# INTRODUCCIÓN - OSCILACIONES

Se utilizan los términos oscilaciones y vibraciones para describir las formas de movimiento o cambios en los sistemas en los que una variable pasa repetidamente por un conjunto de valores a lo largo del tiempo. En el uso común, se reserva "vibraciones" para el movimiento de cuerpos, es decir, para la mecánica, y se usa "oscilaciones" en forma más general para incluir tanto los casos de la mecánica como sistemas eléctricos, electromagnéticos, termodinámicos, de fluidos, etc.

Las variables que medimos y modelamos representan la posición de un objeto de tamaño finito, la desviación de un péndulo respecto a la vertical, la flexión de una varilla, lámina, viga, trabe, o muelle, la carga en una placa de un condensador, la corriente eléctrica en un componente de un circuito o en todo el circuito, la presión o la densidad en un gas, la altura de la superficie de un líquido, la intensidad de la luz de una lámpara o de un cuerpo celeste, el flujo eléctrico en los nervios, la contracción del músculo cardíaco o de la pared intestinal, la concentración de una substancia en una disolución, y muchísimos otros sistemas.

**EJERCICIO.** Ilustre cada uno de los ejemplos citados en tal forma que pueda presentar oscilaciones.

Veremos en este capítulo que las oscilaciones pueden ser libres o forzadas, impuestas por una entidad externa al sistema que observamos, y otras especificaciones posibles.

Las oscilaciones libres más comunes se presentan en sistemas que tienen un punto de equilibrio estable, lo que se acompaña de una fuerza de restauración, y una inercia.

Una fuerza de restauración es una fuerza que apunta hacia la posición de equilibrio independientemente de la dirección en la que el sistema se haya desviado del equilibrio.

Una inercia es una característica del sistema que está asociada a la conservación del estado de movimiento del sistema. En mecánica para masas puntuales la masa es la medida de la inercia; en otros sistemas dicha medida puede ser otra cantidad, como el momento de inercia en las rotaciones o la autoinductancia en las bobinas insertadas en circuitos eléctricos.

En este capítulo estudiaremos sistemas que cuentan con un punto de equilibrio estable, y por ello presentan una fuerza de restitución y una inercia. Otras oscilaciones debidas a retroalimentación entre fuerzas aplicadas y propiedades de los sistemas, como el chirrido de los gises en los pizarrones, no serán estudiadas aquí.

Seguiremos una secuencia típica de los cursos de Física cuyo valor no es sólo didáctico para ir de lo simple a lo complicado, sino que nos enseña cómo se hacen y utilizan los modelos en Física y otras ciencias. Los modelos parten de una representación abstracta de los sistemas, seleccionan las variables representativas y determinantes de su comportamiento, identifican

y resuelven las ecuaciones que conectan dichas variables, analizan las soluciones de estas ecuaciones, las confirman o refutan en sistemas reales, y extraen lecciones de este análisis para rehacer el ciclo añadiendo características del sistema que pueden volver más realista el modelo.

Este procedimiento es conocido para los estudiantes de mecánica a través del análisis del movimiento de masas puntuales, primero en movimiento libre, luego uniformemente acelerado y después en condiciones con más fuerzas presentes; o a los de Termodinámica, partiendo del gas ideal en sistemas cerrados y extendiendo el tratamiento a gases no ideales, sistemas abiertos de distintas naturalezas al eliminar distintas restricciones como presión, volumen o temperatura constante, y así sucesivamente en otras disciplinas científicas.

En nuestro caso partiremos del oscilador armónico simple modelado como una masa puntual propelida por una fuerza de Hooke y volveremos más realistas nuestros modelos añadiendo fuerzas no conservativas (disipativas) en la forma de fricción viscosa, y fuerzas periódicas externas impuestas al sistema. Ilustraremos cada una de estas representaciones con sistemas de diversas naturalezas como el péndulo simple, la producción de sonido en un gas, y las oscilaciones en los circuitos eléctricos. En todos los casos repetiremos la secuencia.

1. Describir y representar el sistema
2. Identificar características y variables relevantes
3. Identificar o establecer ecuaciones para relacionar las variables
4. Combinar ecuaciones para obtener la ecuación de movimiento
5. Resolver la ecuación de movimiento
6. Analizar la solución en términos cualitativos, semicuantitativos y gráficos
7. Relacionar la solución con el comportamiento observable del sistema modelado
8. Profundizar la comprensión física del sistema
9. Extender el tratamiento a otros sistemas con la misma matemática

## Oscilador armónico simple

El sistema conocido como oscilador armónico simple es fundamental en física, química, y disciplinas afines. Provee el modelo más simple de oscilaciones que se puede estudiar y resolver en forma analítica cerrada, y presenta características generales que comparte con innumerables sistemas oscilatorios reales. Al añadir elementos al análisis, se convierte en un modelo para sistemas no mecánicos como los circuitos eléctricos, el sonido, y también para sistemas mecánicos no clásicos como átomos y moléculas. En este caso provee las bases para la comprensión de la espectroscopía y la espectrometría.

Texto en:

http://ocw.uv.es/ciencias/2/1-2/12733mats30.pdf

http://www.repositoriogeneral.unam.mx/app/webroot/digitalResourcesFiles/448/1211_2017-02-17_111734.867993/U4_1_III.ppt

Simulación en:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/mass-spring-lab

## Oscilador armónico forzado

En una oscilación forzada se aplica una fuerza impulsora periódica a un oscilador. Ejemplos clásicos de oscilaciones forzadas son conocidos: empujar un columpio a intervalos regulares para que continúe en movimiento, en un reloj de péndulo hay un mecanismo que permite que el péndulo se impulse de manera regular y así mantener el movimiento. La ecuación de movimiento de una partícula puntual de masa $m$ bajo un movimiento forzado es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o\cos(\omega t) \qquad \text{Ec. 1}$$

donde se puede observar que del lado izquierdo de la igualdad en la ecuación 1 es la que coresponde a un oscilador amortiguado libre, mientras que en el lado derecho de la igualdad se identifica a la fuerza periódica impulsora de magnitud máxima $F_o$. Una expresión más generalizada se encuentra al dividir toda la ecuación 1 entre el término $m$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t) \qquad \text{Ec. 2}$$

Una solución de la ecuación diferencial de la ecuación 2, una vez que se ha llegado al estado estacionario, tiene la forma $x = A_\omega\cos(\omega t - \delta)$.

En el estado estacionario ocurre cuando el sistema oscila a la frecuencia $\omega$ de la fuerza impulsora periódica, luego de pasar por un estado transitorio. Antes de llegar al estado estacionario, el sistema inicia en un estado transitorio que depende de las condiciones iniciales y solo dura cierto tiempo.

Una característica importante de la solución en el estado estacionario, es que la amplitud $A_\omega$ depende de la frecuencia $\omega$ de la fuerza impulsora y tiene la siguiente forma:

$$A_\omega = \frac{{}^{F_o}/_m}{\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2\right]^{1/2}} \qquad \text{Ec. 3}$$

Adicionalmente, la constante de fase también depende de $\omega$:

$$\tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2} \qquad \text{Ec. 4}$$

Cuando $\omega = 0, \tan\delta \to 0$ y $\delta \to 0$; $\omega = \omega_0, \tan\delta = \infty$ y $\delta = \pi/2$; $\omega \to \infty, \tan\delta \to 1/-\infty$ y $\delta \to \pi$.

Regresando a la ecuación 3, se pueden predecir dos valores para la amplitud cuando $\omega = 0$ y cuando $\omega \to \infty$, que en ambos casos son $A_o = F_o/k$ y $A_\infty = 0$, respectivamente.

En la Figura 1 se muestran las curvas obtenidas con la siguiente gráfica interactiva:

https://www.desmos.com/calculator/arcdpihqjl

donde se puede observar el efecto en la variación de los parámetros $m$ y $k$ (que controlan el valor de la frecuencia natural $\omega_o$, que controla también la constante de amortiguamiento y $F_o$.

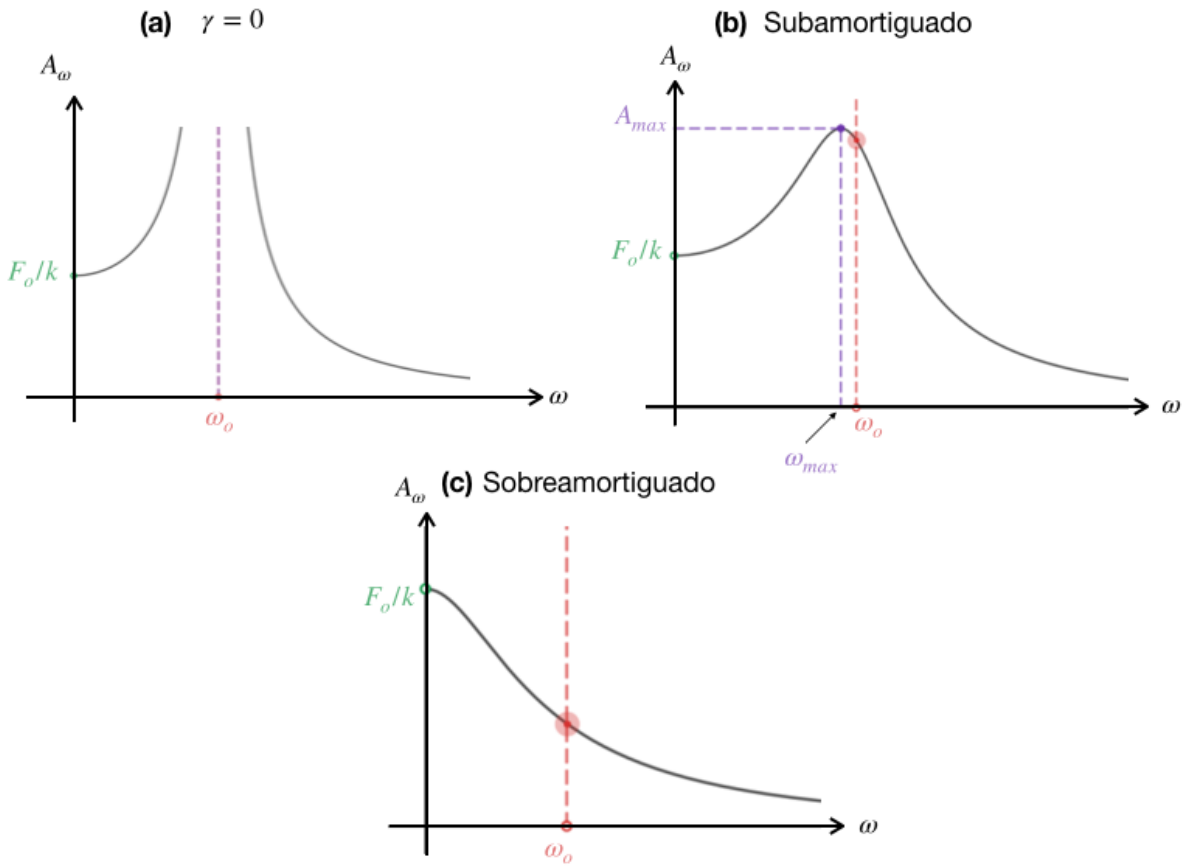



**Figura 1**. Curvas de la amplitud de oscilación $A_\omega$ de un oscilador forzado como función de la frecuencia de la fuerza impulsora $\omega$ para tres casos: (a) oscilador simple, (b) oscilador subamortiguado y (c) oscilador sobreamortiguado.

En la Figura 1 se muestra la curva de amplitud como función de la frecuencia impulsora para tres casos: (a) oscilador simple ($\gamma = 0$), donde la amplitud tiende a infinito cuando la frecuencia externa es igual a al frecuencia natural del oscilador ($\omega = \omega_o$); (b) oscilador subamortiguado, donde se puede observar que la amplitud llega a un valor máximo cuando la frecuencia externa es muy cercana a la frecuencia natural, aunque siempre es ligeramente

menor; y (c) oscilador sobreamortiguado, donde la amplitud nunca llega realmente a un valor máximo y sólo tiene un comportamiento decreciente.

En el siguiente video se pueden observar diferentes osciladores, cada uno con una frecuencia natural $\omega_o$ sometidos a una fuerza impulsora externa periódica.

https://youtu.be/iyw4AcZuj5k

Podrá notar cómo la amplitud de oscilación varía con respecto a la frecuencia externa aplicada y cómo dicha amplitud aumenta considerablemente cuando la frecuencia externa es muy cercana a la frecuencia natural; mientras que a frecuencias mayores o menores a la frecuencia natural de cada oscilador, la amplitud es pequeña.

Otro ejemplo puede ser observado aquí:

https://youtu.be/jewSVEBkI_s

La energía de un oscilador amortiguado disminuye de manera exponencial, por lo que en movimiento armónico forzado se debe proveer de energía al sistema para que la oscilación se mantenga y entonces la potencia (energía por unidad de tiempo) absorbida por el oscilador para que el movimiento se mantenga es exactamente igual a la razón de cambio con respecto al tiempo a la que la energía es disipada.

La potencia absorbida instantánea, $P(t)$, sigue la expresión:

$$P(t) = b(A_\omega \omega)^2 \text{sen}^2(\omega t - \delta) \qquad \text{Ec. 5}$$

Sin embargo, más que valores instantáneos estamos interesados en el valor promedio de la potencia absorbida en una oscilación completa, por lo que se realiza la integral $\bar{P}(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$ obteniendo el resultado final:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{b\omega^2 F_o^2}{2m^2\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2\right]} = \frac{\gamma\omega^2 F_o^2}{2m\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2\right]} \qquad \text{Ec. 6}$$

En la Figura 2 se muestran gráficas de la potencia promedio absorbida como función de la frecuencia externa para los casos de un oscilador subamortiguado y sobreamortiguado, obtenidas con la siguiente gráfica interactiva:

https://www.desmos.com/calculator/43dxphler8

La potencia promedio máxima se obtiene cuando $\omega = \omega_0$. Si se tiene un oscilador subamortiguado con Q>1.5, el ancho de la banda a la mitad de la altura, $\omega_{fwhh}$, es

numéricamente igual a la constante de amortiguamiento $\gamma$ (Figura 2a). De manera cualitativa, mientras el amortiguamiento aumenta, el ancho de la banda a la mitad de la altura también aumenta, como se puede observar en la Figura 2b.

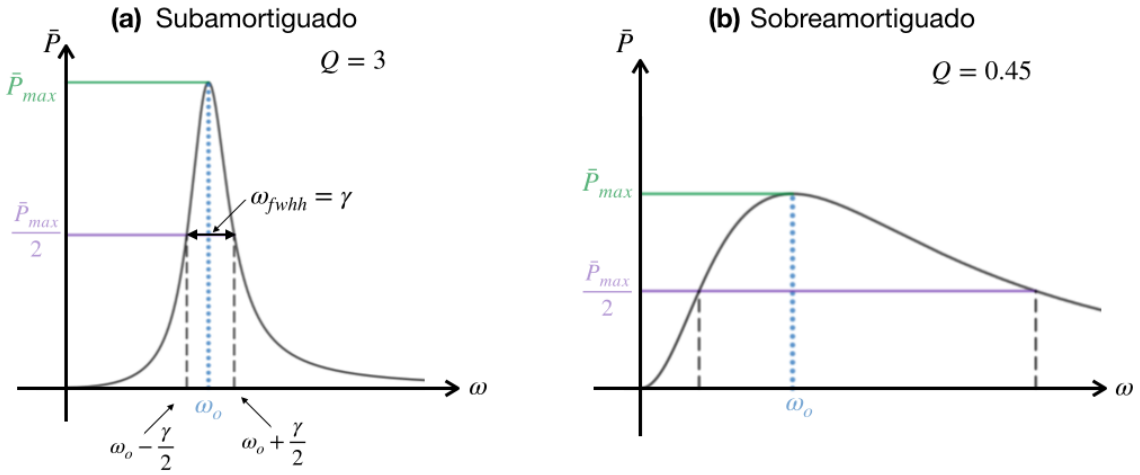



**Figura 2**. Curvas de la potencia promedio absorbida como función de la frecuencia impulsora de un oscilador forzado para (a) oscilador subamortiguado, y (b) oscilador sobreamortiguado.

Una curva de potencia como la de la Figura 2a se puede encontrar, por ejemplo, cuando un átomo es irradiado bajo ciertas condiciones, este puede absorber dicha radiación. Desde un punto de vista clásico, el campo eléctrico oscilante de la radiación interactua con el átomo que entonces se comorta como un oscilador forzado (donde la frecuencia impulsora externa es la frecuencia de oscilación del campo eléctrico de la radiación). Tratando al átomo como un oscilador con una Q muy grande, dicho átomo presenta una espectro de absorción (es decir, una curva de potencia promedio), con una señal poco ancha.

Recursos adicionales (lista no exhaustiva):

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/forzadas/forzadas.htm

King, George, Vibrations and waves. Wiley (2009)

**Superposición y descomposición mediante series de Fourier**

Las series de Fourier permiten representar funciones periódicas en términos de una superposición (suma) de funciones seno y coseno.[1]

En la Figura 3 se muestran varios ejemplos de funciones periódicas[2] en el dominio del tiempo y una representación gráfica de coeficientes $a$ y $b$ en el dominio de las frecuencias asociadas a las funciones seno y coseno de cada término en la serie de Fourier que serán descritos más adelante.

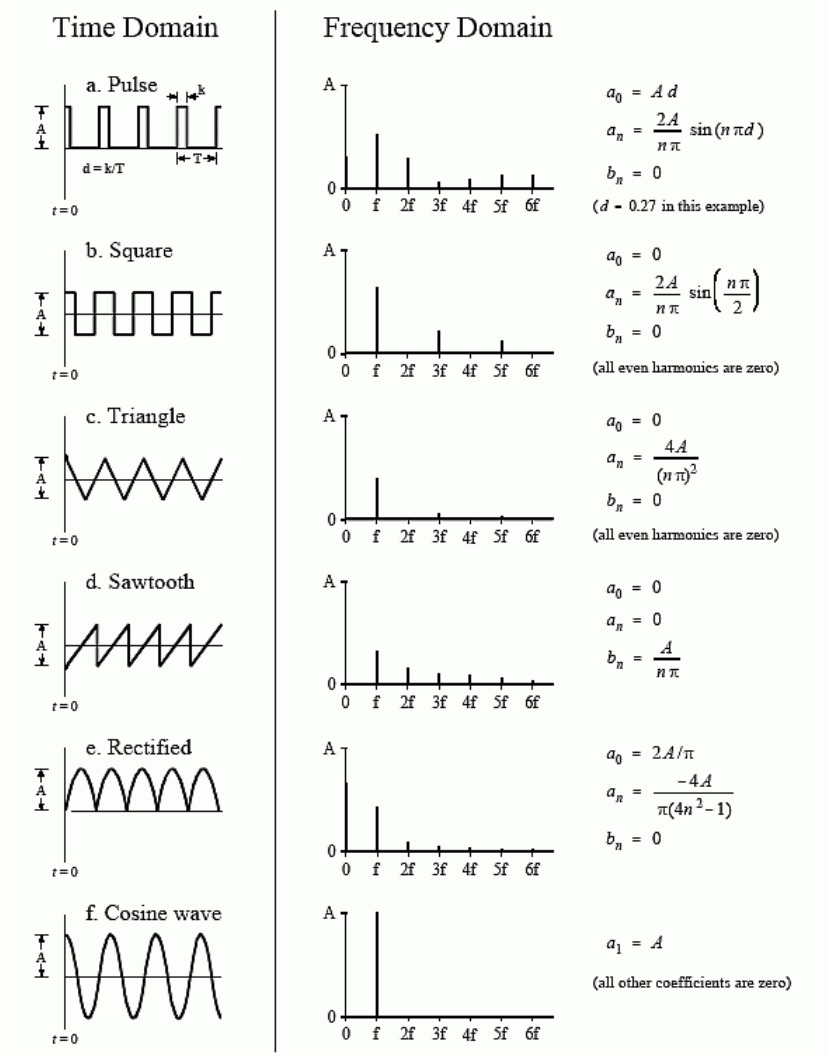



**Figura 3.** Funciones periódicas en el dominio del tiempo y coeficientes $a_n$ y $b_n$ que conforman cada serie de Fourier correspondiente a las funciones periódicas.

[1] http://www.dmae.upct.es/~paredes/am_ti/apuntes/Tema%202.%20Series%20y%20transformadas%20de%20Fourier.pdf

[2] Figura tomada de: https://www.dspguide.com/ch13/4.htm

Una característica que se puede observar en las gráficas en el dominio de las frecuencias de la Figura 3, es que solo están graficados múltiplos enteros de una frecuencia f, que llamaremos frecuencia fundamental. Es decir, los términos seno y coseno en la serie de Fourier tendrán como argumento una frecuencia que será un múltiplo entero de una frecuencia fundamental (estos múltiplos enteros 2f, 3f, etc. son denominados armónicos). Adicionalmente, los denominados coeficientes $a_n$ y $b_n$ son función de un término entero "$n$" , pueden ser igual a cero y su valor disminuye conforme aumenta $n$.

Así, la serie de Fourier de una función períodica $f(t)$ que tiene un periodo $T$ (y está definida en un intervalo de magnitud $T$) es:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,2\pi}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{T} t\right) \qquad \text{Ec. 7}$$

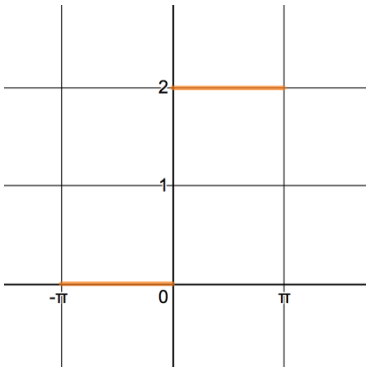
Notar que la frecuencia fundamental es f=1/T y que $n$ va tomando valores de 1,2,3, etc. Por otro lado, los coeficentes $a_n$ y $b_n$ se calculan resolviendo las siguientes integrales:

$$a_o = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,dt \qquad \text{Ec. 8}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\cos\left(\frac{n\,2\pi}{T} t\right) dt \qquad \text{Ec. 9}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{T} t\right) dt \qquad \text{Ec. 9}$$

Ejemplo: Expanda una serie de Fourier para la función:




$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < t < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \le t < \pi \end{cases}$$

El periodo de la función es $T = 2\pi$, definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ . Con esa información se pueden determinar los coeficentes $a_n$ y $b_n$. Tomando en cuenta que la función $f(t)$ está dividida en dos partes se tiene que:

$$a_o = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\,dt = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\cos\left(\frac{n\,2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right)dt + \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n}[\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(0)] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\text{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right)dt + \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\,\text{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}(nt)\,dt = -\frac{2}{\pi n}[\cos(n\pi) - \cos(0)] = -\frac{2}{\pi n}[(-1)^n - 1] = \frac{2}{\pi n}[1 - (-1)^n]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{con } n \text{ par} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{con } n \text{ impar} \end{cases}$$

Una vez que se han obtenido los coeficientes $a_n$ y $b_n$, se puede escribir el desarrollo en series de Fourier (Ec. 7) de la función bajo estudio, que entonces queda de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cos\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}[1 - (-1)^n]\,\text{sen}\left(\frac{n\,2\pi}{2\pi}t\right)$$

Que de manera simplificada es:

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\text{sen}(nt)$$

En la Figura 4, se muestra el uso de una aplicación web para verificar los resultados obtenidos.

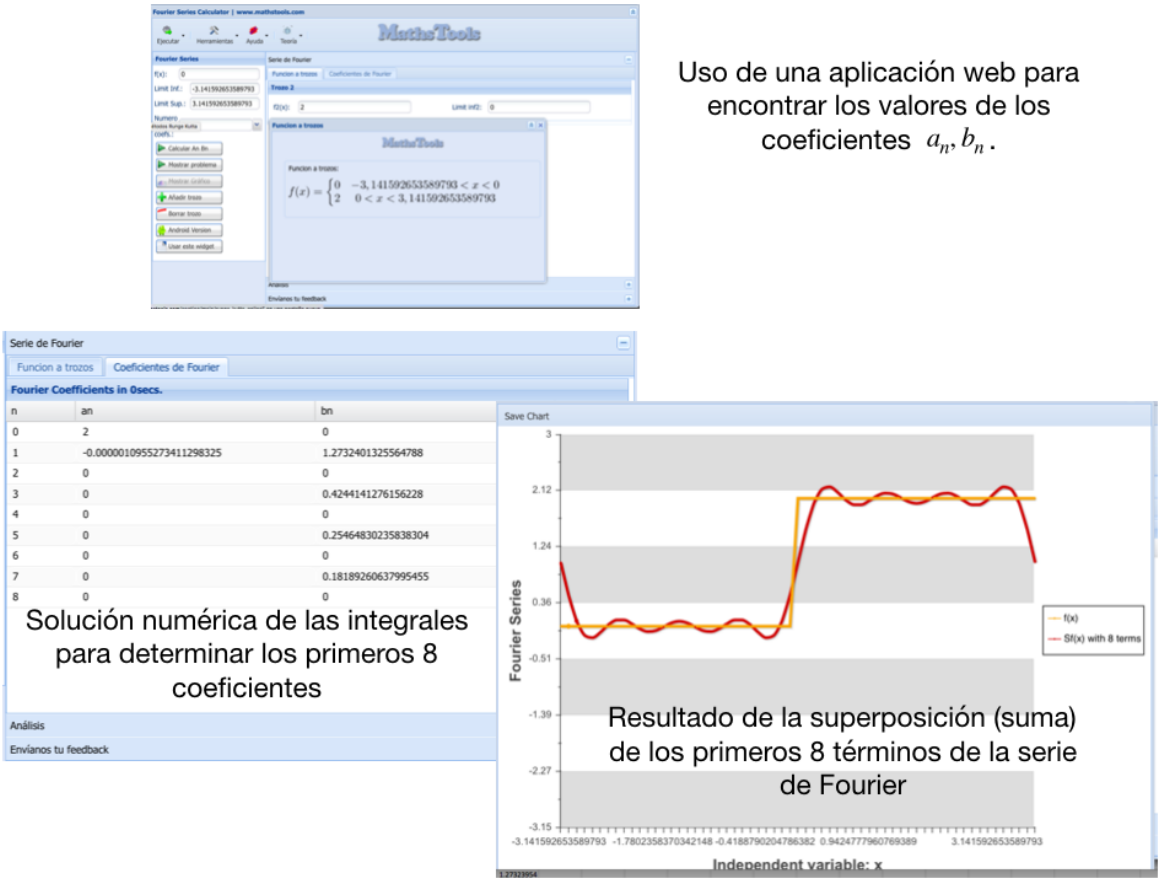



Figura 4. Uso de una aplicación web para encontrar los coeficientes del desarrollo en series de Fourier del ejemplo tratado en el texto.

La aplicación MathsTools se puede encontrar en:

http://www.mathstools.com/section/main/fourier_series_calculator

También se puede descargar la app "Series de Fourier" para sistema Android desarrollada por Jesús Francisco Duarte Martínez.

Recursos adicionales (lista no exhaustiva):

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/fourier/fourier.html

http://www.dmae.upct.es/~paredes/am_ti/apuntes/Tema%202.%20Series%20y%20transformadas%20de%20Fourier.pdf

Videos-animaciones

https://youtu.be/ds0cmAV-Yek

https://youtu.be/k8FXF1KjzY0