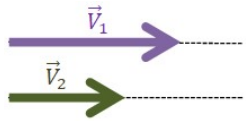
UNIDAD 2. ANÁLISIS VECTORIAL

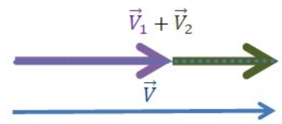
Ejercicio 1. Dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ sumados dan como resultante $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. Describa $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ si:

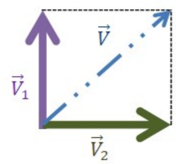
a) $|\vec{V}| = |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2|$

b) $|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2$

c) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

a) $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ son colineales, 

entonces 

b) $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ son perpendiculares 

c) Para que la ecuación $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, se cumpla, entonces $\vec{V}_2 = \vec{0}$

Ejercicio 2. Si $\vec{V} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ ¿qué escalar k debe multiplicarse por $\vec{V}$ para qué $|k\vec{V}| = 15$?

Dado que el vector está descrito por $\vec{V} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ cuya magnitud es:

$$|\vec{V}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Para satisfacer que la magnitud de $|k\vec{V}|$ sea 15, podemos establecer que

$$|k\vec{V}| = |k||V| = 15$$

Pero como la magnitud del vector es cinco, entonces

$$5\,k = 15$$

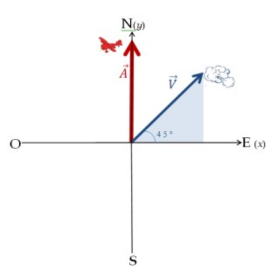
$$k = \frac{15}{5} = 3$$

Ejercicio 3. Un aeroplano se dirige hacia el norte con una rapidez de 450 km/h. Si sopla un viento hacia el noreste con una rapidez de 50 km/h. Calcule:

a) La velocidad real (magnitud y dirección) del aeroplano.

b) La distancia que se alejará de su curso original luego de 20 min

Considerando un plano cartesiano y haciendo coincidir el Norte con el eje y y el Este con el eje x.



La velocidad real del avión, $\vec{V}_R$, es la suma: $\vec{V}_R = \vec{A} + \vec{V}$ en donde $\vec{A} = 0\,\hat{\imath} + 450\,\hat{\jmath}[km/h]$.

Para determinar el vector asociado con el viento, procedemos a obtener sus componentes

$$V_x = |\vec{V}|\,cos(45) = (50)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25\sqrt{2} \qquad V_y = |\vec{V}|sen(45) = (50)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25\sqrt{2}$$

De esta forma procedemos con la suma vectorial

$$\vec{V}_R = \vec{V} + \vec{A} = (0\,\hat{\imath} + 450\,\hat{\jmath}) + \left(25\sqrt{2}\hat{\imath} + 25\sqrt{2}\hat{\jmath}\right) = 25\sqrt{2}\hat{\imath} + 485.36\hat{\jmath}[km/h]$$

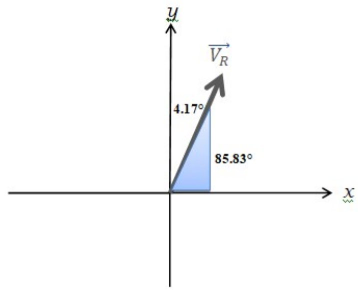
Para la magnitud de la velocidad real del avión

$$|\vec{V_R}| = \sqrt{\left(25\sqrt{2}\right)^2 + (485.36)^2} = 486.64\ [km/h]$$

Para la dirección de la velocidad real del avión:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{485.36}{25\sqrt{2}}\right) = 85.83°$$

Que corresponde a: 486.64 km/h y 4.17° al este del norte



Para la distancia recorrida, D, en la dirección real de movimiento en los primeros 20 min:

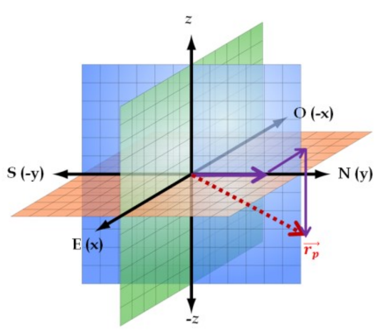
$$D = \left(486.64\ {}^{km}/_{h}\right)\left(\frac{1}{3}h\right) = 162.21\ km$$

Para la distancia que se alejará de su curso, x, en los primeros 20 min:

$$x = Dsen\alpha = (162.21\ km)(sen\ 4\ .17°) = 11.79\ km$$

Ejercicio 4. Un hombre con una pelota parte de un punto 0, camina 100 m hacia el norte, a continuación camina 200 m hacia el oeste y en ese punto deja caer la pelota en un pozo de 50 m de profundidad. ¿Cuál es el desplazamiento de la pelota respecto al punto 0?

Usando un sistema de referencia cartesiano con el origen en el punto 0, como se muestra en la figura



Las posiciones del punto 0, $\vec{r}_0$, y de la pelota, $\vec{r}_p$ son:

$$\vec{r}_0 = \vec{0}[m]\ \ y\ \ \vec{r}_p = -200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}[m]$$

$$Desplazamiento = \Delta\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_0$$

$$\therefore\ \Delta\vec{r} = \left(-200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}\right)[m] - \left(0\ \hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}\right)[m] = -200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}[m]$$

Ejercicio 5. Dos vectores están dados por: $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$. Determine:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{B} - \vec{A}$

c) Un vector $\vec{C}$ tal que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

a) Recordar que, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\hat{\imath} + (u_2 + v_2)\hat{\jmath} + (u_3 + v_3)\hat{k}$

$$\vec{A} + \vec{B} = \left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \left(-\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) = (3-1)\hat{\imath} + (-4-1)\hat{\jmath} + (1+2)\hat{k} = 2\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$$

b) Recordar que, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1)\hat{\imath} + (u_2 - v_2)\hat{\jmath} + (u_3 - v_3)\hat{k}$

$$\vec{B} - \vec{A} = \left(-1\,\hat{\imath} - 1\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) - \left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 1\hat{k}\right) = (-1-3)\hat{\imath} + (-1+4)\hat{\jmath} + (2-1)\hat{k} = -4\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 1\hat{k}$$

c) Para resolver que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ despejemos al vector $\vec{C}$ de la ecuación brindada y evaluemos las otras componentes

$$\vec{C} = -\vec{A} - \vec{B} = (-1)\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 1\,\hat{k}\right) - \left(-\,\hat{\imath} - \,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{C} = \left(-3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 1\,\hat{k}\right) + \left(1\,\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}\right) = -2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}$$

Comprobación:

$$\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \left(-\,\hat{\imath} - \,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) + \left(-2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}\right) = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Ejercicio 6. En un sistema coordenado cartesiano, demuestre que:

a) $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

b) $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$

Recordar que, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u}\bullet\vec{v} = (u_1 v_1) + (u_2 v_2) + (u_3 v_3)$.

Dado que $\hat{\imath} = (1{,}0{,}0)$, $\hat{\jmath} = (0{,}1{,}0)$ y $\hat{k} = (0{,}0{,}1)$, entonces:

a) $\hat{\imath}\bullet\hat{\imath} = (1{,}0{,}0)\cdot(1{,}0{,}0) = (1*1) + (0*0) + (0*0) = 1$
$\hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath} = (0{,}1{,}0)\cdot(0{,}1{,}0) = (0*0) + (1*1) + (0*0) = 1$
$\hat{k}\bullet\hat{k} = (0{,}0{,}1)\cdot(0{,}0{,}1) = (0*0) + (0*0) + (1*1) = 1$

b) $\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath} = (1{,}0{,}0)\cdot(0{,}1{,}0) = (1*0) + (0*1) + (0*0) = 0$
$\hat{\jmath}\bullet\hat{k} = (0{,}1{,}0)\cdot(0{,}0{,}1) = (0*0) + (1*0) + (0*1) = 0$
$\hat{k}\bullet\hat{\imath} = (0{,}0{,}1)\cdot(1{,}0{,}0) = (0*1) + (0*0) + (1*0) = 0$

Ejercicio 7. En un sistema coordenado cartesiano, dextrógiro, demuestre que:

a) $\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

b) $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$; $\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$; $\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$

a)

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{k}\times\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

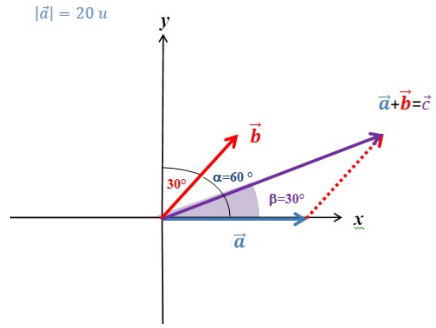
b)

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(1-0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath}\times\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k}\times\hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-1) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \hat{\jmath}$$

Ejercicio 8. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60°. Uno de ellos tiene 20 unidades y hace un ángulo de 30° con el vector suma de ambos, $\vec{c}$. Determine la magnitud del segundo vector y la del vector suma.



Para escribir explícitamente las componentes cartesianas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, sabemos que: $sen\,\emptyset = \frac{Co}{h}$ y $cos\,\emptyset = \frac{Ca}{h}$; entonces:

$$\vec{a} = (20, 0)\ u$$

$$\vec{b} = \left(|\vec{b}|cos60°, |\vec{b}|sen60°\right)u$$

$$\vec{c} = (|\vec{c}|cos30°, |\vec{c}|sen30°)u$$

Se sustituye en la suma vectorial.

$$(|\vec{c}|cos30°\,, |c|sen30°)u = (20{,}0)\ u + \left(|\vec{b}|cos60°\,, |\vec{b}|sen60°\right)u$$

$$(|\vec{c}|cos30°\,, |\vec{c}|sen30°)u = \left(20 + |\vec{b}|cos60°\,, |\vec{b}|sen60°\right)\ u$$

que dos vectores sean iguales significa que sus componentes deben ser iguales:

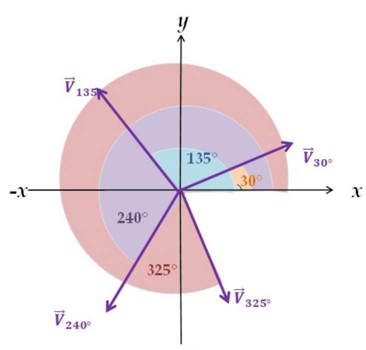
$$|\vec{c}|cos30° \ = 20\ u + |\vec{b}|cos60°$$

$$|\vec{c}|sen30° \ = |\vec{b}|sen60°$$

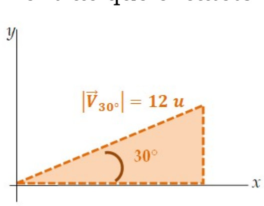
$$\therefore |\vec{b}| = 20\ u \quad y \quad |\vec{c}| = 34.6\ u$$

Ejercicio 9. Determine las componentes rectangulares de un vector de 12 unidades de longitud cuando éste forma un ángulo con respecto al eje positivo de las x, de:

a) 30°
b) 135°
c) 240°
d) 325°



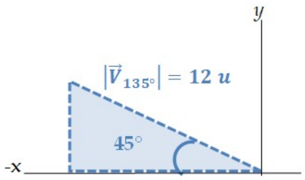
a) Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{30°}$, mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:



$$cos\ 30° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{30°}|} \therefore |\vec{V}_x| = 12u * cos\ 30° = 10.39\ u \qquad sen\ 30\ ° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{30°}|} \therefore |\vec{V}_y| = 12\ u *\ sen\ 30° = 6.00u$$

$$\therefore \vec{V}_{30°} = 10.39\ \hat{\imath} + 6.00\ \hat{\jmath}[u]$$

b) Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{135°}$, mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

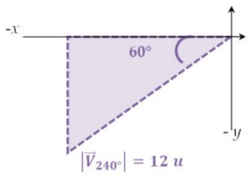


$$cos\ 45° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{135°}|}\ \therefore\ |\vec{V}_x| = 12u * cos\ 45° = 8.49\ u \qquad sen\ 45\ ° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{135°}|}\ \therefore\ |\vec{V}_y| = 12\ u * sen\ 45° = 8.49\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{135°} = -8.49\ \hat{\imath} + 8.49\ \hat{\jmath}[u]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

c) Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{240°}$, mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

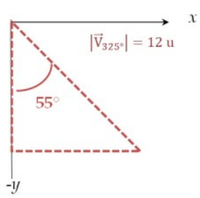


$$cos\ 60° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{240°}|}\ \therefore\ |\vec{V}_x| = 12u * cos\ 60° = 6.00\ u \qquad sen\ 60\ ° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{240°}|}\ \therefore\ |\vec{V}_y| = 12\ u *\ sen\ 60° = 10.39\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{240°} = -6.00\ \hat{\imath} - 10.39\ \hat{\jmath}[u]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

d) Observar que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{325°}$ mientras que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

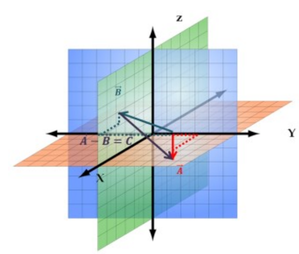


$$sen\ 55\ ° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{325°}|}\ \therefore\ 12\ u *\ sen\ 55° = 9.83\ u \qquad cos\ 55° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{325°}|}\ \therefore\ |\vec{V}_y| = 12u * cos\ 55° = 6.88\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{325°} = 9.83\ \hat{\imath} - 6.88\ \hat{\jmath}[u]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

Ejercicio 10. Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = -5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, encuentre un vector unitario en la dirección $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$.



Recordar que, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\hat{\imath} + (u_2 + v_2)\hat{\jmath} + (u_3 + v_3)\hat{k}$

$$\vec{C} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}) - (-5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}) = 7\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

Para determinar un vector unitario, recuerda que si $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el vector unitario $\hat{w}$ se obtiene dividiendo cada componente del vector por su magnitud. Tal que el unitario en la dirección de $\vec{C}$ será:

$$|\vec{C}| = \sqrt{7^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{78} \qquad \hat{C} = \left(\frac{1}{|\vec{C}|}\right)\vec{C} = \frac{7}{\sqrt{78}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{78}}\hat{\jmath} - \frac{2}{\sqrt{78}}\hat{k} = 0.8\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath} - 0.2\hat{k}$$

Ejercicio 11. Para los vectores $\vec{A} = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}[m]$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}[m]$, calcule el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El ángulo más pequeño entre dos vectores, $\propto_{AB}$, puede determinarse usando producto punto entre vectores.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\alpha_{AB}$$

Además, se sabe que dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 v_1) + (u_2 v_2) + (u_3 v_3)$, por lo tanto:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (5)(4) + (4)(5) + (2)(6) m^2 = 52\ m^2$$

Ahora determinemos la magnitud de los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, tenemos:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + (2)^2}\ m = \sqrt{45}\ m$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(B_x)^2 + \left(B_y\right)^2 + (B_z)^2} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2 + (6)^2}\ m = \sqrt{77}\ m$$

Sustituyendo en la ecuación brindada al inicio del ejercicio se tiene:

$$52\ m^2 = \left(\sqrt{45}\ m\right)\left(\sqrt{77}\ m\right) cos\alpha_{AB}$$

Finalmente despejando el ángulo:

$$\alpha_{AB} = cos^{-1}\left(\frac{52\ m^2}{\left(\sqrt{45}\ m\right)\left(\sqrt{77}\ m\right)}\right) = 27.95°$$