frac{z^2 h}{2} - \frac{z^3}{3} \right] \text{ de } 0 \text{ a } h = -\frac{g_c w}{2\mu} \frac{dp^*}{dy} \left[\frac{h^3}{6} \right] = -\frac{g_c w h^3}{12\mu} \frac{dp^*}{dy}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{12\mu Q}{g_c w h^3}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (2) da:

$$v_y = \frac{6Q}{wh^3} (zh - z^3) \quad (3)$$

Deberíamos suponer por intuición que la máxima velocidad está en el centro a $z=h/2$. Para comprobar esto, se diferencia (3) con respecto a z y se resuelve para z haciendo la ecuación igual a cero.

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{6Q}{wh^3} (h - 2z) = 0 \quad (4)$$

Resolviendo (4) para z , se obtiene, tal como esperábamos que:

$$z = \frac{h}{2}$$

Y que:

$$v_{y \max} = \frac{6Q}{wh^3} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{3Q}{2wh}$$

De acuerdo con la definición de la velocidad promedio

$$\langle v_y \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{wh}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\langle v_y \rangle}{v_{y \max}} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3.6.4

Vuelva hacer el ejemplo 3.6.3 pero con la placa superior puesta en movimiento con una velocidad constante de V_h .

Respuesta

Este problema es en cierto sentido una combinación de los ejercicios 3.6.1 y 3.6.3. La ecuación diferencial que describe al sistema es la misma. La ecuación es también lineal, por lo tanto deberemos superponer o adicionar una solución a la otra para resolver el problema.

$$v_y(\text{del ejemplo 3.6.4}) = v_y(\text{del ejemplo 3.6.1}) + v_y(\text{del ejemplo 3.6.3})$$

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{6Q}{wh^3} (zh - z^2)$$

El lector tiene la opción de obtener la solución usando el procedimiento presentado en los ejemplos anteriores. La velocidad máxima es:

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{6Q}{wh^3} (h - 2z) + \frac{V_h}{h} = 0$$

$$z = \frac{wh^2}{12Q} V_h + \frac{h}{2}$$

La velocidad máxima ocurre a esa distancia. El resto del problema se deja como ejercicio.

Ejemplo 3.6.5

Un fluido fluye a través de un ducto largo cilíndrico y vertical de radio a en régimen permanente. (véase la figura 3.6.1). Calcule el perfil de velocidades como función de la caída de presión por unidad de longitud en la dirección del movimiento. Calcule también, el flujo volumétrico, la velocidad promedio, la velocidad máxima y la relación de la velocidad media a la promedio.

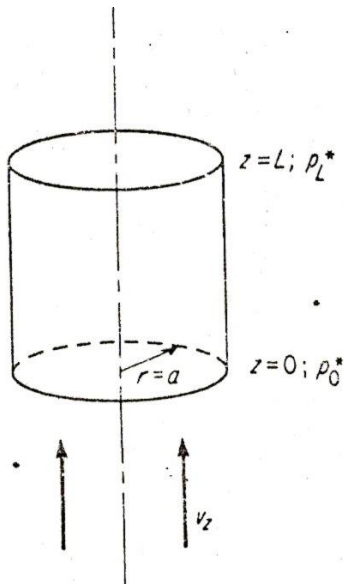


Fig. 3.6.1.

Respuesta

Se puede resolver este problema utilizando coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones que describen este fenómeno se extraen de la tabla 3.4.5.

Ya que este flujo es unidimensional:

$$v_y = 0 \quad ; \quad v_\phi = 0 \quad ; \quad v_z \neq 0$$

Los términos $v_y = 0$; $v_\phi = 0$ y sus derivadas son cero. A partir de la ecuación (2) de la tabla 3.3.2, se puede encontrar que:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{y basándonos en la física se encuentra que: } \frac{\partial v_z}{\partial \phi} = 0.$$

$$\text{Basándonos en el enunciado del problema } \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

Es razonable suponer que v_z variará con respecto a r o sea que $v_z = v_z(r)$.

$$\text{Esto significa que: } \frac{\partial v_z}{\partial r} \neq 0 \quad \text{o quizás que: } \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \neq 0.$$

Examinando la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas de la Tabla 3.4.5 se encuentra que:

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p^*}{\partial \phi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = \frac{\mu}{g_c} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$$

Como sólo hay variaciones en la dirección z se puede escribir.

$$\frac{dp^*}{dz} = \frac{\mu}{g_c} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] \quad (1)$$

$$v_z = -\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} r^2 + A \ln r + B$$

También las ecuaciones que describen a este sistema se pueden obtener a partir de un balance en la envolvente. Pero en vez de usar una envolvente finita se puede aplicar la ecuación 3.4.1 en la dirección z a un elemento diferencial tal como el mostrado en la figura 3.6.1^a Note que solamente una mitad de la envolvente se muestra en esa figura y que por conveniencia supondremos que la dimensión de la envolvente en la dirección ϕ es finita.

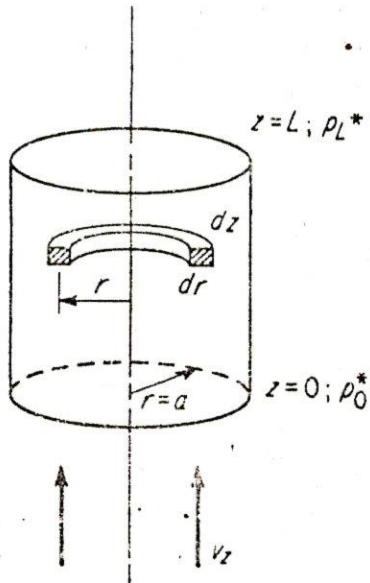


Fig. 3.6.1a.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{entrada de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la convección} \\ (1) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{salida de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la convección.} \\ (2) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{entrada de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la difusión} \\ \text{molecular.} \\ (3) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{salida de} \\ \text{momento} \\ \text{debida a} \\ \text{la difusión} \\ \text{molecular.} \\ (4) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{externas} \\ \text{ejercidas sobre} \\ \text{el fluido.} \\ (5) \end{array} \right\} = \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{momento.} \\ (6) \end{array} \right\} \quad (3.4.1)$$

El término (1) que indica la rapidez de entrada del momento a la superficie $2\pi r dr$ a $z = z$ es; $\frac{\rho}{g_c} v_z v_z / z 2\pi r dr$.

El término (2) que indica la rapidez con la que sale el momento de la superficie $2\pi r dr$ a $z = z + dz$ es: $\frac{\rho}{g_c} v_z v_z / z + dr 2\pi r dr$

El término (3) Que indica la rapidez de momento que entra en la superficie $2\pi r dz$ a $r + dr$ es: $r \tau_{rz} / r + dr 2\pi dz$ Este término es positivo ya que el área vector está dirigido en la dirección r positiva en esta superficie.

El término (4) Es la velocidad de la salida del momento en la superficie a $2\pi r dz$ a r $r \tau_{rz} / r 2\pi dz$

El término (5) representa la fuerza actuando sobre el área $2\pi r dr$ a $z = z$ es:

$-p^*/z 2\pi dz$; donde el efecto de la gravedad ha sido incluido en el término p^* . La fuerza actuante sobre el área $2\pi r dr$ a $z = z+dz$ es: $p^*/_{z+dz} 2\pi r dz$

El término (6) es cero para un sistema a régimen permanente.

Combinando los términos anteriores se obtiene:

$$\frac{\rho}{g_c} (v_z v_z / z - v_z v_z / z + dz) 2\pi r dr + (r\tau_{rz} / r + dr - r\tau_{rz} / r) 2\pi dz + (p^* / z + dz - p^* / z) 2\pi r dr = 0$$

Si notamos que: $v_z / z = v_z / z + dz$

$$\text{Entonces: } \frac{\rho}{g_c} (v_z v_z / z - v_z v_z / z + dz) 2\pi r dr = 0$$

Y la ecuación anterior se reduce a:

$$(r\tau_{rz} / r + dr - r\tau_{rz} / r) 2\pi dz + (p^* / z + dz - p^* / z) 2\pi r dr = 0$$

Si dividimos esta ecuación por $2\pi dr dz$.

$$\frac{(r\tau_{rz} / r + dr - r\tau_{rz} / r)}{dr} + \frac{(p^* / z + dz - p^* / z)r}{dz} = 0$$

Si aplicamos la definición de la derivada esto se convierte en:

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} + r \frac{dp^*}{dz} = 0$$

$$\text{Pero como: } \tau_{rz} = -\frac{\mu}{g_c} \frac{dv_z}{dz}$$

Se puede escribir que:

$$\frac{dp^*}{dz} = \frac{\mu}{g_c} \frac{d\left(r \frac{dv_z}{dr}\right)}{dr}$$

Se puede ver que para obtener la ecuación que describe al sistema el método de extracción de los términos apropiados a partir de la ecuación de transporte presentada en tablas es el método más sencillo para este fin.

Ejemplo 3.6.6

Un fluido fluye en la dirección vertical con un flujo volumétrico Q en la región anular que se encuentra comprendida entre dos cilindros concéntricos. El radio del cilindro

exterior es a y el del interior b . El movimiento del fluido es paralelo al eje del cilindro. Calcule el perfil de velocidades como función de la caída de presión por unidad de longitud. Una representación de este sistema es la presentada en la figura 3.6.2

Heat Transfer

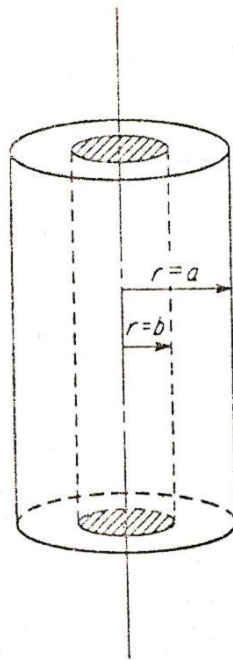


Fig. 3.6.2.

BC's are

BC(1)

Respuesta

La ecuación diferencial para este problema es la misma del ejemplo 3.6.5 , así que:

$$v_z = -\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} r^2 + A \ln r + B \quad (1)$$

Las condiciones a la frontera 1 es : $v_z = 0$ a $r = a$

La condición a la frontera 2 es : $v_z = 0$ a $r = b$

Sustituyendo estas condiciones en (1) da para la primera condición:

$$\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} a^2 = A \ln a + B:$$

$$\text{Para la segunda condición : } \frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} b = A \ln b + B$$

Resolviendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$A = \frac{\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} (a^2 - b^2)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$B = \frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} a^2 - \frac{\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} (a^2 - b^2)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln a$$

Asi que:

$$v_z = -\frac{g_c \Delta p^*}{4\mu L} a^2 \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \frac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \right]$$

Este resultado puede extenderse al cálculo del flujo volumétrico y la velocidad media. El resultado anterior es válido si el fluido se mueve hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo 3.6.7

La configuración de un cilindro rotatorio cilíndrico se muestra en la figura 3.6.3. Dentro del viscosímetro un fluido se mueve en condiciones de régimen permanente dentro de la región anular formada por los dos cilindros. Calcule el perfil de velocidades del fluido si la velocidad angular del cilindro externo es ω_a . El cilindro interno es estacionario ($\omega_b=0$). Desprecie los efectos terminales.

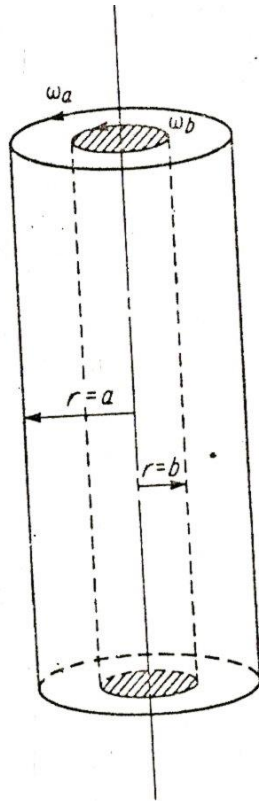


Fig. 3.6.3.

Respuesta

Este problema se resuelve mediante el uso de coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones diferenciales se obtienen de la tabla 3.4.5 . Depreciando los efectos terminales tenemos que:

$$v_y = 0 , v_\phi \neq 0 , v_z = 0$$

Los términos v_y , v_z y sus derivadas son iguales a cero. A partir de la ecuación (2) de la tabla 3.3.2 se concluye que: $\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$.

Basándonos en la física se puede ver que: $\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial p^*}{\partial \phi} = 0$, ya que no hay variación de la presión en la dirección ϕ .

Basándonos en el enunciado del problema $\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = 0$. Es razonable suponer que v_ϕ varía con respecto a r , es decir:

$$v_\phi = v_\phi(r) , \text{ lo que significa que } \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \neq 0 \text{ y que quizás } \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} \neq 0.$$

Examinando las ecuaciones de movimiento en las coordenadas cilíndricas presentes en la tabla 3.4.5, se concluye que:

$$-\frac{\rho}{g_c} \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p^*}{\partial r} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right] \quad (2)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (3)$$

La primera ecuación describe la variación de la presión (que ocurre debido a la fuerza centrífuga) en la dirección radial. La segunda ecuación describe la velocidad v_ϕ . Se puede reemplazar las derivadas parciales en p^* y en v_ϕ , ya que dependen solo de r . De manera que:

$$0 = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \right]$$

Como la derivada del término entre paréntesis cuadrados $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi)$ es igual a cero, el término debe ser igual a una constante, digamos A .

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) = A$$

$$\frac{d}{dr} (rv_\phi) = Ar$$

$$d(rv_\phi) = A r dr \quad ; \quad rv_\phi = \frac{Ar^2}{2} + B \quad ; \quad v_\phi = \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r}$$

Aplicando la primera condición a la frontera. $v_\phi = 0$ a $r = b$

Aplicando la segunda condición a la frontera. $v_\phi = \omega_a a$ a $r = a$

De la primera condición a la frontera se obtiene que:

$$0 = \frac{Ab}{2} + \frac{B}{b} \quad \text{por lo tanto } B = -\frac{Ab^2}{2}$$

De la condición a la frontera dos se obtiene que:

$$\omega_a a = \frac{Aa}{2} - \frac{Ab^2}{2a} = \frac{A}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \right)$$

$$A = \frac{2\omega_a a}{a^2 - b^2}$$

Por lo tanto:

$$v_\theta = \frac{\omega_a a^2 r}{a^2 - b^2} - \frac{\omega_a a^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{r^2 - b^2}{r} \right)$$

La variación de la presión en la dirección radial puede obtenerse sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (1). La fuerza por unidad de área requerida para mantener al cilindro externo en movimiento con una velocidad angular ω_a se obtiene evaluando el componente del esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ a $r=a$.

Ejemplo 3.6.8

Un fluido se mueve hacia afuera de una esfera de radio a a un flujo volumétrico constante. El flujo es uniforme en la dirección radial (ve la figura 3.6.4). Determine el perfil de velocidades para $a \leq r \leq \infty$ en términos de Q en condiciones de flujo a régimen permanente.

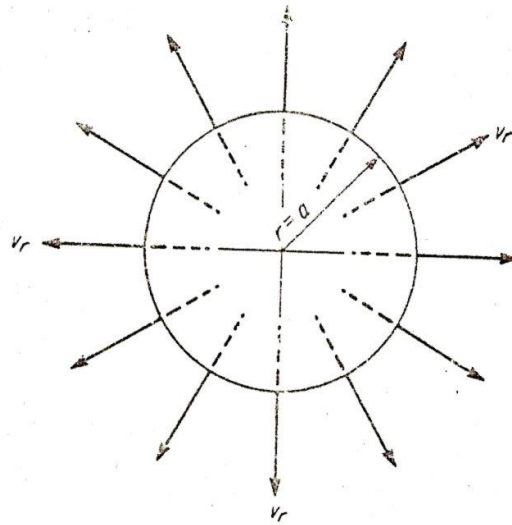


Fig. 3.6.4.

Respuesta

El problema se puede resolver utilizando coordenadas esféricas. Basándonos en el enunciado del problema se tiene que:

$$v_r \neq 0, v_\theta = 0, v_\phi = 0$$

Si examinamos la ecuación de la continuidad en coordenadas esféricas (tabla 3.3.1) se encuentra que las derivadas de v_θ y de v_ϕ son cero. El término $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ es igual a cero en régimen permanente.. Por lo tanto:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\rho r^2 v_r) = 0$$

Y por lo tanto:

$$\rho r^2 v_r = A \text{ (constante) } \quad (1)$$

Las condiciones a la frontera es Q dada en $r = a$.

El área seccional disponible para el flujo a $r = a$ es $4 \pi a^2$. La velocidad a $r = a$ está dada por:

$$v_r / r=a = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

Por lo tanto: $\rho a^2 v_r / r=a = A \quad ; \quad \rho a^2 \left(\frac{Q}{4\pi a^2} \right) = A \quad ; \quad A = \frac{\rho Q}{4\pi}$

Sustituyendo A en la ecuación (1) se obtiene: $\rho r^2 v_r = \frac{\rho Q}{4\pi} \quad \text{O} \quad v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$

Este resultado pudo haber sido deducido inmediatamente. La ecuación del movimiento puede ahora aplicarse para obtener la variación de la presión en el sistema.

Ejemplo 3.6.9

Dos fluidos están contenidos entre la región comprendida entre dos placas infinitas horizontales y paralelas separadas por una distancia $2h$. El volumen que ocupan ambos fluidos es igual. La viscosidad del fluido más pesado es μ_l , mientras que el del más ligero es μ_u . La placa superior se mueve a una velocidad constante de V_h . Calcule el perfil de velocidades de ambos fluidos.

Repuesta

El sistema es el mostrado en la figura 3-6.5. Para resolverlo se utilizan las coordenadas rectangulares con el origen sobre el eje z a medio camino entre las dos placas.

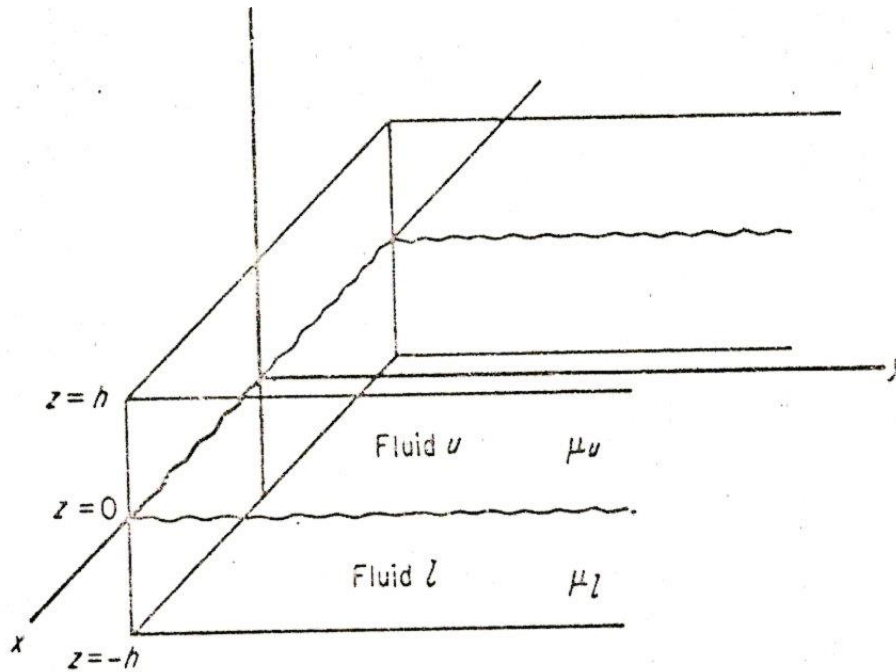


Fig. 3.6.5.

Se debe escribir una ecuación diferencial para cada fluido. El proceso a seguir es semejante al del ejemplo 3.6.1. Sin embargo, sabemos desde el principio que $\frac{dp^*}{dy} = 0$.

Por lo tanto:

$$\frac{d^2 v_{yu}}{dz^2} = 0 \quad \text{para el fluido } u$$

$$\frac{d^2 v_{yl}}{dz^2} = 0 \quad \text{fluido } l$$

Si integramos , se obtiene:

$$\frac{dv_{yu}}{dz} = A_u \quad \text{constante} \quad (1)$$

$$\frac{dv_{yl}}{dz} = \text{constante} = A_l \quad (2)$$

A $z=0$ la velocidad de u debe ser igual a la velocidad de l . Además, el esfuerzo cortante para ambos fluidos debe ser igual sino habría una acumulación de momento en el plano $z=0$ lo que es físicamente imposible. Por lo tanto las condiciones a la frontera son: BC(1) a $z = -h$, $v_{yl}=0$; BC (2) a $z = +h$, $v_{yu} = V_h$

$$\text{BC(3) a } z=0, v_{y0} = v_{yu0} : \text{BC (4) a } z=0, \tau_{zyu} = \tau_{zyl} \text{ o } \mu_u \frac{dv_{yu}}{dz} = \mu_l \frac{dv_{yl}}{dz}$$

Sustituyendo La condición a la frontera (BC4) en las ecuaciones 1 y 2 se obtiene.

$$\mu_u \frac{dv_{yu}}{dz} = \mu_u A_u$$

$$\mu_l \frac{dv_{yl}}{dz} = \mu_l A_l$$

$$\mu_u A_u = \mu_l A_l$$

Integrando de nuevo las ecuaciones 1 y 2 se obtiene.

$$v_{yu} = A_u z + B_u \quad (3)$$

$$v_{yl} = A_l z + B_l \quad (4)$$

Notese que hay cuatro condiciones a la frontera y cuatro constante. Sustituyendo BC 1, BC 2 y BC 3 en las ecuaciones (3) y (4) da:

$$A_u = \frac{V_h}{h} \left(\frac{\mu_l}{\mu_l + \mu_u} \right)$$

$$A_l = \frac{V_h}{h} \left(\frac{\mu_u}{\mu_l + \mu_u} \right)$$

$$B_u = B_l = V_h \left(\frac{\mu_u}{\mu_l + \mu_u} \right) ;$$

$$v_{yu} = V_h \left(\frac{\mu_l}{\mu_l + \mu_u} \right) \left(\frac{z}{h} + \frac{\mu_u}{\mu_l} \right) ; v_{yl} = V_h \left(\frac{\mu_u}{\mu_l + \mu_u} \right) \left(\frac{z}{h} + 1 \right)$$

El lector debería graficar el perfil de velocidades para ambos fluidos si:

- $\mu_l = \mu_u$
- $\mu_l > \mu_u$
- $\mu_l < \mu_u$

Y explicar los resultados. ¿Cuál es la relación entre el gradiente de velocidades de los dos fluidos?

Ejemplo 3.6.10

El fluido contenido entre dos placas paralelas horizontales separadas por una distancia h está inicialmente en reposo. A tiempo $t = 0$ la placa superior se pone en movimiento a una velocidad constante V_h . Determine el perfil de velocidades del fluido en función de la posición y del tiempo.

Resultado

El sistema se presenta en la figura 3.6.6.

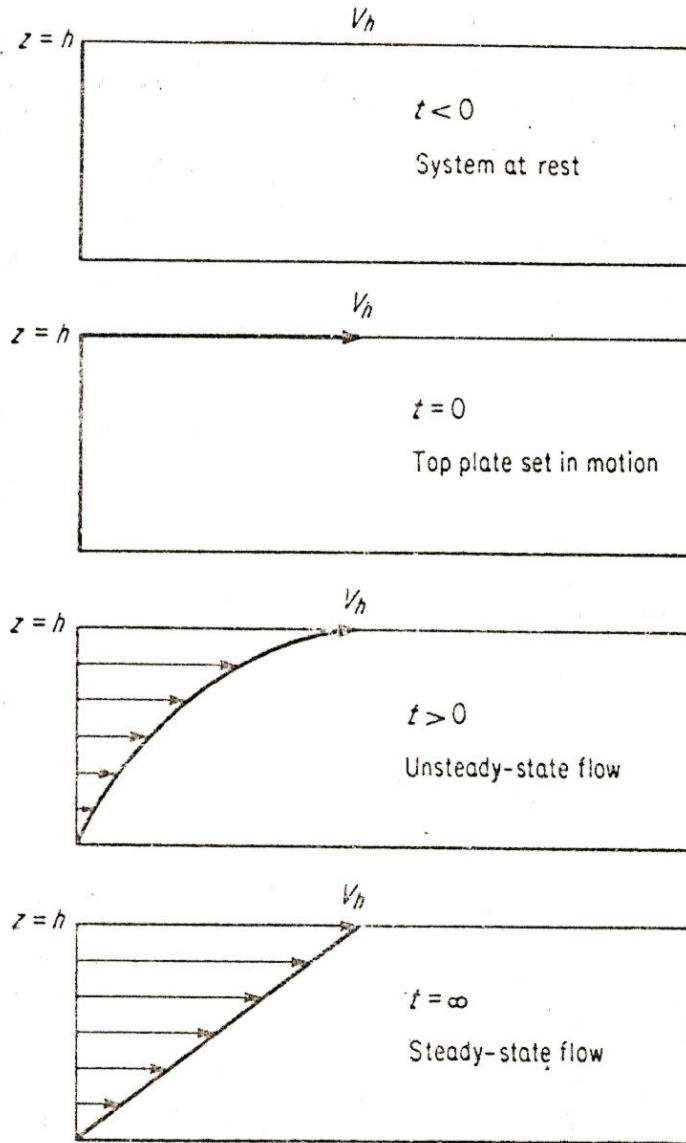


Fig. 3.6.6.

Se ha mostrado que la solución para el régimen permanente toma la forma de:

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right)$$

Durante el régimen transitorio o no permanente, v_y es una función del tiempo así como de z .

$$v_y = v_y(z, t)$$

Este problema se puede resolver en coordenadas rectangulares. Recordando que: $\frac{dp^*}{dy} = 0$ se puede obtener la siguiente ecuación de la tabla 3.4.4.

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\mu}{g_c} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \quad \nu = \text{viscosidad cinemática} \quad (1)$$

Notese que no se puede reemplazar la derivada parcial por una total ya que v_y es función de dos variables, del tiempo y de la distancia. Se puede resolver este problema mediante el método de la separación de variables. Se supondrá que la solución para v_y puede ponerse como el producto de una función $\psi(z)$ que depende solamente de z , por una segunda función $\Theta(t)$ que depende solo del tiempo.

$$v_y = v_y(z, t) = \psi(z) \Theta(t) = \psi \Theta.$$

El lado izquierdo de (1) es: $\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\psi(z) \Theta(t)] = \psi(z) \frac{\partial [\Theta(t)]}{\partial t}$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \psi(z) \Theta'(t)$$

$$\Theta'(t) = \frac{\partial [\Theta(t)]}{\partial t} = \psi \Theta' \quad (2)$$

El lado derecho de (1) toma la forma de :

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \nu \Theta \psi'' \quad (3)$$

Combinando (2) y (3) se obtiene:

$$\psi \Theta' = \nu \Theta \psi''$$

$$\frac{\Theta'}{\nu \Theta} = \frac{\psi''}{\psi} \quad (4)$$

El lado izquierdo de (4) o es una constante o es una función de t . El lado derecho de (4) o es una constante o una función de z . Consideremos que ambas sean iguales a una misma constante. Esta constante puede ser positiva, negativa o cero. Se mostrará más tarde que no puede ser positiva. Por ahora escribiremos:

$$\frac{\theta'}{\nu\theta} = \frac{\psi''}{\psi} = -\lambda^2 = \text{constante}$$

La siguiente solución resulta si $-\lambda^2$ es cero:

$$\frac{\theta'}{\nu\theta} = 0 ; \theta' = 0 ; \frac{\partial\theta(t)}{\partial t} = 0 ; \theta(t) = C_0, \theta = C_0$$

Y además:

$$\frac{\psi''}{\psi} = 0 ; \psi'' = 0 ; \frac{\partial^2(\psi(z))}{\partial z^2} = 0 ; \psi(z) = C_1' + C_2'z ; \psi = C_1 + C_2z$$

$$\text{Por lo tanto, } v_{y0} = \theta\psi = C_0(C_1' + C_2'z) = C_1 + C_2z \quad (6)$$

¿Cuáles son las condiciones iniciales y las condiciones a la frontera?

Condición a la frontera (1)

A $z=0$, $v_y=0$ para $t \geq 0$

Condición a la frontera (2)

A $z=h$, $v_y=V_h$ para $t \geq 0$

A $t=0$, $v_y=0$ para $0 \leq z < h$

Sustituyendo BC (1) y BC(2) en la ecuación (6) da:

$$C_1 = 0, C_2 = V_h/h$$

Así que:

$$v_{y0} = V_h \left(\frac{z}{h} \right) \quad (7)$$

La ecuación (7) es la solución para régimen permanente cuando $t=\infty$.

Si las constantes no son cero se obtiene que:

$$\frac{\theta'}{\nu\theta} = -\lambda^2 ; \theta = C_3 e^{-\nu\lambda^2 t}$$

Nótese que si la constante es igual $+\lambda^2$, entonces $\theta = C_3 e^{+\nu\lambda^2 t}$ y la solución se vuelve enorme a $t=\infty$. También:

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\lambda^2 ; \psi = a_\lambda' \text{sen } \lambda z + b_\lambda' \text{cos } \lambda z$$

En donde a_λ' y b_λ' son constantes que dependen del valor de λ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} v_{y\lambda} &= C_1 e^{-\nu\lambda^2 t} (a_\lambda' \text{sen } \lambda z + b_\lambda' \text{cos } \lambda z) \\ &= e^{-\nu\lambda^2 t} (a_\lambda' \text{sen } \lambda z + b_\lambda' \text{cos } \lambda z) \quad (9) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (7) y (8) son soluciones de la ecuación (1). Como la ecuación (1) es una ecuación diferencial parcial y lineal, la suma de las ecuaciones (7) y (8) son también su solución.

$$v_y = v_{y0} + v_{y\lambda}$$

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right) + e^{-v\lambda^2 t} (a_\lambda \text{sen } \lambda z * b_\lambda \text{cos } \lambda z) \quad (9)$$

Si ahora sustituimos las condiciones a la frontera en (9) tendremos.

Condición a la frontera BC (1)

$$0 = 0 + b_\lambda e^{-v\lambda^2 t} ; b_\lambda = 0$$

Condición a la frontera BC (2)

$$V_h = V_h + a_\lambda e^{-v\lambda^2 t} \text{sen } \lambda h ; 0 = a_\lambda e^{-v\lambda^2 t} \text{sen } \lambda h$$

El lado derecho es cero si $a_\lambda = 0$ o si $\lambda h = 0$. Si $a_\lambda = 0$ se retira la dependencia de v_y con respecto al tiempo, por lo tanto $\lambda h = 0$ y entonces:

$$\lambda h = n\pi ; n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{h} \quad (10)$$

La ecuación (9) se convierte ahora en:

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right) + a_n e^{-v \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi z}{h} \right) \quad (11)$$

La constante a_n ha reemplazado a a_λ ya que λ está expresada en términos de n en la ecuación (10). Si $n = 1$, se obtiene una solución. Si $n = 2$ se obtiene otra solución y así seguido. En realidad, la suma de todas las soluciones es también una solución.

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-v \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi z}{h} \right) \quad (12)$$

La condición inicial se inserta ahora en la ecuación (12)

$$0 = V_h \left(\frac{z}{h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left(\frac{n\pi z}{h} \right) \quad (13)$$

Hay un número infinito de constantes que se deben evaluar en la ecuación (13) a_1, a_2, a_3, \dots . Estas pueden obtenerse usando el análisis de las series de Fourier. Aquí solo se presenta la solución. En principio se debe multiplicar ambos términos por

$$\text{sen} \left(\frac{m\pi z}{h} \right) dz$$

En donde m es un integrando e integrar desde 0 hasta h para obtener el siguiente resultado:

Respuesta

Este problema ha sido resuelto para coordenadas rectangulares (ver problema 3.6.1). Las ecuaciones diferenciales que lo describen pueden obtenerse de la tabla 3.4.1. Se observa que todos los términos del esfuerzo cortante en las ecuaciones (1) y (3), incluyendo: $\frac{\partial p^*}{\partial x}$ y $\frac{\partial p^*}{\partial z}$ son cero. La siguiente ecuación es la que resulta de la aplicación de la ecuación (2).

$$\frac{d(\tau_{zy})}{dz} = 0$$

$$\text{Y como: } \tau_{zy} = -\frac{\mu}{g_c} \left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} \quad (1)$$

$$\text{Entonces: } \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} \right] = 0, \text{ o } \left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} = \text{constante} = A^{0.5}$$

$$\text{Sacando raíz cuadrada, nos queda: } \frac{dv_y}{dz} = A \quad (2)$$

La solución para v_y queda:

$$v_y = Az + B$$

Las condiciones a la frontera son BC (1)

$$v_y = 0, \text{ a } z = 0$$

Las condiciones a la frontera BC (2)

$$v_y = V_h, \text{ a } z = h$$

Sustituyendo las condiciones a la frontera en la ecuación (2) da:

$$v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right)$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 3.6.1 para un fluido newtoniano. Para este tipo de movimiento, el esfuerzo cortante debe ser constante a través del sistema, sino habría una acumulación de momento dentro del fluido lo cual es físicamente imposible. Ya que: τ_{zy} debe ser constante, gradiente de velocidades

$\frac{dv_y}{dz}$ en la ecuación (19) debe ser también constante. Sin embargo, no se obtuvieron

los mismo resultados para un fluido no newtoniano que fluía entre dos placas paralelas en el ejemplo 3.6.3. La ecuación diferencial que describía este sistema era;

$$0 = -\frac{d(\tau_{zy})}{dz} - \frac{dp^*}{dy} \quad (3)$$

Las condiciones a la frontera son:

$$\text{BC(1)} \quad \text{a } z=0 \quad , \quad v_y = 0$$

$$\text{BC(2)} \quad \text{a } z = \frac{h}{2} \quad , \quad \frac{dv_y}{dz} = 0 \quad \text{debido a la simetría.}$$

El gradiente de velocidad en la mitad superior del sistema es una cantidad negativa. Notese que la Bc elimina la necesidad de trabajar con la raíz cuadrada de un número negativo. Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (3) da por resultado:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\mu}{g_c} \left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} \right] = \frac{dp^*}{dy}$$

Integrando una vez se obtiene:

$$\left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} = \frac{g_c}{\mu} \left(\frac{dp^*}{dy} \right) z + A$$

Aplicando BC(2)

$$A = -\frac{g_c}{\mu} \left(\frac{dp^*}{dy} \right) \frac{h}{2}$$

Asi que:

$$\left(\frac{dv_y}{dz} \right)^{0.5} = c \left(z - \frac{h}{2} \right) \quad (4)$$

En donde:

$$c = \frac{g_c}{\mu} \left(\frac{dp^*}{dy} \right)$$

Sacando la raíz cuadrada de (4) se obtiene:

$$\frac{dv_y}{dz} = c^2 \left(z^2 - zh + \frac{h^2}{4} \right)$$

Integrando de nueva cuenta:

$$v_y = c^2 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 h}{2} + \frac{h^2 z}{4} \right) + B$$

Aplicando BC(1) : B = 0, así que:

$$v_y = c^2 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 h}{2} + \frac{h^2 z}{4} \right)$$

Se deja al lector graficar el esfuerzo cortante contra la velocidad de corte. La velocidad máxima se obtiene a $z = h/2$.

$$v_{y \max} = c^2 h^3 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{24} c^2 h^3 = \frac{4}{96} c^2 h^3$$

La velocidad promedio está dada por:

$$\langle v_y \rangle = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} \left[c^2 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 h}{2} + \frac{h^2 z}{4} \right) \right] dz}{\int_0^{\frac{h}{2}} dz} = \frac{3}{96} c^2 h^3$$

La relación de la velocidad media a la máxima es:

$$\frac{\langle v_y \rangle}{v_{y \max}} = \frac{3}{4}$$

El flujo volumétrico está dado por:

$$Q = \langle v_y \rangle (\text{área}) = \frac{3}{96} c^2 h^3 \left(\frac{hl}{2} \right) = \frac{c^2 h^4}{64} l$$

Ejemplo 3.6.12

Se ha encontrado conveniente para el análisis de sistemas complejos dividirlos en dos partes. La primera consiste en una capa delgada, definida como capa de separación, la que está localizada cerca y sobre la superficie del sistema. Se supone entonces que todos los efectos viscosos están confinados en esta capa. La otra parte del sistema es la región afuera de la capa de separación en la que se supone que los efectos viscosos son despreciables. Consideremos el movimiento de un fluido que pasa sobre una superficie plana y delgada tal y como la presente en la figura 3.6.7. El grueso de la capa de separación para la transferencia de momento es δ_r y está definido en forma arbitraria como el punto en el cual $v_y = 0.99V_0$. Como no hay ningún obstáculo al movimiento del fluido arriba de la placa, la velocidad V_0 es en todos los lugares

uniforme. Obtenga las ecuaciones que describan el perfil de velocidades en el sistema en condiciones de régimen permanente.

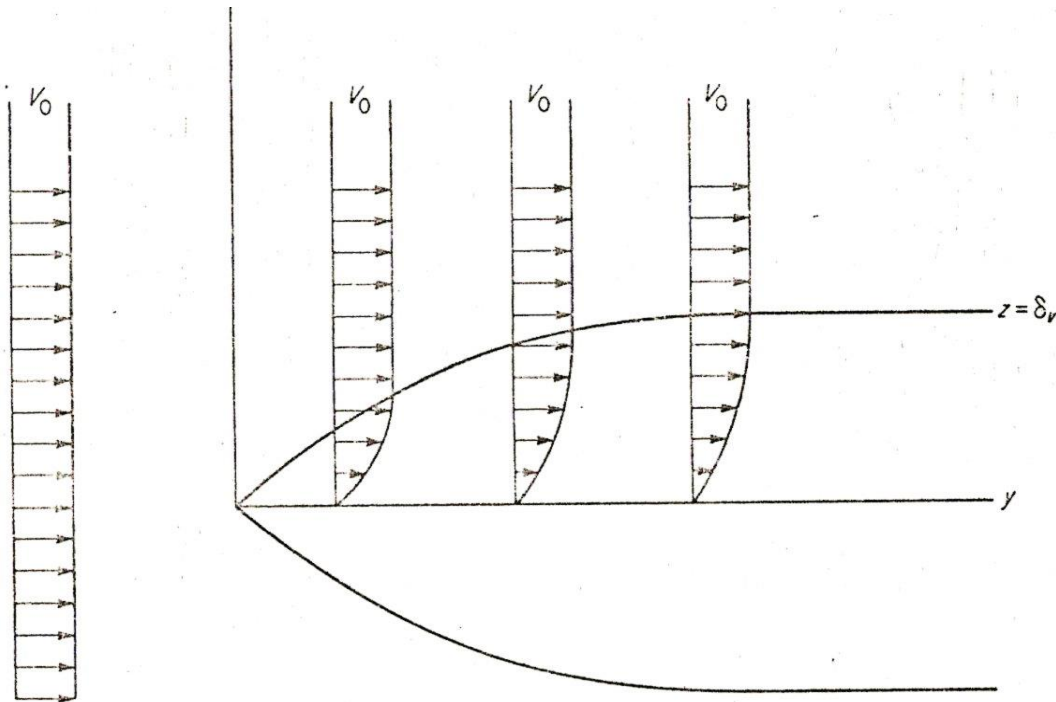


Fig. 3.6.7.

Respuesta

Se resolverá este sistema empleando coordenadas rectangulares y la tabla 3.4.4. Como el flujo es en dos dimensiones:

$$v_x = 0 \quad ; \quad v_y \neq 0 \quad ; \quad v_z \neq 0$$

El término v_x y sus derivadas son cero. Generalmente, cada componente de la velocidad es una función de la posición y el tiempo. En este caso.

$$v_y = v_y(x, y, z, t) \quad ; \quad v_z = v_z(x, y, z, t)$$

Pero basándonos en el enunciado del problema v_y y v_z no dependen de x y de t , por lo que: $v_y = v_y(y, z)$; $v_z = v_z(y, z)$

Las ecuaciones siguientes se obtienen a partir de la tabla 3.4.4.

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{g_c}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{g_c}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

Se puede notar que v_z es pequeño en comparación con v_y y por ello se puede suponer que los términos de la velocidad en la ecuación (2) sean cero. El término $\frac{\partial p^*}{\partial z}$ es también cero. El término $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ es pequeño comparado con $\frac{\partial v_y}{\partial z}$; por lo tanto $v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$ es del mismo orden de magnitud que $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$. El término $\frac{\partial p^*}{\partial y}$ es a través de la evidencia experimental pequeño en comparación con $v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ y por ello se hace despreciable. Por ello la ecuación que describe el sistema se convierte en:

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (3)$$

La ecuación de la continuidad de la tabla 3.4.2 nos da:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Las condiciones a la frontera son:

$$v_z = 0 \text{ a } z = 0; \quad v_y = 0 \text{ a } z = 0 \quad ; \quad v_y = V_0 \text{ a } z = \infty \quad , \quad v_y = V_0 \text{ a } y = 0 \text{ para cualquier } z.$$

Las ecuaciones 3 y 4 pueden ahora resolverse para dar los perfiles de velocidades en la capa de separación. No se presenta la solución. El perfil de velocidades fuera de la capa de separación es simplemente : $v_y = V_0$; $v_z = 0$.

Este método de análisis ha sido particularmente valioso para obtener la fuerza que ejerce un fluido en movimiento cuando pasa sobre un cuerpo sólido, tal como placas, esferas, cilindros , etc. Las fuerzas viscosas son generalmente de magnitud apreciable aun cuando la velocidad no pueda verse influida por los efectos viscosos. Este método es generalmente inadecuado para evaluar el flujo a través de conductos tales como tuberías.

3.7.- Análisis dimensional

Es importante mantener la homogeneidad dimensional de las ecuaciones. Vamos a aplicar el análisis a las ecuaciones de continuidad y las de Navir Stokes escribiendo las

ecuaciones en forma adimensional. Esto se puede efectuar poniendo cada variable en forma dimensional.

Primeramente examinaremos las variables de posición y de tiempo y las convertimos en variables adimensionales escribiendo un signo + sobre ellas.

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad (3.7.1) ; y^+ = \frac{y}{L} \quad (3.7.2) ; z^+ = \frac{z}{L} \quad (3.7.3)$$

En donde L es la longitud característica de la geometría del sistema.

$$t^+ = \frac{tV}{L} \quad (3.7.4)$$

En donde V es la velocidad que caracteriza a la velocidad variable en el sistema. El vector operador también puede escribirse en forma adimensional aplicando las ecuaciones (3.7.1) a (3.7.3) a ∇ y a ∇^2 .

$$\nabla^+ = L\nabla \quad (3.7.5)$$

$$\nabla^{2+} = L^2\nabla^2 \quad (3.7.6)$$

Las variables del sistema v , p también pueden expresarse en forma adimensional.

$$v^+ = \frac{v}{V} \quad (3.7.7) ; p^+ = \frac{p}{\frac{\rho V^2}{g_c}} \quad (3.7.8)$$

La selección de las relaciones adimensionales en las ecuaciones (3.7.1) a (3.7.8) es arbitraria. La experiencia y la intuición dictan generalmente los términos adimensionales apropiados.

Ahora escribiremos la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible en forma vectorial.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3.13)$$

Aplicando las ecuaciones (3.7.5) y 83.7.7) a la ecuación(3.3.13) nos da:

$$\frac{1}{L} \nabla^+ \cdot \mathbf{v}^+ = 0$$

Como L y V son constantes podemos escribir:

$$\frac{V}{L} \nabla^+ \cdot \mathbf{v}^+ = 0 \quad \text{o simplemente} \quad \nabla^+ \cdot \mathbf{v}^+ = 0 \quad (3.7.9)$$

La ecuación de Navier Stokes puede reescribirse despreciando los efectos gravitatorios como:

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{g_c} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.4.20)$$

Aplicando las ecuaciones (3.7.5) a (3.7.8) a la ecuación (3.4.20) da:

$$\frac{\rho V}{g_c L} \frac{D}{Dt^+} (V\mathbf{v}^+) = -\frac{1}{g_c L} \nabla^+ \rho V^2 p^+ + \frac{\mu}{g_c L^2} \nabla^{2+} (V\mathbf{v}^+)$$

Rearreglando esa ecuación tenemos que:

$$\frac{D\mathbf{v}^+}{Dt^+} = -\nabla^+ p^+ + \left(\frac{\mu}{LV\rho} \right) \nabla^{2+} \mathbf{v}^+ \quad (3.7.10)$$

El término adimensional $\left(\frac{LV\rho}{\mu} \right)$ está definido como el número de Reynolds y encuentra muchas aplicaciones en flujo de fluidos.

El examen de la ecuación (3.7.10) indica que dos diferentes patrones de flujo con igual número de Reynolds se describen por la misma ecuación. Si los dos sistemas tienen idénticas condiciones a la frontera y condiciones iniciales, se puede indicar que los dos sistemas de flujo son similares. También es conveniente resolver las ecuaciones en forma adimensional, para ello resolveremos uno de los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.7.1

Rehaga el ejemplo 3.6.1 usando el método del análisis dimensional.

Respuesta

La ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2 v_y}{dz^2} = 0 \quad (1)$$

La condición a la frontera 1 (BC 1) es:

$$A \quad z=0, v_y = 0$$

$$BC(2) \quad a \ z = h, v_y = V_h$$

Usando las cantidades adimensionales:

$$v_y^+ = \frac{v_y}{V_h} \quad ; \quad z^+ = \frac{z}{h}$$

Si metemos esas cantidades en la ecuación (1) tendremos:

$$\frac{V_h d^2 v_y^+}{h^2 dz^{2+}} = 0$$

$$\frac{d^2 v_y^+}{dz^{2+}} = 0 \quad (2)$$

La condición a la frontera BC(1) es:

$$\text{A } z^+ = 0, v_y^+ = 0$$

La condición a la frontera BC(2) da:

$$\text{A } z^+ = 1, v_y^+ = 1$$

La solución de la ecuación (2) es:

$$v_y^+ = Az^+ + B \quad (3)$$

Sustituyendo la condición a la frontera en (3) da:

$$B = 0; A = 1$$

Así que:

$$v_y^+ = z^+$$

Si se escribe esta ecuación en términos de las variables dimensionales tendremos.

$$\frac{v_y}{V_h} = \frac{z}{h} \quad \text{o} \quad v_y = V_h \left(\frac{z}{h} \right)$$

