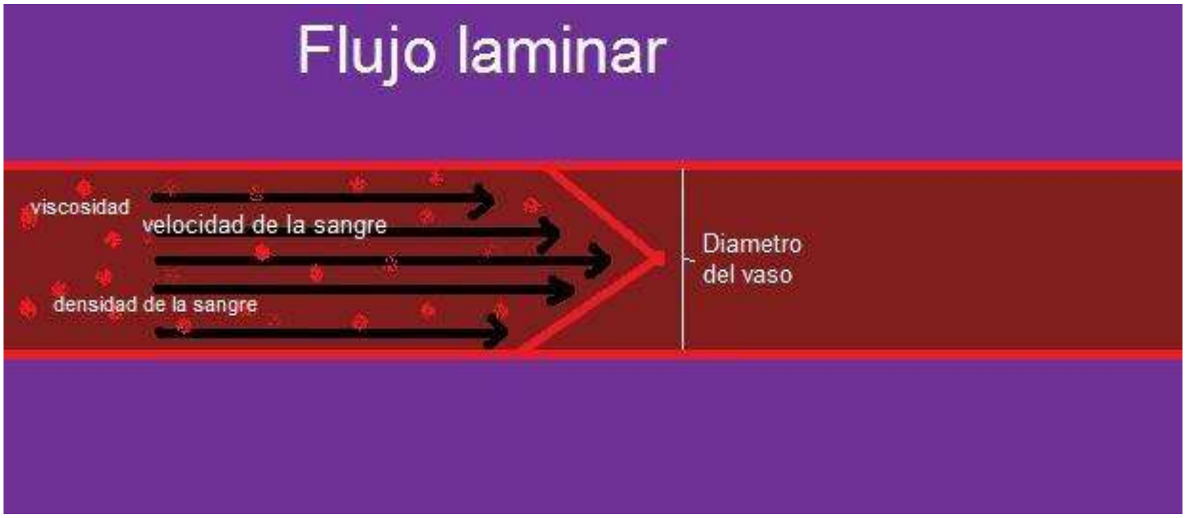


Capítulo 6

El flujo de fluidos por el interior de las tuberías y las pérdidas por fricción

La ecuación de Hagen y Poiseuille

En la primera mitad del siglo XIX, aparecieron los trabajos del ingeniero Gotthilf Ludwig Hagen (1797-1884). A él se le acreditan los primeros estudios e investigaciones sobre la resistencia que oponen al flujo un fluido que se desplaza por el interior de tubos.

Gotthilf Ludwig Hagen nació en 1797 en la ciudad de Koningsberg en la antigua Prusia. A la edad de 19 años decidió estudiar matemáticas y astronomía para posteriormente comenzar a trabajar como ingeniero en el diseño y construcción de diversas obras de tipo civil e hidráulico. Como resultado de sus viajes alrededor de Europa estudio una gran variedad de estructuras hidráulicas para el diseño y construcción de puertos y por ello pudo publicar un manual sobre hidráulica (Handbuch der Wassebaukunst).En el año de 1839 llevó a cabo una serie de medidas meticulosas sobre el flujo de agua en tubos de diámetro pequeño y ese mismo año publicó en Berlín un trabajo que tituló " Uber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Rohren". Pocos años después, el médico francés Jean Poiseuille repitió de forma independiente los mismos experimentos, pero usando tubos capilares, para simular los vasos sanguíneos del cuerpo humano y utilizando como fluidos: mercurio, aceite y agua.

Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869) nació en Paris, Francia allí estudió medicina, física y matemáticas graduándose de médico y se interesó en la presión arterial y la circulación de la sangre de manera que en 1844 llevó a cabo una serie de experimentos que le permitieron publicar un artículo titulado " Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de trés petits diámetres".

En dicho trabajo publicó los primeros experimentos que trataban sobre el rozamiento de los fluidos a baja velocidad en tuberías muy delgadas, logrando así, determinar la forma de flujo y la resistencia de este. Debido a las experiencias que anteriormente había llevado a cabo el científico prusiano Hagen a las fórmulas que describen este tipo de flujo se les conoce comúnmente como la relación o fórmula de Hagen –Poiseuille.

$$Ca = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L}$$

En donde Ca es el caudal o gasto volumétrico.

ΔP es la diferencia de presiones.

R es el radio del tubo.

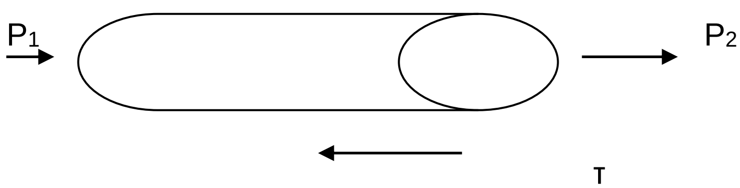
μ es la viscosidad del fluido.

L es la longitud del tubo.

Veinte años después se desarrolló el primer análisis teórico que explicaba las observaciones de los científicos anteriores. Franz Neumann(1798-1895) y Eduard Hagenbach (1833-1910), en forma independiente obtuvieron las expresiones para la forma parabólica de ese tipo de flujo. Dichas investigaciones fueron de gran ayuda para describir los perfiles de velocidad.

Desarrollo de las ecuaciones de Hagen y Poiseuille

Tomemos un ducto como el que se indica por el cual se mueve un fluido a régimen permanente:



Si el fluido se mueve a través del ducto se producirá una diferencial de presión ΔP. Es decir, una fuerza que favorece el flujo.

$F = \Delta P \, A$

En donde A es el área Transversal.

A ese movimiento, si el fluido tiene viscosidad se opone un esfuerzo cortante, como rozamiento, sobre las paredes del ducto.

$F = \tau \, S$

En donde S es el área de la envolvente $= 2 \pi r L$

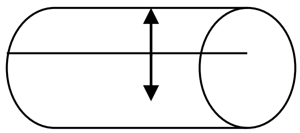
Y τ el esfuerzo cortante.

En el equilibrio:

$\Delta P\ \pi\ r^2 = \tau\ 2\ \pi\ r\ L$

Si el fluido es newtoniano entonces:

$\tau = -\ \mu\ du/dr$



$\Delta P\ \pi\ r^2 = -\ \mu\ (du/dr)\ 2\pi\ r\ L$

$du = -\ (\Delta P\ r/\ 2\ L\ \mu)\ dr$

Si se desea saber la velocidad del fluido en cualquier punto r del ducto se debe integrar desde la pared cuando r=R y la velocidad u=0:

$$\int_0^u du = -\frac{\Delta P}{2L\mu}\int_R^r r dr$$

Por lo que:

$u = \frac{\Delta P}{4L\mu}(R^2 - r^2)$ (2)

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Hagen y Poiseuille. Esta ecuación predice un perfil parabólico de velocidad.

Si lo que se desea es obtener el caudal que pasa por el ducto, entonces:

En donde:

$A = \pi\ r^2$; $dA = 2\ \pi\ r\ dr$, por lo tanto:

$Ca = \int_0^K \frac{\Delta P}{4L\mu}(R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{2\pi\Delta P}{4L\mu}\int_0^K r(R^2 - r^2)dr$

$A = \pi\ r^2$; $dA = 2\ \pi\ r\ dr$, por lo tanto:

$Ca = \int_0^K \frac{\Delta P}{4L\mu}(R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{2\pi\Delta P}{4L\mu}\int_0^K r(R^2 - r^2)dr$

$$Ca = \frac{\pi\Delta P}{2L\mu}\left[\int_0^K rR^2 dr - \int_0^r r^3 dr\right]$$

Por lo que:

$$Ca = \frac{\pi \Delta P}{2L\mu}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi \Delta P R^4}{8L\mu}$$

Pero 2R = D y entonces:

$$\mu = \frac{\pi \Delta P R^4}{8LCa}$$

Si lo que se desea es obtener la velocidad media entonces:

$U_m = Ca/A = Ca/\pi R^2$

$u_m = \frac{\pi \Delta P R^4}{8L\mu\pi R^2} = \frac{\Delta P R^2}{8L\mu} = \frac{\Delta P D^2}{32L\mu}$ Ecuación de Poiseuille.

Dividiendo:

$$\frac{u}{u_m} = \frac{8L\mu \Delta P}{\Delta P R^2 4L\mu}(R^2 - r^2) = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Si r=0 o sea en el centro del ducto $u = u_m\, 2$; esta es la velocidad máxima. Es decir la velocidad máxima es el doble de la velocidad promedio.

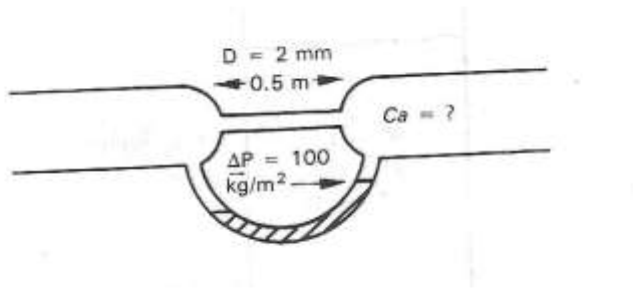
De la ecuación de Poiseuille se obtiene que:

$\Delta P = u_m \frac{32L\mu}{D^2}$ Esa ecuación predice las caídas de presión para un fluido newtoniano que circula por el interior de un ducto. Se ha encontrado que la ecuación anterior se aplica bien a flujo laminar, es decir cuando el número de Reynolds es menor de 2100, pero no se ajusta para otros patrones de flujo.

Ejemplo 1

Se utiliza un tubo capilar para medir el flujo de un líquido cuya densidad es de 0.875 kg /L y con viscosidad de 1.13 cps. El capilar tiene un diámetro interno de 2 mm y una longitud de 0.5 m. ¿Si la caída de presión a través del capilar es de 100 kg /m^2, cuál es el caudal que pasa por el medidor?

1.- Traducción.



2.- Planteamiento

2.1.- Discusión.

Si el fluido se mueve a régimen la minar se puede aplicar la ecuación de Poiseuille.

$$\Delta P = u_m \frac{32L\mu}{D^2}$$

3.- Cálculos.

3.1.- Velocidad media.

$$u = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} gc = \frac{100 \times 9.81 \times (0.002)^2}{32 \times 1.13 \times 10^{-3} \times 0.5} = 0.217 \frac{m}{s}$$

3.2.- Reynolds

$$Re = \frac{0.002 \times 0.217 \times 873}{1.13 \times 10^{-3}} = 335$$

3.4.- Caudal.

$$Ca = u\,A = 0.217\frac{m}{s} \times \frac{\pi}{4}(0.002)^2 m^2 = 6.8138 \times 10^{-7}\frac{m^3}{s} = 2.45\frac{L}{h}$$

4.- Resultado.

El flujo será de 2.45 L /h.

Ejemplo 2

A través de una tubería de 20 cm de diámetro y 60 m de longitud fluye un líquido. El esfuerzo cortante en la pared es de 4.6 kg / m^2. Calcule la fuerza necesaria para que el fluido se ponga en movimiento.

2.- Planteamiento.

2.1.- Discusión.

La caída de presión debe ser igual al esfuerzo cortante.

$$\Delta P = \frac{F}{A}$$

$$F = \Delta P \times \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\tau = \frac{F}{\pi DL} = \frac{\Delta PD}{\$L}$$

3.- Cálculos.

3.1.- Caída de presión.

$$\Delta P = \frac{4 \times 60m \times 4.6 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}}{0.2m} = 5520 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$$

3.2.- Fuerza

$$F = 5520 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} \times 0.785 \times (0.2)^2 m^2 = 173.32\overrightarrow{kg}$$

4.- Resultado.

La fuerza es de 173.32 kg fuerza.

Ejemplo 3

Un aceite fluye en régimen laminar a través de una tubería de 2 cm de diámetro interno a razón de 23 L /min. La viscosidad del aceite es de 300 cps y su densidad de 0.933kg /L. Calcule la caída de presión por metro de tubo, el esfuerzo cortante en la pared, la velocidad en el centro del tubo y la posición radial a la cual la velocidad puntual es igual a la velocidad promedio.

2.- Planteamiento

2.1.- Velocidad media

$$\hat{u} = \frac{Ca}{A}$$

2.2.- Caída de presión.

$$\Delta P = \frac{32uL\mu}{D^2 gc}$$

2.3.- Esfuerzo cortante en la pared.

$$\tau = \frac{\Delta PR}{2L}$$

2.4.-Velocidad puntual.

$$\frac{u}{\hat{u}} = 2\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

3.- Cálculos.

3.1.- Velocidad promedio.

$$\hat{u} = \frac{0.023m^3}{(0.02)^2 m^2 \times 60\, min \times \frac{\pi}{4}} = 1.22\,\frac{m}{s}$$

3.2.- Caída de presión.

$$\Delta P = \frac{32\left(1.22\frac{m}{s}\right)\times 1m \times 0.3\frac{kg}{ms}}{(0.02)^2 m^2 \times 9.81\frac{\frac{kgm}{s^2}}{kg}} = 2984.7\frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} = 0.298\,\frac{\overrightarrow{kg}}{cm^2}$$

3.3.- Esfuerzo cortante.

$$\tau = \frac{(0.01m) \times 2984.7\frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}}{2 \times 1m} = 14.92\,\frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$$

3.4.- Velocidad en el centro.

$$u = 2\hat{u}\,\left[1 - \frac{R^2}{R^2}\right] = 2\left(1.22\,\frac{m}{s}\right) = 2.44m/s$$

3.5.- Punto en donde la velocidad iguala a la media.

$$\frac{u}{\hat{u}} = 2\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{u}{2\,\hat{u}}\right) R^2}$$

$$r = \sqrt{(0.01)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 0.00707 \text{ m}$$

4.- Resultados.

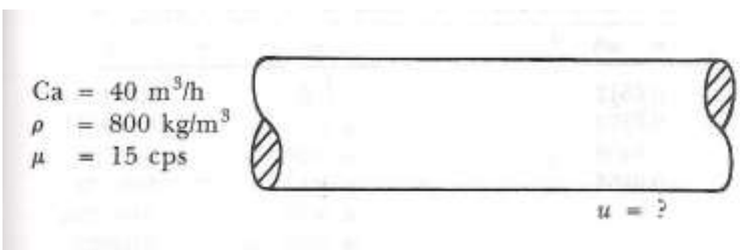
La velocidad en el centro es de 2.44m /s, el punto en donde la velocidad iguala a la media es a los 0.00707 m desde el centro.

Ejemplo 4

Por una tubería con 0.68 m de diámetro interno fluye un aceite con una viscosidad de 15 cps y una densidad de 800 kg / m^3 y un caudal de 40 m^3/h.

Determine el perfil de velocidades y la caída de presión por metro de tubería de acuerdo con la ecuación de Hagen y Poiseuille.

1.-Traducción



2.- Planteamiento.

2.1.- Discusión

Si el fluido se mueve en régimen laminar se puede aplicar la ecuación de Poiseuille.

2.2. Perfil de velocidades.

Para régimen laminar.

$$\frac{u}{\hat{u}} = 2\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

2.3.- Caída de presión

Para régimen laminar.

$$\Delta P = \frac{32uL\mu}{D^2 gc}$$

3.-Cálculos

3.1.- Velocidad

$$\tilde{u} = \frac{Ca}{A} = \frac{40\,\frac{m^3}{h}}{\frac{\pi}{4}(0.68)^2 m^2 \times 3600\,\frac{s}{h}} = 0.0306\,\frac{m}{s}$$

3.2.- Número de Reynolds.

$$Re = \frac{D\,\bar{\rho}\tilde{u}}{\mu} = \frac{800\,\frac{kg}{m^3} \times 0.68\,m \times 0.0306\,\frac{m}{s}}{15 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{ms}} = 1110$$

3.3.- Perfil de velocidades

$$u = 2(0.0306)\left[1 - \frac{r^2}{(0.34)^2}\right] = 0.0612\left[1 - \frac{r^2}{0.116}\right]$$

Mediante la ecuación de Poiseuille se obtienen los datos de r y u.

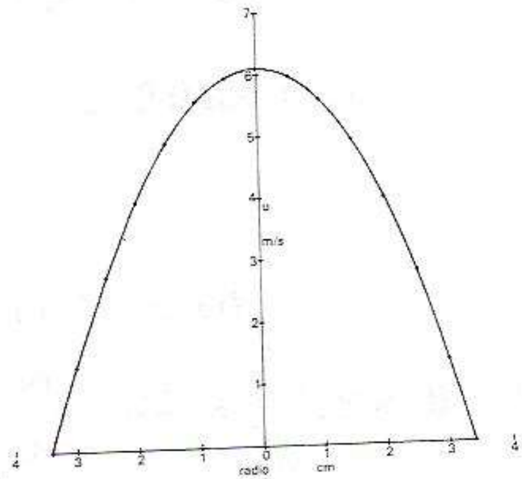
r m	u m/s
0	0.0612
± 0.085	0.0574
± 0.17	0.0459
± 0.255	0.0268
± 0.340	0

r	u
0	0.0612
± 0.05	0.059881
± 0.10	0.05592
± 0.15	0.04932
± 0.20	0.040096
± 0.25	0.02822
± 0.30	0.013717
± 0.34	0

3.4.- Caída de presión.

$$\Delta P = \frac{1m \times 0.0306\,\frac{m}{s} \times 32 \times 15 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{ms}}{(0.68)^2 m^2 \times 9.81\,\frac{N}{\overrightarrow{kg}}} = 0.0032379\,\frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$$

4.- Resultados.

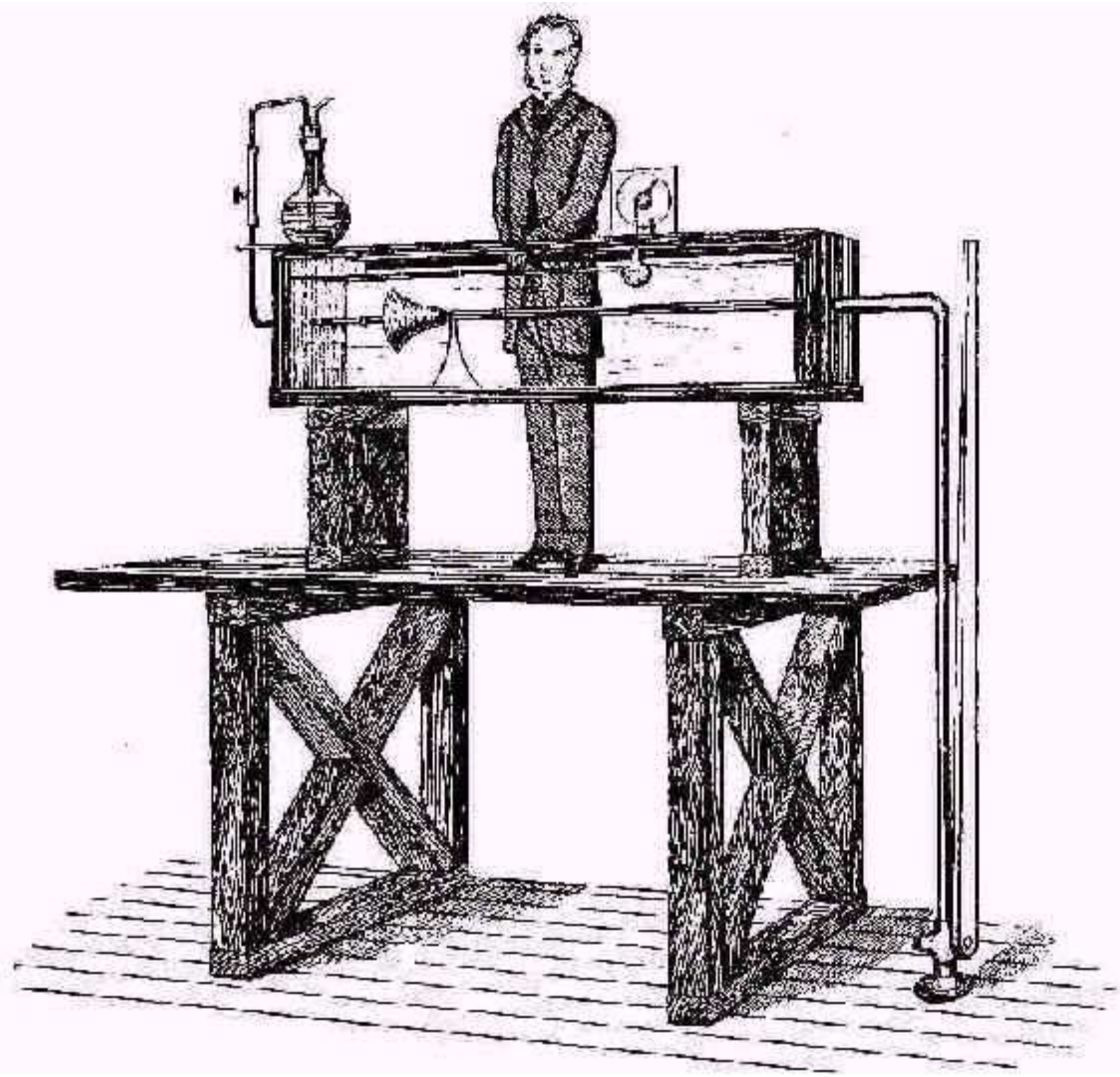


El perfil de velocidades es:

La caída de presión es de 0.0032379 kg fuerza / m^2 por metro de tubo.

Las ecuaciones de Darcy, Weisbach y Fanning

Los primeros experimentos cuidadosamente documentados del rozamiento en flujos de baja velocidad a través de tuberías fueron realizados independientemente en 1839 por el fisiólogo francés Jean Louis Marie Poiseuille, que estaba interesado por las características del flujo de la sangre, y en 1840 por el ingeniero hidráulico alemán Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. El primer intento de incluir los efectos de la viscosidad en las ecuaciones matemáticas se debió al ingeniero francés Claude Louis Marie Navier en 1827 e, independientemente, al matemático británico George Gabriel Stokes, quien en 1845 perfeccionó las ecuaciones básicas para los fluidos viscosos incompresibles. Actualmente se las conoce como ecuaciones de Navier-Stokes, y son tan complejas que sólo se pueden aplicar a flujos sencillos. Uno de ellos es el de un fluido real que circula a través de una tubería recta. El teorema de Bernoulli no se puede aplicar aquí, porque parte de la energía mecánica total se disipa como consecuencia del rozamiento viscoso, lo que provoca una caída de presión a lo largo de la tubería. Las ecuaciones sugieren que, dados una tubería y un fluido determinados, esta caída de presión debería ser proporcional a la velocidad de flujo. Los experimentos realizados por primera vez a mediados del siglo XIX demostraron que esto sólo era cierto para velocidades bajas; para velocidades mayores, la caída de presión era más bien proporcional al cuadrado de la velocidad. Este problema no se resolvió hasta 1883, cuando el ingeniero británico Osborne Reynolds demostró la existencia de dos tipos de flujo viscoso en tuberías. En el año de 1883 Reynolds se interesó por el estudio de la dinámica de los fluidos, dichas investigaciones concernían el estudio y caracterización de los diferentes tipos de régimen a lo largo de tuberías, cuando un fluido pasa por el interior de ellas. Así en 1883 llevó a cabo su famoso experimento, el cual sirvió para poner en evidencia las diferencias entre el flujo laminar y el flujo turbulento. Dicho experimento consistía en inyectar colorante en el seno de un líquido, el cual circulaba por el interior de un tubo transparente de sección circular constante. Con esos experimentos publicó:



"An *experimental investigation of the circunstances which determine whether the motion of water shall be direct o sinuous and of the law of resistance in parallel channels."*

Como resultado de esas investigaciones se demostró la importancia de una relación o cociente conocido más tarde como el número de Reynolds. Dicha relación es un número adimensional que interviene en muchas aplicaciones de flujo de fluidos y que es igual a:

$$Re = \frac{Du\rho}{\mu}$$

En donde: D es el diámetro del ducto, u la velocidad media del fluido, ρ la densidad del fluido y μ la viscosidad del mismo.

A partir de esos experimentos se pudo demostrar que si un fluido se mueve en régimen laminar las caídas de presión pueden determinarse mediante las ecuaciones de Hagen y Poiseuille, pero que no pueden aplicarse esas ecuaciones a un fluido que se mueve con Reynolds mayores a 2100 .A velocidades bajas, las partículas del fluido siguen las líneas de corriente (flujo laminar), y los resultados experimentales coinciden con las predicciones analíticas. A velocidades más elevadas, surgen fluctuaciones en la velocidad del flujo, o remolinos (flujo turbulento), en una forma que ni siquiera en la actualidad se puede predecir completamente. Reynolds también determinó que la transición del flujo laminar al turbulento era función de un único parámetro, que desde entonces se conoce como número de Reynolds. Si el número de Reynolds —que carece de dimensiones y es el producto de la velocidad, la densidad del fluido y el diámetro de la tubería dividido entre la viscosidad del fluido— es menor de 2.100, el flujo a través de la tubería es siempre laminar; cuando los valores son más elevados suele ser turbulento. El concepto de número de Reynolds es esencial para gran parte de la moderna mecánica de fluidos.

Ejemplo 6

Por el interior de un tubo de 0.0525 m de diámetro circula agua a 15 ° C con una velocidad de 0.5 m /s ¿Cuál será el número de Reynolds?

$$Re = \frac{D\,u\,\rho}{\mu} = \frac{0.0525 \times 0.5 \times 999}{1.14 \times 10^{-3}} = 23000$$ El flujo es por lo tanto turbulento

Muchos científicos se pusieron a trabajar para tratar de encontrar una ecuación que predijera las pérdidas por presión cuando fluye un fluido por el interior de una tubería, entre ellos destaca la figura de Heri Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) quien realizó un gran número de experimentos sobre la resistencia que presentan los fluidos en la filtración y, en el flujo en cañerías y en canales abiertos. Este ingeniero francés adquirió sus conocimientos básicos en la Ecole des ponts et chaussees y como ingeniero civil trabajando en el diseño de puentes, canales y puertos. En 1857 Darcy publicó un trabajo llamado " *Recherches experientales* *relatives au mouvement de l'eau dans les tuyeaux*" que sirvió de base para la ecuación de Darcy- Weisbach.

Heri Philibert Gaspard Darcy

Julius Ludwig Weisbach (1806-1871) quien propuso en 1845 la ecuación que ahora utilizamos para determinar las pérdidas por fricción en tuberías fue un ingeniero civil alemán que realizó numerosos trabajos relacionados con la hidráulica, los que publicó en tres volúmenes bajo el título de "*Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinen-Mechanik*" que se publicó en 1850. Sus trabajos junto con los de Darcy sirvieron para publicar la ecuación:

$$Hf = \frac{\sum F}{M} = f_D \frac{u^2}{2g_c D} L$$

En donde Hf es la pérdida por fricción, por unidad de masa.

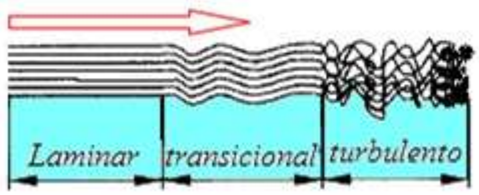
L es la longitud de la tubería; u es la velocidad promedio del fluido

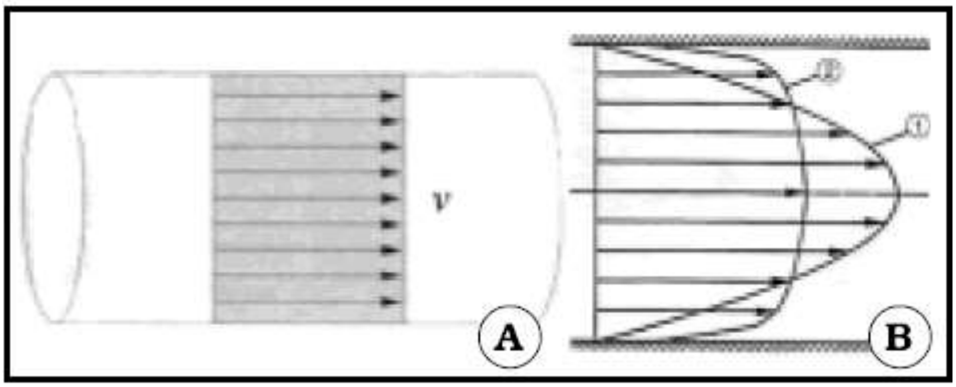
D es el diámetro de la tubería, g_c es el factor de conversión; f_D es el factor de fricción de Darcy.

Es importante anotar que la ecuación de Weisbach, no proporcionaba por aquél entonces los suficientes y adecuados datos para la obtención del factor de fricción, por lo que no resultó en aquel entonces muy satisfactoria para los cálculos.

Para el año de 1877, John Thomas Fanning (1837-1911), un ingeniero hidráulico de origen norteamericano publicó una serie de compilaciones para el factor de fricción de Darcy en función del material del tubo, del diámetro y la velocidad, utilizando para ello datos de Darcy. Como Fanning utilizó el radio hidráulico en vez del diámetro, en la ecuación de fricción, el valor del factor que el utilizó o factor de fricción de Fanning vale únicamente ¼ del valor de fricción de Darcy. $f_D = 4f_f$

La ecuación de Darcy-Weisbach no tuvo un uso universal y útil, hasta que se desarrolló el diagrama atribuido a Moody en el año de 1944, ya que las numerosas ecuaciones que definían el cálculo de los factores de fricción para los diferentes regímenes de flujo y rugosidades de las tuberías impedían el cálculo mediante las reglas de cálculo que se emplearon por los ingenieros hasta pasados los años sesenta del siglo XX.





Perfiles de velocidades A flujo tapón (turbulento), B flujo laminar

Como el estudio del factor de fricción es complicado, uno de los métodos que se siguieron para determinar de cuales variables dependía es el llamado análisis dimensional.

Uno de esos métodos es llamado análisis dimensional de Rayleigh.

En ese método se coloca la variable que se quiere identificar del lado izquierdo y las supuestas variables de que depende del lado derecho. Por ejemplo si se quiere investigar de que depende la caída de presión que sufre un fluido cuando se mueve por el interior de un tubo cilíndrico se encontrará que:

$$\Delta P = f\ (D, u, \rho, \mu, L)$$

O que:

$$\Delta P = C_1 D^a u^b \rho^c \mu^d L^e$$

En donde ΔP es la caída de presión, D es el diámetro de la tubería, u es la velocidad promedio que lleva el fluido dentro de la tubería, ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad del fluido y L la longitud del ducto.

Pero:

$$\Delta P = \frac{F}{L^2} = \frac{ML}{\theta^2 L^2} = \frac{M}{\theta^2 L}$$

Siendo M la masa, L la longitud, θ el tiempo y F la fuerza que son magnitudes fundamentales dimensionales. De acuerdo con lo anterior entonces:

D=L ; L = L ; $u = \frac{L}{\theta}$;$\rho = \frac{M}{L^3}$;$\mu = \frac{M}{L\theta}$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de la caída de presión se obtiene que:

$$\frac{M}{L\theta^2} = C_1 L^a \left(\frac{L}{\theta}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{L\theta}\right)^d L^e$$

Para que la ecuación sea dimensionalmente consistente la suma de los exponentes de cada dimensión debe ser la misma en ambos lados de la ecuación.

Para M 1= c + d

Para L -1=a+b-3c-d+e

Para θ -2 = -b –d

Dado que existen 3 ecuaciones con 5 incógnitas, sólo se resolver el sistema poniendo a tres incógnitas en función de dos de ellas. En este caso resolviendo para a, b y c en términos de d y e obtenemos:

C= 1- d

B = 2 –d

A = -d-e

Sustituyendo esto en la ecuación:

Para que la ecuación sea dimensionalmente consistente la suma de los exponentes de cada dimensión debe ser la misma en ambos lados de la ecuación.

$$\Delta P = C_1 D^{-d-e} u^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d L^e$$

De donde:

$$\Delta P = C_1 \left(\frac{\mu}{\rho D u}\right)^d \left(\frac{L}{D}\right)^e u^2 \rho$$

$$\frac{\Delta P}{u^2\rho} = C_1\left(\frac{1}{Re}\right)^d\left(\frac{L}{D}\right)^e$$

Experimentalmente se encontró que para flujo turbulento e =1, así que:

$$\frac{\Delta PD}{u^2\rho L} = C_1\left(\frac{1}{Re}\right)^d$$

que: $\frac{\Delta P}{\rho}=\varphi\frac{u^2}{D}L$

En donde $\varphi=\frac{C_1}{Re^d}$

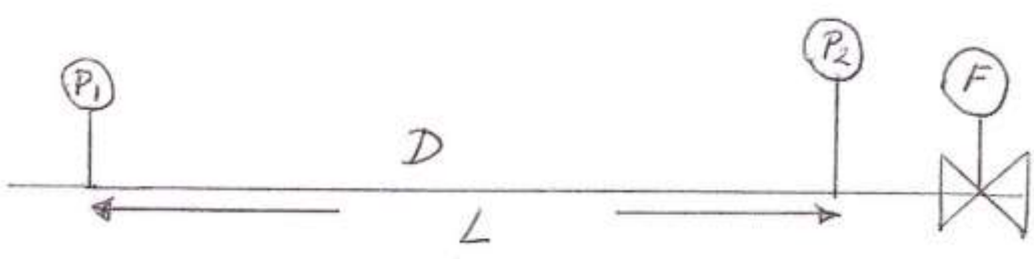
Como el factor f_D o factor de fricción de Darcy está dado por:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = f_D\frac{u^2}{2D}L$$

$$f_D = 4f_f = 4f$$

En donde $f = \frac{momentum\ total}{momentum\ turbulento}$

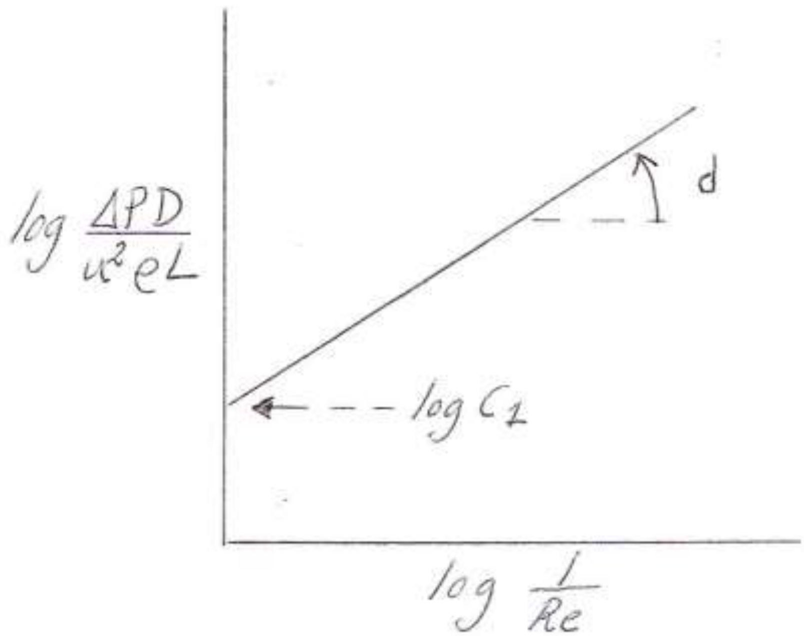
Los valores de los factores de fricción se obtuvieron a partir de experimentos llevados a cabo en los laboratorios en los que se hizo fluir líquidos por dentro de tuberías de diferentes diámetros y longitudes y a diferentes flujos, en sistemas parecidos al que se muestra a continuación.



La ecuación obtenida a partir del análisis dimensional se puede poner como:

$$log\frac{\Delta PD}{u^2\rho L} = logC_1 + dlog\left(\frac{1}{RE}\right)$$

Por lo tanto, a partir de los experimentos se pueden obtener los valores de las constantes. De esos experimentos se encontró que:



Blasius (1911). Propone una expresión en la que f_f viene dado en función del Reynolds, válida para tubos lisos, en los que ε_r no afecta al flujo al tapar la subcapa laminar las irregularidades. La ecuación es válida hasta Re < 100000:

$$\boxed{f = 0{,}3164 \cdot Re^{-0{,}25}}$$

$para\ tubos\ lisos\ y\ Re > 10\ 000$

Para flujo laminar se encontró que:

$f_f = \frac{32}{Re}$

Prandtl y Von-Karman (1930). Ampliaron el rango de validez de la fórmula de Blasius para tubos lisos:

$$\boxed{1 / \sqrt{f} = -2 \log (2{,}51 / Re\sqrt{f})}$$

Se encontró además, que si hay rugosidad el factor de fricción cambia en el regimen turbulento

Nikuradse en 1933 propuso una ecuación válida para tuberías rugosas:

$$\mathbf{1 / \sqrt{f} = - 2 \log (\varepsilon / 3{,}71\ D)}$$

Colebrook-White en 1939 agruparon las dos expresiones anteriores en una sola, que es además válida para todo tipo de flujos y rugosidades. Es la más exacta y universal, pero el problema radica en su complejidad y en que requiere de iteraciones:

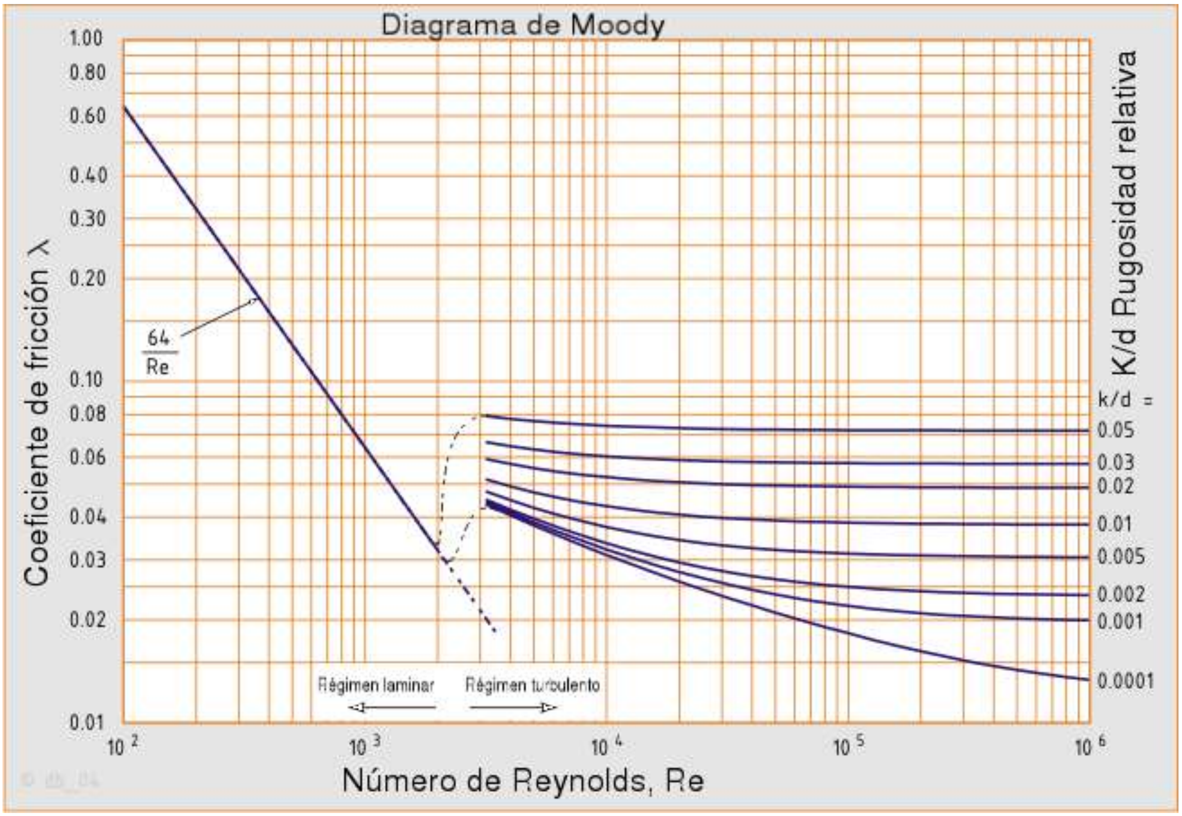
$$\mathbf{1 / \sqrt{f} = - 2 \log [(\varepsilon / 3{,}71\ D) + (2{,}51 / Re\sqrt{f}\ )]}$$

Así, para tubos rugosos y Re > 10000

$$\sqrt{\frac{1}{f_f}} = 4.06 log\left(\frac{D}{\epsilon}\right) + 2.16$$

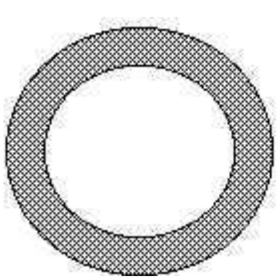
En donde ε es la rugosidad del tubo que se obtiene experimentalmente.
Para flujo transicional 2100< Re > 10000 , el factor de fricción es:

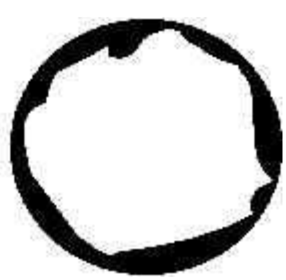
$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4\ log\left(\frac{D}{\epsilon}\right) + 2.28 - 4 log\left(4.67\frac{\frac{D}{\epsilon}}{Re\sqrt{f_f}} + 1\right)$$

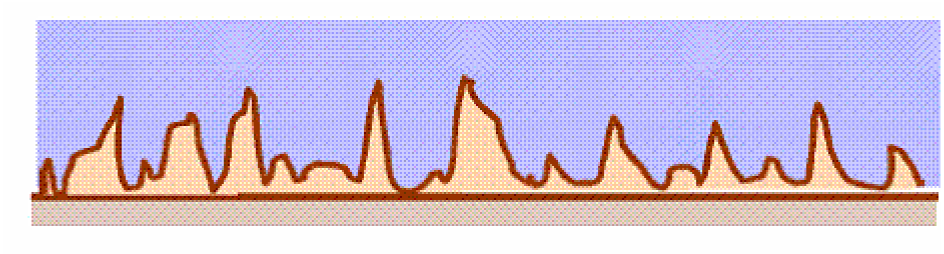


Un ingeniero norteamericano Lewis Ferry Moody (1880-1953) empleó las ecuaciones antes citadas para desarrollar el diagrama de Moody que apareció en 1944. Dicho diagrama fue muy utilizado en el cálculo de flujo de fluidos y permite obtener rápidamente el valor del factor de fricción con el cual se puede obtener las pérdidas de presión por fricción mediante la ecuación de Darcy ese factor de fricción se presenta en función del número de Reynolds y del factor de rugosidad o de la rugosidad relativa. El **diagrama de Moody** es la representación gráfica en escala doblemente logarítmica del factor de fricción en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa de una tubería.

<



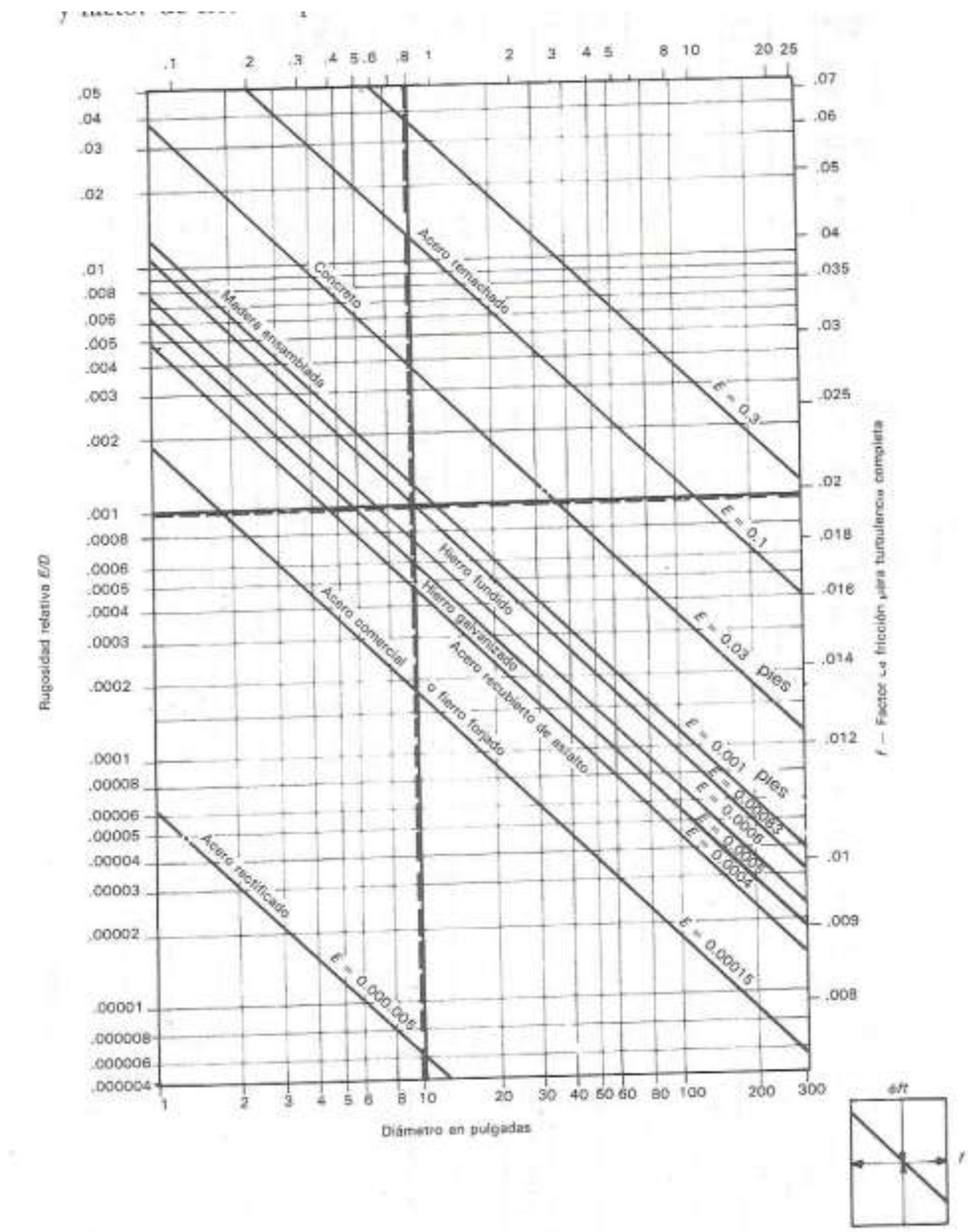




Tuberías   rugosas y lisas.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de rugosidad absoluta para distintos materiales:

RUGOSIDAD ABSOLUTA DE MATERIALES				
Material	**ε (mm)**		**Material**	**ε (mm)**
Plástico (PE, PVC)	0,0015		Fundición asfaltada	0,06-0,18
Poliéster reforzado con fibra de vidrio	0,01		Fundición	0,12-0,60
Tubos estirados de acero	0,0024		Acero comercial y soldado	0,03-0,09
Tubos de latón o cobre	0,0015		Hierro forjado	0,03-0,09
Fundición revestida de cemento	0,0024		Hierro galvanizado	0,06-0,24
Fundición con revestimiento bituminoso	0,0024		Madera	0,18-0,90
Fundición centrifugada	0,003		Hormigón	0,3-3,0



Con el mejoramiento de los métodos computacionales y las mejoras en las computadoras u ordenadores se han ofrecido numerosas ecuaciones que ya no requieren el uso del diagrama de Moody y que dan factores de fricción muy cercanos a los reales. Por ejemplo tenemos las siguientes ecuaciones:

Stuart W.Churchill

$$f_D = 8 \times \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{\frac{3}{2}}} \right]^{1/12}$$

En donde:

$$A = \left[2.457 \ln \frac{1}{\left(\frac{7}{Re}\right)^{0.9} + \frac{0.27 \in}{D}}\right]^{16}$$

$$B = \left(\frac{37530}{Re}\right)^{16}$$

M.Sacham

$$f_D = \left\{-2\, log \left[\frac{\in}{3.7D} - \frac{5.02}{Re}\, log \left(\frac{\in}{3.7D} + \frac{14.5}{Re}\right)\right]\right\}^{-2}$$

Chem

$$f_D = \left[-2\, log \left(\frac{\in}{3.7065D} - \frac{5.0452}{Re}\, log \left\{\frac{\left(\frac{\in}{D}\right)^{1.1098}}{2.8257} + \left(\frac{7.149}{Re}\right)^{0.891}\right\}\right)\right]^{-2}$$

Zaim

$$f_D = \frac{1/4}{\left[0.57 - 0.4343\, ln \left(\frac{\in}{D} + \frac{21.25}{Re^{0.9}}\right)\right]^2}$$

Swame y Jain

$$f_D = 0.25 \left(log \frac{1}{3.7 \frac{D}{\in}} + \frac{5.74}{Re}\right)^{-2}$$

Pavlov

$$f_D = \left\{-2 log \left[\frac{1}{3.7}\left(\frac{\in}{D}\right) + \left(\frac{6.81}{Re}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2}$$

Altshul

$$f_D = 0.11 \left[\left(\frac{\in}{D}\right) + \left(\frac{68}{Re}\right)\right]^{0.25}$$

Para cálculos rápidos se recomienda Pavlov.

Ejemplo 7

Por una tubería fluye un fluido con un Reynolds de 200 000, si la rugosidad relativa de la tubería es de 0.01 ¿Cuál será el valor del coeficiente de fricción f_D?

Por medio del diagrama de Moody se encuentra f_D=0.04

Por medio de la ecuación de Zaim el valor es de 0.042

Por medio de la ecuación de Pavlov el valor es de 0.038

Por Altshul es de 0.0 35

Por Swame y Jain 0.038

Ejemplo 8

Por una tubería de 0.0525 m de diámetro interno circula agua a 15 ° C con una velocidad de 0.5 m/s. La tubería es de acero galvanizado ¿Cuál será la caída de presión esperada en cien metros de tubería?

$Re = \frac{D\,u\,\rho}{\mu} = \frac{0.0525 \times 0.5 \times 999}{1.14 \times 10^{-3}} = 23000$ El Reynolds es turbulento

La rugosidad relativa es de 0.0025

El factor f_D por medio del diagrama de Moody da: 0.030

Por medio de Zaim se obtiene f_D= 0.0303

De la ecuación de Darcy

$$\frac{\sum F}{M} = \frac{\Delta P}{\rho} = f_D \frac{u^2}{2D} L = 0.03 \frac{0.5^2 \times 100}{2 \times 0.0525} = 71.42 \frac{J}{kg}$$

$$\Delta P = 71.42 \times 999 = 71\ 357\ Pa == .7\ atm = 0.73 \frac{\overrightarrow{kg}}{cm^2}$$

Resultado.

La caída de presión será de 71 357 Pa.

Perfil universal de Velocidades

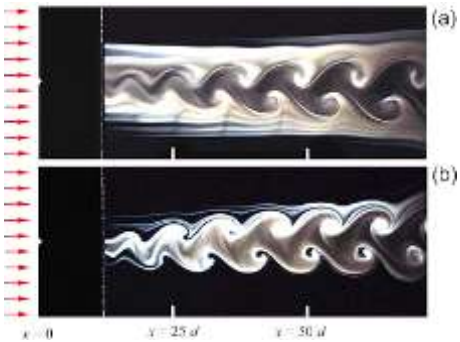
Las ecuaciones de Hagen y Poiseuille describen bien el perfil de velocidades cuando el fluido que viaja por el interior de una tubería cilíndrica está a régimen laminar., pero no se aplica cuando el fluido viaja a Reynolds mayores de 2100.

Para describir el flujo dentro de un tubo Theodore von Karman (1881-1963) y Johan Nikuradse (1894-1979) razonaron que el aumento en la caída de presión a régimen turbulento no se debía solamente a la viscosidad, sino también a la turbulencia producida por la aparición de remolinos.


Johan Nikuradse


Theodore Von Karman

Los remolinos formados cuando el Reynolds es mayor de 2100 salen de una región de alta velocidad y viajan hasta una de baja y se desplazan hasta el punto en que su velocidad sea igual a la que tiene el fluido en ese punto.



De acuerdo con ellos la velocidad cambia de:

$$u + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) = u + u'$$

En donde λ es la longitud de mezclado, u es la velocidad inicial y u’ el incremento o decremento en la velocidad.

Karman y Nikuradse encontraron que para flujo laminar

$$\tau_l = -\mu\frac{du}{dr} = -\nu\frac{\partial(\rho u)}{dr}$$

Siendo ν la viscosidad cinemática, μ la viscosidad, ρ la densidad, u la velocidad y r el radio del tubo.

Pero de acuerdo con Hagen y Poiseuille, u es función del radio:

$$u = \frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

Y también:

$$\tau_w = \frac{\Delta P R}{2L}$$

En donde τ_w es el esfuerzo cortante en la pared.

De allí se obtiene que:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2\tau_w}{R}$$

Y por lo tanto: $u = \frac{2\tau_w}{R4\mu}(R^2 - r^2) = \frac{\tau_w}{\rho}\frac{\rho(R-r)(R+r)}{\mu 2R}$

Si $r \cong R$, lo que sucede cuando estamos cerca de la pared entonces:

$\frac{R+r}{2R} \cong 1$ y por lo tanto:

$$u = \frac{\tau_w}{\rho}\frac{\rho(R-r)}{\mu}$$

También: $u = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{(R-r)}{\mu}$

$$\frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\mu}(R-r)\rho = u^*\frac{(R-r)}{\mu}\rho$$

En donde $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ es la llamada velocidad friccionante que tiene unidades de m/s.

Si definimos a: $y^+ = \frac{(R-r)u^*\rho}{\mu}$ es decir una posición adimensional

Y a: $u^+ = \frac{u}{u^*}$ es decir una velocidad adimensional, entonces para la región laminar:

$$u^+ = y^+$$

Lo cual se cumple para $y^+ < 5$

Se debe notar que un Reynolds se puede definir como:

$y^+ = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu}y$ siendo y la distancia desde el tubo hasta el punto que se está investigando es decir:

y = R-r que tiene unidades de m,

Para la región turbulenta Von Karman y Nikuradse encontraron que:

$$\tau = -\lambda^2\rho\left(\frac{du}{dr}\right)^2$$

Prandt y Karman prefirieron utilizar la coordenada y en lugar de la coordenada r y entonces, si en vez de usar la distancia r se usa la distancia tenemos que:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \lambda \frac{du}{dy}$$

Si λ=Ky o sea que la longitud del remolino es función de la distancia y entonces:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} Ky \frac{du}{dy}$$

$$du = \frac{1}{Ky} u^* dy$$

Integrando:

$$u = u^* \left(\frac{1}{K} lny + cte\right)$$

Pero $y^+ = \frac{u^*}{\mu} y\rho$ y por lo tanto $y = \frac{y^+}{u^*\rho}\mu$

Entonces:

$$\frac{u}{u^*} = u^+ = \left(\frac{1}{K} ln \frac{y^+\mu}{u^*\rho} + cte\right)$$

Pero si $u^+ = 5$ entonces $y^+ = 5$

$$\therefore 5 = \frac{1}{K} ln \frac{5\mu}{u^*\rho} + cte$$

$$cte = 5 - \frac{1}{K} ln \frac{5\mu}{u^*\rho}$$

$$\therefore u = u^* \left(\frac{1}{K} lny + K' - \frac{1}{K} ln \frac{\mu}{u^*\rho}\right) = u^* \left(\frac{1}{K} ln \frac{y\rho u^*}{\mu} + K'\right)$$

Pero $y = \frac{y^+\mu}{u^*\rho}$ y entonces:

$$\frac{u}{u^*} = u^+ = \frac{1}{K}\ln y^+ + K'$$

Nikuradse encontró que al graficar $\frac{u}{u^*}$ contra y^+ en el régimen turbulento

K=0.4 y K´¨=5.5

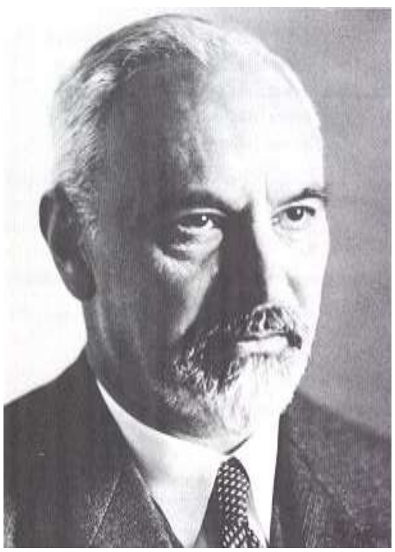
Así que:

$$\frac{u}{u^*} = u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

Esa ecuación se puede aplicar para $y^+ > 30$

A partir de otros experimentos se encontró que: para el flujo transicional que va de $5 < y^+ < 30$

$$u^+ = -3.05 + 5 \ln y^+$$



Para régimen turbulento y por el interior de tubos rugosos:

$$u^+ 08.5 + 2.5\ ln \frac{y^+}{\epsilon}$$

Ludwig Prandtl (1875-1953)

En realidad, aunque por el interior de un tubo el fluido se desplace a régimen turbulento siempre subsiste una subcapa laminar que se ubica justo sobre la superficie sólida y sobre ella se desarrolla también una zona de transición. Por ello es que para describir el perfil de velocidades a régimen turbulento es necesario usar tres ecuaciones., una para cada una de las zonas indicadas, según descubrió Prandtl quien postuló además la teoría de la capa límite.

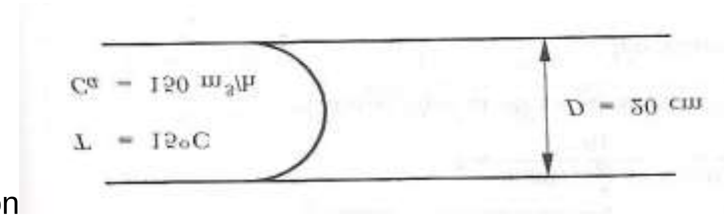
Ejemplo 9

Por un tubo de paredes lisas de 20 cm de diámetro interno circula agua a 15 ° C con un caudal de 150 m^3/h. Utilizando la ecuación universal de distribución de velocidades, calcular:

a) Los espesores de la región laminar de transición.
b) Las velocidades en los límites de las regiones.

c) La velocidad en el centro de la tubería, si la caída de presión es de 7 kg fuerza por metro cuadrado y metro de tubo.

1.- Traducción



2.- Planteamiento.

2.1.- Discusión.

Si existe el flujo turbulento.

$u^+ = y^+$ para $y^+ \leq 5$

u^+=-3.05+ 5 ln y^+para 5<$y^+ < 30$

$u^+ = 5.5 + 2.5 \ln y^+ \quad para\ y^+ > 30$

3.- Cálculos

3.1.- Velocidad y Reynolds.

$$u = \frac{Ca}{A} = \frac{150 m^3}{h\left(3600 \frac{s}{h}\right)(0.2)^2 \frac{\pi}{4}} = 1.3262 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{0.2m \times 1000 \frac{kg}{m^3} 1.3262 \frac{m}{s}}{10^{-3} \frac{kg}{m^3}} = 266\ 000$$

3.2.- Esfuerzo cortante en la pared

. $\tau_w = \frac{\Delta PD}{4L} = \frac{7\overrightarrow{kg}(0.02)m}{m^2 \times 4 \times 1\ m} = 0.35 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} = 3.4335 \frac{N}{m^2}$

3.3.- Velocidad de rozamiento.

$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{3.4335}{1000}}$=0.0585 m/s

3.4.- Región laminar.

$u^+ = \frac{u}{u^*} = 5$

$u = 5 \times 0.0585 = 0.2929\ m/s$

$y^+ = \frac{y\ \rho\ u^*}{\mu} = \frac{0.05859 \times y \times 1000}{1 \times 10^{-3}} = 5$

$y = 8.533 \times 10^{-5}$ m (espesor de la capa laminar)

3.5. Región transicional.

$y^+ = 30$

u^+=-3.05+ 5 ln 30 = 13.9559

$u = 13.9559(0.05859) = 0.8177\frac{m}{s}$

$30 = \frac{0.585 \times y \times 1000}{1 \times 10^{-3}}$

$y = 5.1198 \times 10^{-4}\ m$

$r = 0.1 - 5.1198 \times 10^{-4} = 0.994m$

Espesor de la capa transicional

$5.1198 \times 10^{-4} - 8.533 \times 10^{-5}$=4.2665$\times 10^{-4}m$

3.6.- Región turbulenta.

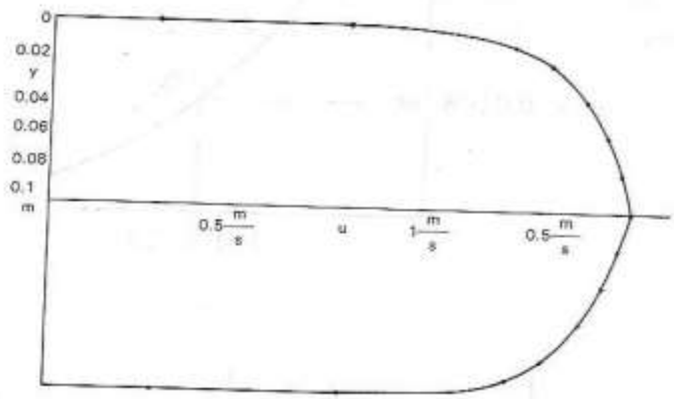
Si y = R ; $y^+ = \frac{0.585\,(0.1)(1000)}{10\quad -3} = 5859$

$u^+ = 5.5 + 2.5\ln 5859 = 27.189$

$u = 27.189(0.0585) = 1.593\frac{m}{s}$

$\frac{\hat{u}}{u} = \frac{1.3262}{1.5932} = 0.832$

$y = 0.08$ m	$y = 0.06$	$y = 0.04$	$y = 0.02$ m	$y = 0.01$
$y^+ = 4687$	$y^+ = 3515$	$y^+ = 2343$	$y^+ = 1171$	$y^+ = 585.9$
$u^+ = 26.63$	$u^+ = 25.91$	$u^+ = 24.89$	$u^+ = 23.16$	$u^+ = 21.43$
$u = 1.5604$	$u = 1.518$	$u = 1.458$	$u = 1.357$	$u = 1.255$ m/s



4.- Resultados.

El espesor de la capa laminar es de 8.5835 x10^{-5}m, o de 0.085 mm, el espesor de la capa transicional es de 0.426 mm. La velocidad en el límite laminar es de 0.2929 m/s y el límite transicional es de 0.817 m /s, en el centro del tubo es de 1.5932 m /s.

Ejemplo 10

¿Cuál será la caída de presión en kg fuerza / cm^2 esperada en 100 metros de tubo recto que sufre una corriente de alcohol n-butílico a 20 ° C que fluye a 1m/s por una tubería horizontal de 2 pulgadas cédula 40 de acero comercial?¡Cuál será el esfuerzo cortante en la pared?, ¿Cuál será la velocidad friccionante?¿Cuál es el valor de y^+ en el centro del tubo?¿Cuál es la velocidad en el centro del tubo?

1.- Planteamiento

1.1.- Balance

$$u_1 A_1 \rho_1 = u_2 A_2 \rho_2$$

1.2.-Bernoulli.

$$\frac{\Delta u^2}{2gc} + \frac{\Delta P}{\rho} + \Delta z \frac{g}{gc} = -\frac{\sum F}{M} - \frac{\tau}{M}$$

1.3.-Esfuerzo cortante.

$$\tau_w = \frac{\Delta P D}{4L}$$

1.4.-Velocidad de rozamiento.

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

1.4.- perfil de velocidades.

Para tubos rugosos en la región turbulenta.

$$u^+ = 8.5 + 2.5\, ln\frac{y}{e}$$

$$y^+ = \frac{\rho y u^*}{\mu}$$

3.- Cálculos

3.1.- Reynolds.

Densidad = 810 kg /m^3 ; viscosidad = 3.0508 cps; DI = 5.25 cm; E/d = 0.0009, u = 1 m /s

$$Re = \frac{0.0525(1)(810)}{3.0508 \times 10^{-3}} = 1.212 \times 10^4$$

3.2.- Factor de fricción.

De la gráfica de Moody se encuentra que f_D= 0.03

3.3.- Caída de presión.

Para nuestro caso si la energía potencial es igual a cero y la energía cinética también entonces:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = -\frac{\sum F}{M} = f_D \frac{u^2 L}{2gcD} = 0.03 \frac{(1)^2 \times 100}{2 \times 9.81 \times 0.0525} = 2.91 \frac{\overrightarrow{kg}}{kg}$$

$$\Delta P = 2.912 \times 800 = 2359 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$$

3.4.- Esfuerzo cortante.

$$\tau_w = \frac{\Delta PD}{4L} = \frac{2359 \times 0.0525}{4 \times 100} = 0.309 \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} = 3.0375\ Pa$$

3.2.- Velocidad de rozamiento o friccionante.

$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{3.0375}{810}} = 0.0612\ m\,/s$

3.5.- Región turbulenta.

Si y =R = 0.0525/2=0.02625 m

$$y^+ = \frac{\rho y u^*}{\mu} = \frac{0.02625 \times 0.0612 \times 810}{3.0502 \times 10^{-3}} = 371$$

Y=0.02625; e = 4.58 X 10^{-5}

$u^+ = 8.5 + 2.5\ ln\frac{y}{e}$=8.5+2.5 ln (=.02625/4.58X10^{-5})= 24.37

U = 1.49 m /s

4.- Resultados

La velocidad friccionante es de 0.0612 m /s, el esfuerzo cortante es de 3.0375 Pa, la velocidad en el centro de 1.49 m /s.

Ejercicios de autoevaluación

1.- Por una tubería de 2 pulgadas cédula 40 de acero galvanizado fluye una sustancia que tiene una densidad de 700 kg /m^3, una viscosidad de 2 cps y una velocidad media de 0.1 m/s. ¿Cuál será la caída de presión en 100 m de tubo?

2.-En el ejemplo anterior ¿Cuál es la velocidad en el centro del tubo? ¿Cuál es el esfuerzo cortante? ¿Cuál es el perfil de velocidades?

3.- Por un tubo de 2 pulgadas Cd 80 de acero inoxidable circula agua a 15 ° C con una velocidad de 0.5 m/s. ¿Cuál será la caída de presión en 100 metros de tubo? ,

¿Cuál es el esfuerzo cortante? ¿Cuál es la velocidad en el centro del tubo? ¿Cuál es el perfil de velocidades?

4.-.A través de una tubería de acero circula agua a 25 ° C. El diámetro interno de la tubería es de 5.25 cm y tiene una longitud de 125 m. La tubería transporta un caudal de 189 L / min. Calcule el número de Reynolds, el factor de fricción y las pérdidas por fricción.

R.- El número de Reynolds es de 85000, el factor de fricción de 0.019, las pérdidas de fricción son de 4.88 kg fuerza m / kg.

5.- Determine las pérdidas causadas por la fricción en una tubería horizontal de hierro forjado de 150 m de longitud y 30 cm de diámetro interno. Por la tubería circulan 150 L / s de agua a 20 ° C.

R.-Las pérdidas por fricción serán de 2.18 kgm/kg

6.- A través de una tubería horizontal de 8 cm de diámetro interno y 500 m de longitud fluye petróleo crudo ligero, cuya densidad es de 0.87. Si la caída de presión es de 2.1 kg fuerza / cm^2 y la velocidad de 0.5 m/s. ¿Cuál es la viscosidad del aceite?

R.- la viscosidad del aceite es de 164.8 cps.

7.- ¿Qué diámetro de tubería sería necesario para transportar 25 L /s de un aceite a 15 ° C, con una viscosidad cinemática de 2 X 10^{-4} m^2/s y una densidad de 0.912 Kg /L, si la caída de presión máxima permisible en 1000 m de tubería es de 0.25 kg fuerza /cm^2?

R.- El diámetro sería de 12 pulgadas de tubería comercial.